

MEXANA

Л. Я. ТАБАЧНИКОВ

КОНТРОЛЬНЫЙ ЭКЗЕМПЛЯР

МЕХАНИКА

(СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС)

*Утвержден помощником Главнокомандующего ВМФ по ВМУЗ—
Начальником ВМУЗ в качестве учебника для курсантов
высших военно-морских командно-инженерных училищ*

Ордена Трудового Красного Знамени
ВОЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ОБОРОНЫ СССР
МОСКВА — 1974

В учебнике изложены: статика абсолютно твердого и деформируемого тела; кинематика точки, кинематика твердого тела, механизмов и машин; динамика, в которой кроме традиционных вопросов рассмотрены динамика точки переменной массы и некоторые вопросы динамики механизмов и машин; передаточные механизмы и элементы механизмов, машин и приборов; гидромеханика.

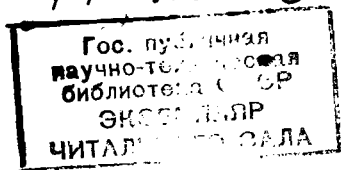
При написании учебника были учтены фактический объем сведений, известных курсантам к моменту начала изучения курса, и сведения, которые они получают по изучаемым смежным дисциплинам, в частности по векторной алгебре, дифференциальному и интегральному исчислению и т. д.

Главы 1—29 написаны Табачниковым Л. Я., главы 30—31 — Артемьевым С. М. с участием Табачникова Л. Я., главы 32—37 — Сазоновым А. В. и Табачниковым Л. Я. совместно.

В учебнике использованы некоторые задачи и рисунки из учебных пособий, выпущенных для высшей школы.

Научное редактирование учебника выполнено кандидатом физико-математических наук, доцентом Бодуновым А. К. и кандидатом технических наук, доцентом Воронцовым В. К. (раздел IV).

74-23863



24
31022

Лев Яковлевич Табачников

Механика

Редактор В. А. Свириш

Переплет художника Г. М. Мельникова

Технический редактор Е. К. Коновалова

Корректор Е. М. Дубань

Г-32838

Слано в набор 1.9.72 г.

Подписано к печати 5.05.74 г.

Формат 60×90¹/₁₆ 38¹/₂ печ. л., 38,5 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 36,087

Изд. № 9/5990

Для внутриведомственной продажи. (Цена 1 р. 46 к.)

Зак. 765

Ордена Трудового Красного Знамени
Военное издательство Министерства обороны СССР
103160, Москва, К-160

2-я типография Воениздата
Ленинград, Д-65, Дворцовая пл., 10

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие	11
Раздел I. СТАТИКА	
§ 1. Введение	13
Глава 1. Основные определения. Аксиомы статики абсолютно твердого тела	14
§ 2. Основные определения	—
§ 3. Аксиомы статики	15
§ 4. Связи и виды связей	18
Глава 2. Система сходящихся сил	21
§ 5. Геометрический способ сложения сил	—
§ 6. Аналитический способ определения равнодействующей	23
§ 7. Условия равновесия системы сходящихся сил	24
§ 8. Теорема о трех непараллельных силах	27
§ 9. Понятие о трении скольжения	29
Глава 3. Теория пар сил	33
§ 10. Пара сил. Момент пары	—
§ 11. Теоремы об эквивалентности пар	34
§ 12. Сложение пар. Условия равновесия системы пар сил	36
Глава 4. Произвольная система сил	38
§ 13. Момент силы относительно точки (полюса)	—
§ 14. Приведение системы сил к данному центру. Главный вектор и главный момент	39
§ 15. Система сил, произвольно расположенных в одной плоскости. Уравнения равновесия плоской системы сил	43
§ 16. Система сил, произвольно расположенных в пространстве. Уравнения равновесия пространственной системы сил	48
§ 17. Параллельные силы. Центр параллельных сил	54
Глава 5. Центр тяжести. Геометрические характеристики плоских фигур	57
§ 18. Центр тяжести	—
§ 19. Геометрические характеристики плоских фигур. Определения	63
§ 20. Зависимость между статическими моментами и моментами инерции относительно параллельных осей	65
§ 21. Определение моментов инерции некоторых фигур	67
§ 22. Изменение моментов инерции при повороте координатных осей на угол α	72
§ 23. Главные центральные оси инерции	73

	Стр.
Глава 6 Общие сведения о деформируемых телах	75
§ 24. Основные понятия статики деформируемого тела	—
§ 25. Основные допущения, принимаемые в статике деформируемого тела	76
§ 26. Классификация деформаций	77
§ 27. Метод сечений	78
§ 28. Напряжение	80
Глава 7. Внутренние усилия (силовые факторы) в сечениях прямого стержня (бруса) при простейших деформациях	83
§ 29. Осевое растяжение (сжатие)	—
§ 30. Кручение	84
§ 31. Статически определимые балки и их основные типы	87
§ 32. Изгибающий момент, поперечная и продольная силы. Понятие о плоском поперечном изгибе прямого стержня	88
§ 33. Примеры построения эпюр поперечной силы и изгибающего момента	91
§ 34. Дифференциальные зависимости между изгибающим моментом $M(x)$, поперечной силой $Q(x)$ и интенсивностью распределенной нагрузки $q(x)$	95
Глава 8. Деформация растяжения и сжатия	98
§ 35. Определение напряжений и деформаций прямого стержня при линейном (одноосном) напряженном состоянии	—
§ 36. Коэффициент Пуассона	101
§ 37. Понятие о напряжениях и деформациях стержня с учетом его собственного веса	102
§ 38. Основные сведения о механических свойствах материалов при растяжении и сжатии	105
§ 39. Понятие о расчете статически неопределимых систем на растяжение и сжатие	115
Глава 9. Основы теории напряженного состояния	120
§ 40. Осевое напряженное состояние. Составляющие напряжения. Закон парности касательных напряжений	—
§ 41. Плоское напряженное состояние	122
§ 42. Объемное напряженное состояние. Обобщенный закон Гука	125
§ 43. Теории прочности	127
Глава 10. Деформации сдвига и кручения	131
§ 44. Чистый сдвиг	—
§ 45. Определение напряжений при кручении	134
§ 46. Подбор диаметра вала из условия прочности.	136
§ 47. Определение деформаций при кручении	137
§ 48. Некоторые соображения о рациональных формах сечений при кручении	140
§ 49. Определение напряжений и деформаций в винтовых пружинах с малым шагом	141
Глава 11. Деформация изгиба	144
§ 50. Нормальные напряжения при чистом изгибе	—
§ 51. Условие прочности по нормальным напряжениям	148
§ 52. Касательные напряжения при изгибе (формула Д. И. Журавского)	150
§ 53. Главные напряжения. Проверка прочности по главным напряжениям	154
§ 54. Дифференциальное уравнение оси изогнутой балки	156

	Стр.
§ 55. Универсальные уравнения	162
§ 56. Понятие о графоаналитическом способе определения перемещений	166
§ 57. Понятие о статически неопределимых балках	170
Глава 12. Сложное сопротивление	175
§ 58. Виды сложного сопротивления	—
§ 59. Совместное действие изгиба и кручения	179
§ 60. Совместное действие изгиба, кручения и растяжения (сжатия)	183
§ 61. Определение коэффициента запаса прочности	—
Глава 13. Понятие об определении напряжений в тонкостенных оболочках	185
§ 62. Некоторые сведения из геометрии поверхностей вращения	—
§ 63. Основные допущения	187
§ 64. Уравнение равновесия элемента оболочки	—
§ 65. Уравнение равновесия зоны	190
Глава 14. Устойчивость сжатых стержней	195
§ 66. Определение величины критической силы	—
§ 67. Критические напряжения	198
§ 68. Влияние закрепления концов стержня на величину критической силы и критического напряжения	199
§ 69. Пределы применимости формулы Эйлера. Критические напряжения за пределом пропорциональности	201
§ 70. Проверка сжатых стержней на устойчивость	203
 Раздел II. КИНЕМАТИКА 	
§ 71. Введение	206
Глава 15. Кинематика точки	207
§ 72. Способы задания движения материальной точки	—
§ 73. Скорость материальной точки	211
§ 74. Ускорение материальной точки	219
§ 75. Понятие об естественных осях. Проекция ускорения на естественные оси	223
Глава 16. Кинематика твердого тела	231
§ 76. Поступательное движение твердого тела	—
§ 77. Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси	233
§ 78. Скорость и ускорение точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси	239
§ 79. Уравнение движения твердого тела с одной неподвижной точкой	242
§ 80. Теорема Даламбера—Эйлера. Угловая скорость и угловое ускорение твердого тела, имеющего неподвижную точку	245
§ 81. Линейная скорость и линейное ускорение точек твердого тела с одной неподвижной точкой	247
§ 82. Понятие об общем случае движения свободного твердого тела	251
Глава 17. Составное движение материальной точки	254
§ 83. Основные определения	—
§ 84. Сложение скоростей и ускорений в случае, когда переносное движение поступательное	256

	<i>Стр.</i>
§ 85. Сложение скоростей в случае, когда переносное движение произвольное	260
§ 86. Сложение ускорений в случае, когда переносное движение произвольное. Поворотное ускорение (ускорение Корнолиса)	262
Глава 18. Основы кинематики механизмов	267
§ 87. Общие определения. Задачи кинематики механизмов	—
§ 88. Кинематические пары	268
§ 89. Кинематические цепи	269
§ 90. Уравнения плоскопараллельного движения	272
§ 91. Скорости точек плоской фигуры	276
§ 92. Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей	278
§ 93. План скоростей	283
§ 94. Ускорения точек плоской фигуры	285
§ 95. Понятие о мгновенном центре ускорений	289
§ 96. План ускорений	291
§ 97. Кинематический анализ плоских шарнирных механизмов	295
§ 98. Кулачковые механизмы	301
§ 99. Понятие о коноидах	309
 Раздел III. ДИНАМИКА 	
§ 100. Введение	312
Глава 19. Основные законы динамики. Две основные задачи динамики материальной точки	—
§ 101. Основные законы динамики	—
§ 102. Дифференциальные уравнения движения материальной точки	316
§ 103. Первая основная задача динамики	318
§ 104. Вторая основная задача динамики	321
§ 105. Гармонические (свободные) колебания материальной точки	325
Глава 20. Теорема о движении центра масс. Теорема об изменении количества движения материальной точки и механической системы	331
§ 106. Введение в динамику механической системы	—
§ 107. Теорема о движении центра масс системы	333
§ 108. Количество движения	335
§ 109. Теорема об изменении количества движения материальной точки	337
§ 110. Теорема об изменении количества движения механической системы	340
Глава 21. Динамика материальной точки переменной массы	346
§ 111. Понятие о теле переменной массы	—
§ 112. Исследование движения материальной точки переменной массы. Уравнение И. В. Мещерского	347
§ 113. Реактивная сила	350
§ 114. Формула К. Э. Циолковского	351
Глава 22. Теорема об изменении кинетической энергии	359
§ 115. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки	—
§ 116. Работа и мощность	361
§ 117. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы	370
§ 118. Моменты инерции твердых тел (динамические моменты инерции)	376

	Стр.
§ 119. Работа и мощность сил, приложенных к абсолютно твердому телу	380
§ 120. Понятие о потенциальном силовом поле и потенциальной энергии. Закон сохранения механической энергии	385
Глава 23. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки и системы	388
§ 121. Моменты количества движения материальной точки и системы	—
§ 122. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки	391
§ 123. Теорема об изменении кинетического момента	393
§ 124. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси	397
§ 125. Физический маятник	399
Глава 24. Элементарная теория гироскопических явлений	403
§ 126. Основные определения. Кинетический момент быстро вращающегося гироскопа	—
§ 127. Кинематическая формулировка теоремы о изменении кинетического момента (теорема Резаля)	405
§ 128. Гироскопический эффект и гироскопический момент	406
§ 129. Гироскоп с тремя степенями свободы	409
Глава 25. Принцип Даламбера	414
§ 130. Силы инерции	—
§ 131. Принцип Даламбера для материальной точки	416
§ 132. Принцип Даламбера для несвободной механической системы	419
Глава 26. Принцип возможных перемещений	424
§ 133. Классификация связей	—
§ 134. Возможные перемещения	425
§ 135. Принцип возможных перемещений	427
§ 136. Принцип возможных скоростей. Рычаг Н. Е. Жуковского	432
§ 137. Общее уравнение динамики	434
Глава 27. Уравнения Лагранжа	437
§ 138. Обобщенные координаты и обобщенные скорости	—
§ 139. Обобщенные силы	438
§ 140. Уравнения равновесия несвободной механической системы	440
§ 141. Уравнения Лагранжа второго рода	441
§ 142. Уравнения Лагранжа для консервативных голономных механических систем	445
Глава 28. Основы динамики механизмов и машин	448
§ 143. Классификация сил и моментов, действующих на звенья механизма	—
§ 144. Силовой расчет плоского механизма	449
§ 145. Приведенная и уравновешивающая сила механизма	452
§ 146. Приведенная масса и приведенный момент инерции механизма	455
§ 147. Уравнение движения механизма	459
§ 148. Периоды движения механизма	460
§ 149. Коэффициент полезного действия механизма	463
§ 150. Понятие об уравновешивании вращающихся масс	466
§ 151. Понятие об амортизации и успокоении механических систем	474

Глава 29. Понятие о регулировании скорости движения механических систем	477
§ 152. Общие задачи регулирования скорости движения	—
§ 153. Регулирование угловой скорости с помощью маховика	479
§ 154. Понятие о регуляторах скорости	481

Раздел IV

**ПЕРЕДАТОЧНЫЕ МЕХАНИЗМЫ И ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИЗМОВ
МАШИН И ПРИБОРОВ**

§ 155. Введение	484
Глава 30. Передаточные механизмы	—
§ 156. Фрикционные механизмы	—
§ 157. Общие сведения о зубчатых передачах	487
§ 158. Косозубая и шевронная передачи	497
§ 159. Коническая зубчатая передача	500
§ 160. Червячные механизмы	502
§ 161. Сложные зубчатые механизмы	507
§ 162. Редукторы	514
Глава 31. Элементы механизмов	516
§ 163. Оси и валы механизмов	—
§ 164. Опоры в механизмах	518
§ 165. Муфты, применяемые в механизмах	528
§ 166. Соединения	532

Раздел V

ГИДРОМЕХАНИКА

§ 167. Введение	537
Глава 32. Гидростатика	539
§ 168. Основные физико-механические свойства жидкостей	—
§ 169. Силы, действующие в жидкости. Гидростатическое давление и его свойства	541
§ 170. Уравнения равновесия жидкости и основное уравнение гидростатики	542
§ 171. Сила давления жидкости. Суммарное гидростатическое давление на плоские и цилиндрические поверхности	546
Глава 33. Кинематика жидкости	555
§ 172. Методы изучения движения жидкости	—
§ 173. Элементы поля скоростей	557
§ 174. Расход жидкости и уравнение неразрывности	560
§ 175. Вращательное движение жидкости	564
§ 176. Кинематические характеристики движения жидкости	566
Глава 34. Гидродинамика невязкой жидкости	568
§ 177. Уравнения движения жидкости в форме Эйлера	—
§ 178. Уравнения Бернулли, Эйлера и Лагранжа	569
§ 179. Физический смысл членов уравнения Бернулли	571
§ 180. Основные уравнения потенциального течения жидкости и методы их решения	573
§ 181. Понятие о кавитации	575

§ 182. Силы, действующие на тело при его установившемся движении в невязкой жидкости. Теорема Н. Е. Жуковского о подъемной силе	577
§ 183. Присоединенные массы, моменты инерции присоединенных масс и методы их определения для торпед, мин, ракет	579
Глава 35. Гидродинамика вязкой жидкости	583
§ 184. Вязкая жидкость. Уравнение Бернулли для вязкой жидкости	—
§ 185. Режимы движения вязкой жидкости. Критерий Рейнольдса	586
§ 186. Механическое подобие потоков жидкости. Критерии подобия	588
§ 187. Понятие о пограничном слое	589
§ 188. Главный вектор и главный момент гидродинамических сил, действующих на тело	591
§ 189. Составляющие гидродинамических сил в скоростной системе координат	592
§ 190. Сила сопротивления жидкости движению тела и ее составляющие	595
§ 191. Методы уменьшения сопротивления жидкости движению торпед, мин, ракет	598
Глава 36. Движение жидкости в трубопроводах и истечение ее через отверстия	599
§ 192. Уравнение Бернулли для потока	—
§ 193. Потери энергии потока на трение и местные сопротивления	600
§ 194. Понятие о гидравлическом расчете систем трубопроводов	602
§ 195. Истечение жидкости через отверстия и насадки	605
Глава 37. Основы газодинамики	608
§ 196. Скорость звука	—
§ 197. Уравнение Бернулли для сжимаемой жидкости	609
§ 198. Истечение газа через отверстия и сопла	611
§ 199. Понятие об ударной волне	613

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предмет «Механика» есть наука, изучающая законы механического движения и механического взаимодействия тел в различных состояниях: твердом, жидком и газообразном.

Механическим движением называется один из видов движения материи, выражающийся в изменении с течением времени взаимных положений тел или частей тела. Таким образом, механическое движение является частным случаем движения материи вообще, поскольку под движением понимают любые изменения, происходящие в материи при химических, тепловых, электромагнитных и других процессах.

Механическим взаимодействием называется один из видов взаимодействия материи, вызывающий изменение взаимного положения тел или частей тела или препятствующий такому изменению.

Механика базируется на общих законах Ньютона и использует математический аппарат для анализа наблюдений, опытов, которые и являются ее основой.

При анализе из любого явления приходится извлекать основное, отделять главное от второстепенного, т. е. создавать модель изучаемого явления, как говорят, пользоваться методом абстракций. Так, например, при изучении равновесия пользуются моделью абсолютно твердого тела, при изучении деформации полагают, что тело обладает сплошностью, т. е. не учитывают его молекулярного строения.

К числу моделей относится материальная точка — абстрактный образ твердого тела или его части, размеры которого в условиях данной задачи можно не учитывать. Так, например, положение подводной лодки на море задают долготой и широтой — координатами, определяющими положение геометрической точки на поверхности Земли.

Материальная точка отличается от геометрической тем, что в ней предполагается сосредоточенным некоторое количество вещества.

Для определения положения материальной точки или тела в пространстве вводят понятие системы отсчета.

Системой отсчета называется реальное или условное твердое тело, по отношению к которому определяется положение других тел.

Мысленно выделенная определенная совокупность материальных частиц или тел, взаимодействующих друг с другом, называется механической системой или просто системой.

Если положение точек механической системы в выбранной системе отсчета не изменяется со временем, то такое состояние механической системы называется относительным покоем. Относительный покой системы, рассматриваемой в связи с действующими на нее силами, называется относительным равновесием или просто равновесием системы.

Курс механики является одним из важнейших общетехнических предметов. Ее законы, методы исследований и выводы широко используются в ряде специальных дисциплин, связанных с движением управляемых и неуправляемых летательных аппаратов, движением тел в жидкости, работой приборов, механизмов и машин различного назначения.

При этом механика использует два способа исследования: от общих положений осуществляется переход к изучению частных случаев и от частных случаев — к обобщениям. Критерием истинности законов, выводов, обобщений являются эксперимент и практика.

В соответствии с тремя состояниями тел существует механика твердого тела, механика жидкого тела (гидромеханика) и механика газообразного тела (аэромеханика, газовая динамика). В свою очередь механика твердого тела имеет два направления: механика абсолютно твердого тела и механика деформируемого тела.

В высших военно-морских командно-инженерных учебных заведениях курс механики делят на следующие разделы: материалы механизмов и приборов, статика (абсолютно твердого и деформируемого тел), кинематика, динамика, передаточные механизмы и элементы машин и приборов и гидромеханика.

В данный учебник не включен раздел «Материалы механизмов и приборов», который издается в виде отдельного учебного пособия.

Термины, используемые в книге, даны с учетом терминологии, рекомендованной комитетом научно-технической терминологии Академии наук СССР для применения в научно-технической и учебной литературе*.

* Научно-техническая терминология. Сборник стандартизованных и рекомендуемых терминов, тт. 2, 8. М., Изд-во стандартов, 1970.

РАЗДЕЛ I

СТАТИКА

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В статике будут рассмотрены условия равновесия абсолютно твердых тел — абстрактный образ реальных тел.

Абсолютно твердым телом называется такое тело, в котором расстояния между любыми точками принимаются неизменными при любых механических взаимодействиях. Таким образом, предполагается, что форма и размеры абсолютно твердого тела при любом механическом воздействии не изменяются. В реальном теле при механическом воздействии происходит деформирование, т. е. изменение формы и размеров тела (или какой-либо его части). Однако и при исследовании деформации твердого тела вводят модель, учитывающую допущение о сплошности среды как непрерывной совокупности материальных точек, взаимные расстояния между которыми при механическом взаимодействии не остаются неизменными. Более подробно допущения, вводимые в статику деформируемого тела, будут рассмотрены ниже.

Статику твердого тела условно делят на статику абсолютно твердого тела, которую иногда называют геометрической статикой или статикой твердого тела, и статику твердого деформируемого тела.

В статике абсолютно твердого тела изучаются преобразование системы сил, приложенных к твердому телу, в системы, ей эквивалентные, и условия взаимной уравновешенности таких систем.

В статике деформируемого твердого тела:

— изучают, при каких условиях может произойти разрушение тела, т. е. решают задачу о прочности;

— устанавливают способность тела сопротивляться деформированию, т. е. решают задачу о жесткости;

— устанавливают условия, при которых деформируемое тело сохраняет свою первоначальную форму равновесия, т. е. решают задачу об устойчивости.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ. АКСИОМЫ СТАТИКИ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Основным понятием статики является сила. Силой называется мера механического воздействия на материальную частицу со стороны других материальных объектов (тел или полей), характеризующая величину и направление этого воздействия в данный момент времени.

Сила вполне определяется заданием ее величины, направления действия и точки приложения, т. е. сила является векторной величиной. Как известно из математики, векторы бывают свободные, не связанные с линией действия, скользящие вдоль линии действия и связанные с точкой приложения.

Следовательно, сила является связанным вектором. За единицу измерения величины силы принят ньютон (Н) в системе единиц СИ и килограмм-сила (кгс) в системе МКГСС. Приблизительно $1 \text{ кгс} = 9,81 \text{ Н}$. Применяют и кратные единицы силы, например килоньютон ($1 \text{ кН} = 1000 \text{ Н} = 102 \text{ кгс}$), мега-ньютон ($1 \text{ МН} = 10^6 \text{ Н} = = 1,02 \cdot 10^5 \text{ кгс}$), тонна-сила ($1 \text{ тс} = 1000 \text{ кгс} = 9810 \text{ Н} = 9,81 \text{ кН}$).

Прямую, по которой направлена сила, называют линией действия силы*.

Точка приложения силы определяется либо физическими соображениями, либо расчетом. При непосредственном соприкосновении тел сила их взаимодействия приложена в точке соприкосновения.

Силы делят на внешние и внутренние.

Внешние силы действуют между точками или телами разных систем, внутренние — между точками и телами одной и той же системы. Так, силы взаимодействия между частицами данного тела будут внутренними, а между телом и другими телами — внешними. В зависимости от выбора системы внутренние силы в одной системе могут стать внешними в другой. Например, если рассматривать систему Земля — ракета, то сила взаимодействия между ними будет внутренней. Если же рассматривать систему корпус ракеты — механизмы ракеты, сила притяжения Земли для этой системы будет внешней.

Силы принято обозначать большими буквами с черточкой сверху, например, \bar{P} , \bar{Q} , \bar{G} , а их модули (числовые значения) — без черточек P , Q , G . Задать силу можно с помощью точки ее приложения и трех проекций силы на оси x , y и z прямоугольной системы координат. Так, если обозначить единичные векторы — орты, направленные по осям x , y , z , через \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} соответственно, тогда

$$\bar{P} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k},$$

* В дальнейшем будет показано, что в некоторых случаях вектор силы можно считать скользящим.

где $X=P_x$; $Y=P_y$; $Z=P_z$ — проекции силы на оси x , y , z соответственно.

Проекции силы, как и любого вектора на оси координат, являются скалярными величинами, а \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} — составляющими данной силы. Следовательно, в общем случае составляющими данной силы называются силы, в совокупности эквивалентные данной и приложенные в одной с нею точке.

Совокупность сил, приложенных к телу, называют системой сил. Если система сил расположена в одной плоскости, она называется плоской системой сил. Свободным называется такое тело, которое имеет возможность получить некоторое перемещение в любом направлении и некоторый поворот вокруг любой оси. Если какая-либо из этих возможностей отсутствует, такое тело называется несвободным.

Примерами свободных тел являются самолет в воздухе, подводная лодка в подводном положении вдали от грунта и т. д.

Система сил называется уравновешенной или системой, эквивалентной нулю, если, будучи приложенной к свободному твердому телу, находящемуся в покое, она не выведет его из этого состояния.

Любая сила из уравновешенной системы называется уравновешивающей силой для системы оставшихся сил.

Если одну систему сил, приложенную к свободному твердому телу, не нарушая его механического состояния, можно заменить другой, то такие системы сил называются эквивалентными.

Сложением сил называют процесс замены данной системы эквивалентной — простейшей системой сил. При замене системы сил одной — эквивалентной, последняя называется равнодействующей силой.

Таким образом, в статике абсолютно твердого тела изучают законы сложения сил, приложенных к телу, и условия их равновесия.

§ 3. АКСИОМЫ СТАТИКИ

В основе учения о равновесии тел лежат некоторые положения, установленные непосредственными наблюдениями и проверенные многочисленными опытами. Эти положения — аксиомы статики — принимаются без доказательств.

Первая аксиома. Принцип инерции. Если материальная точка находится в состоянии покоя или движется прямолинейно и равномерно, то система сил, приложенных к точке, является уравновешенной*.

В частном случае все силы, приложенные к точке, могут быть порознь равны нулю. Такая материальная точка называется изолированной.

Напомним, что прямолинейным равномерным движением точки называется такое, при котором она перемещается по прямой линии

* Более подробно этот вопрос будет рассмотрен в разделе «Динамика».

и в любые равные промежутки времени проходит равные расстояния.

Вторая аксиома. Аксиома об уравновешенности двух сил. Для того чтобы две силы \vec{P}_1 и \vec{P}_2 , приложенные к свободному твердому телу, взаимно уравновешивались, необходимо и достаточно, чтобы они лежали на одной прямой, были равны по величине и направлены в противоположные стороны. Отметим, что ра-

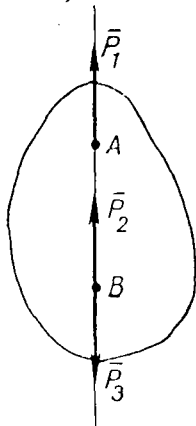


Рис. 1.1.

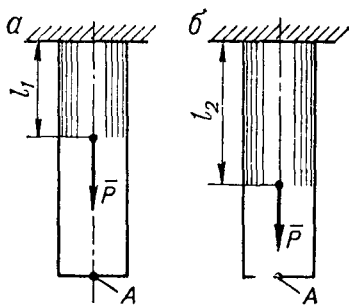


Рис. 1.2.

венство $\vec{P}_1 = -\vec{P}_2$ неполно отражает вторую аксиому, так как оно показывает лишь, что силы равны по модулю и противоположно направлены, но не утверждает, что они лежат на одной прямой. Пусть сила \vec{P}_1 — равнодействующая определенной системы сил, приложенных к твердому телу, тогда $-\vec{P}_1$, приложенная в той же точке, является уравновешивающей силой той же системы сил.

Таким образом, уравновешивающая сила всегда равна по модулю равнодействующей, направлена по той же прямой, но в противоположную сторону.

Третья аксиома. О присоединении или отбрасывании уравновешенной системы сил. Действие данной системы сил на твердое тело не изменится, если к ней добавить или из нее исключить систему взаимно уравновешивающихся сил.

Теорема. Равновесие тела не нарушается при перенесении точки приложения силы, действующей на тело вдоль линии действия силы.

Доказательство. Пусть к телу в точке A приложена (рис. 1.1) сила \vec{P}_1 . Приложим в точке B две уравновешивающиеся силы \vec{P}_2 и \vec{P}_3 , причем $|\vec{P}_1| = |\vec{P}_2| = |\vec{P}_3| = P$ и все три силы действуют по одной прямой. Тогда на основании второй аксиомы силы \vec{P}_1 и \vec{P}_3 уравновешиваются и в соответствии с третьей ак-

сионой их можно отбросить. В результате остается одна сила \vec{P}_2 , приложенная в точке B , что и требовалось доказать.

Таким образом, при исследовании условий равновесия системы сил вектор силы можно принять скользящим. Это справедливо только для абсолютно твердого тела. В упругом деформируемом теле такой перенос недопустим, так как он нарушает напряженное состояние тела. Так, в первом случае (рис. 1.2, *a*) стержень будет удлиняться за счет удлинения участка l_1 , во втором случае (рис. 1.2, *б*) — участка l_2 , т. е. при изменении точки приложения силы перемещение точки A изменяется.

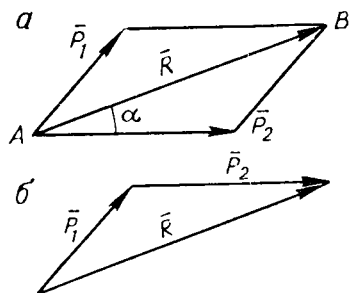


Рис. 1.3.

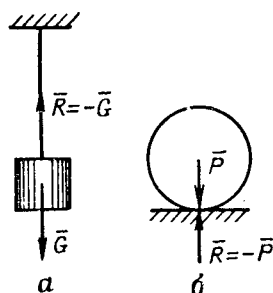


Рис. 1.4.

Четвертая аксиома. Правило параллелограмма сил. Равнодействующая двух сил, приложенных в некоторой точке тела, приложена в той же точке и изображается по величине и направлению диагональю параллелограмма, построенного на этих силах (рис. 1.3, *a*), т. е. равна их геометрической сумме (рис. 1.3, *б*).

Пятая аксиома. Принцип равенства действия и противодействия. Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие. Так, если два тела действуют друг на друга (рис. 1.4, *a* и *б*), то силы их взаимодействия всегда равны по модулю, лежат на одной прямой и противоположно направлены. Однако следует учитывать, что действие и противодействие приложены к разным телам, а потому не образуют уравновешенной системы сил.

Шестая аксиома. О равновесии нетвердых тел. Если нетвердое тело находится в равновесии под действием некоторой системы сил, то при затвердевании тела равновесие его не изменится (принцип затвердевания).

Отметим, что условия равновесия, необходимые и достаточные для твердого тела, не являются достаточными для тела нетвердого. В последнем случае для обеспечения равновесия необходимо накладывать дополнительные условия. Таким дополнительным условием, например, для гибкой нити является условие, чтобы силы, приложенные к ее концам, были бы растягивающими.

§ 4. СВЯЗИ И ВИДЫ СВЯЗЕЙ

Если тела, взаимодействующие с данным телом, ограничивают его движение, то они называются связями или опорами. В том случае, когда поверхности тел абсолютно гладкие, связи называются идеальными*. Наличие связей (опор) делает тело несвободным. Силы, с которыми тела, осуществляющие связи, действуют на данную материальную точку или данное тело, препятствуя их перемещению, называются реакциями связей. Реакция связи равна и противоположно направлена силе давления тела на связь, т. е. силе, действующей со стороны тела на опору.

Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если, мысленно отбросив все связи, заменить их действие на тело силами, геометрически равными реакциям отброшенных связей.

На рис. 1.5** представлены наиболее часто встречающиеся идеальные связи, при этом использованы следующие обозначения: A — тело, B — связь, \bar{R} — реакция связи, \bar{R}_x и \bar{R}_y — горизонтальная и вертикальная составляющие реакции связи, M_B — реактивный (опорный) момент.

Рассмотрим примеры наиболее часто встречающихся связей:

1. Связь посредством абсолютно гладкой неподвижной плоскости или поверхности (1—4).

2. Связь с помощью специальных опорных устройств:

а) шарнирно-подвижные (5—9);

в) шарнирно-неподвижные (10—16);

с) защемление (17).

3. Гибкие и стержневые линейные связи (18—20).

Связи первого типа и шарнирно-подвижные опорные устройства допускают возможность некоторого перемещения и некоторого поворота тела по отношению к связи. Предполагая, что тело не может отделиться от связи и что между ними отсутствуют силы трения, заключаем, что эти связи могут быть заменены одной реакцией связи, направленной перпендикулярно направлению возможного смещения тела по отношению к связи.

Шарнирно-неподвижные опоры, допуская возможность некоторого поворота тела по отношению к связи, не допускают смещения тела по связи. Здесь возникает в шарнире одна неизвестная по направлению реакция связи \bar{R} , которую при решении задач целесообразно представить в виде геометрической суммы составляющих, в частности для цилиндрического шарнира горизонтальной \bar{R}_x и вертикальной \bar{R}_y .

На рис. 1.5 представлены следующие типы шарнирно-неподвижных опор: неподвижные цилиндрические шарниры (10—12), цапфа-

* Более подробное определение идеальной связи будет дано в разделе «Динамика».

** Выполнен В. И. Станкевичем.

подпятник (13, 16), угол (14) — поперечными размерами стержня пренебрегают, шаровой (сферический) шарнир (15).

Сферический шарнир — связь, которая препятствует всем перемещениям одной из точек твердого тела, но не препятствует некоторому повороту вокруг любой оси, проходящей через эту точку.

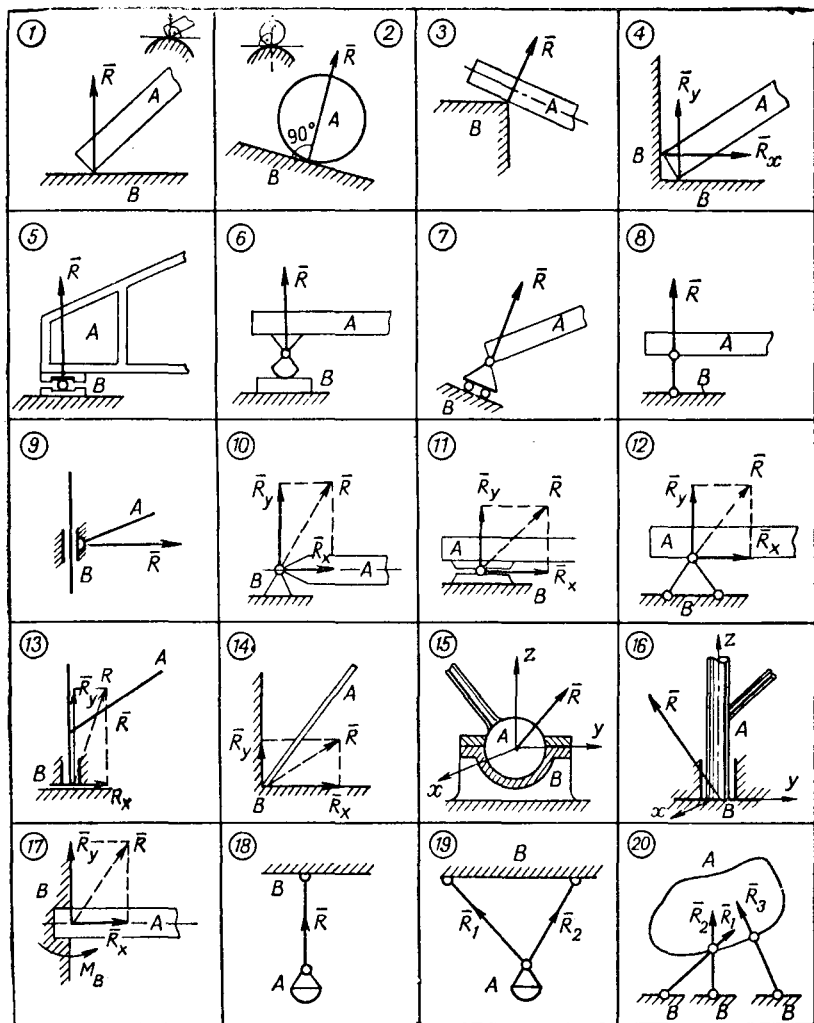


Рис. 1.5.

Жесткая заделка — защемление (17). Такой вид связи по сравнению с неподвижным шарниром налагает еще одно ограничение на тело, а именно — невозможность поворота тела по отношению к связи. Поэтому здесь кроме двух составляющих \bar{R}_x и \bar{R}_y реакции необходимо ввести еще реактивный момент M_B .

К гибким связям (18, 19) относятся тросы, канаты, цепи, ремни и др. Стержневые связи (20) осуществляются с помощью условно невесомых стержней, имеющих шарнирное соединение по концам. Отличие гибкой связи от стержневой состоит в том, что последняя препятствует перемещению тела вдоль связи (стержня) в обоих направлениях, тогда как гибкая связь препятствует перемещению тела вдоль связи в одном направлении, т. е. гибкие связи могут работать лишь на растяжение. Однако в обоих случаях реакции связей всегда направлены по направлению самих связей, а число реакций равно числу связей.

СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Совокупность сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, называется системой сходящихся сил.

Учитывая, что в соответствии с третьей аксиомой силу в абсолютно твердом теле можно переносить вдоль линии ее действия в любую точку тела, заменяем систему сходящихся сил системой

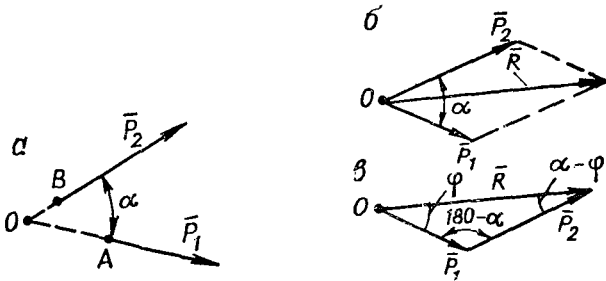


Рис. 2.1.

сил, приложенных в точке пересечения их линии действия (рис. 2.1, а).

Сложить силы — это значит заменить их одной — эквивалентной, которая называется равнодействующей (рис. 2.1, б).

Найти равнодействующую можно геометрическим или аналитическим способом.

§ 5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ СЛОЖЕНИЯ СИЛ

Равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке, в соответствии с четвертой аксиомой равна

$$\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2.$$

По правилу треугольника равнодействующая \bar{R} изображается (рис. 2.1, б) замыкающей стороной векторного треугольника, при этом его стороны \bar{P}_1 и \bar{P}_2 могут быть отложены от точки O в любой последовательности.

Модуль равнодействующей R согласно теореме косинусов определяется (рис. 2.1, в) по равенству

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 - 2P_1P_2 \cos(180^\circ - \alpha)},$$

где $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$. Следовательно,

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 \cos \alpha}. \quad (2.1)$$

Углы треугольника сил определяются по теореме синусов

$$\frac{\sin \varphi}{P_2} = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{P_1} = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{R}.$$

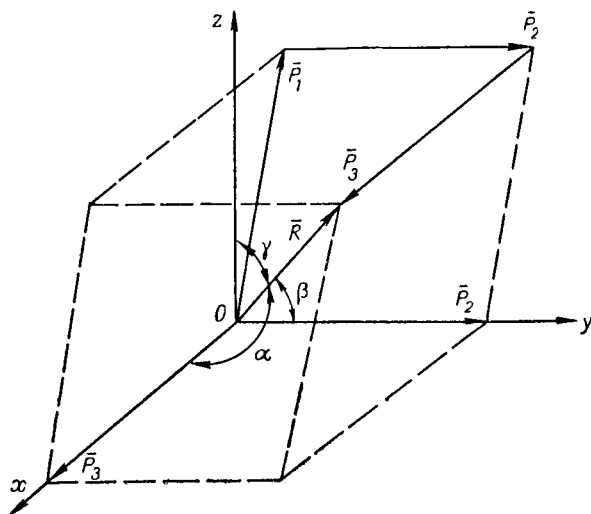


Рис. 2.2.

Правило геометрического сложения двух сил может быть распространено на любое число сил. Для этого строят многоугольник сил: от конца вектора \vec{P}_1 откладывают вектор \vec{P}_2 , затем от конца \vec{P}_2 — вектор \vec{P}_3 и т. д. Замыкающая сторона векторного многоугольника является равнодействующей системы сил и равна

$$\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \dots + \vec{P}_n = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i, \quad (2.2)$$

где n — число сил, сходящихся в одной точке.

Уравнение (2.2) справедливо как для плоской, так и для пространственной системы сходящихся сил.

Равнодействующая системы сходящихся сил равна геометрической сумме (главному вектору) этих сил и точка ее приложения совпадает с точкой пересечения линий действия слагаемых сил.

На рис. 2.2 показан частный случай определения равнодейст-

вующей трех сходящихся сил, не лежащих в одной плоскости. Равнодействующая может быть определена в соответствии с векторным равенством (2.2) или как диагональ параллелепипеда, в котором слагаемые силы направлены вдоль соответствующих ребер параллелепипеда.

Для пространственной системы сходящихся сил геометрический способ определения равнодействующей не удобен.

§ 6. АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАВНОДЕЙСТВУЮЩЕЙ

Из математики известно, что проекция вектора на ось является скалярной величиной. Обозначим проекции силы \vec{P}_i на оси прямоугольной системы координат x, y, z соответственно X_i, Y_i, Z_i ; при этом проекция будет положительной, когда направление от начала проекции к ее концу совпадает с положительным направлением оси.

Проекция равнодействующей на оси прямоугольной системы координат по теореме о проекции геометрической суммы определяются равенствами:

$$R_x = \sum_{i=1}^n X_i; \quad R_y = \sum_{i=1}^n Y_i; \quad R_z = \sum_{i=1}^n Z_i,$$

где n — число сходящихся сил, а сумма проекций, например на ось x , будет $R_x = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Величина равнодействующей системы сходящихся сил определяется согласно формуле

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \quad (2.3)$$

а ее направление — направляющими косинусами:

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}; \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}; \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R}. \quad (2.4)$$

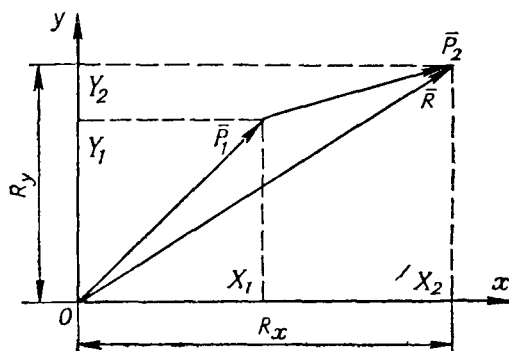


Рис. 2.3.

Для плоской системы сходящихся сил (рис. 2.3)

$$R_x = \sum_{i=1}^n X_i; \quad R_y = \sum_{i=1}^n Y_i; \quad R_z = \sum_{i=1}^n Z_i = 0 \quad \text{и} \quad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}. \quad (2.5)$$

Отметим, что сила \bar{P} может быть представлена в общем случае в виде трех составляющих, направленных по трем взаимно перпендикулярным осям x , y , z , и тогда $\bar{P} = \bar{P}_x + \bar{P}_y + \bar{P}_z$. Таким образом, составляющие вектора — векторные величины, а проекции вектора на оси — величины скалярные.

§ 7. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Необходимым и достаточным условием равновесия системы сходящихся сил является равенство нулю ее равнодействующей

$$\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \dots + \bar{P}_n = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i = 0. \quad (2.6)$$

Из полученного равенства (2.6) следует, что многоугольник сил должен быть замкнут: конец последнего вектора \bar{P}_n должен совпасть с началом первого вектора \bar{P}_1 (геометрическое условие равновесия).

В частном случае, когда система состоит из трех сходящихся сил, необходимым и достаточным геометрическим условием равновесия является замкнутость треугольника сил.

Учтем, что, если

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0,$$

тогда должно быть равно нулю каждое слагаемое подкоренного выражения

$$R_x = \sum_{i=1}^n X_i = 0; \quad R_y = \sum_{i=1}^n Y_i = 0; \quad R_z = \sum_{i=1}^n Z_i = 0. \quad (2.7)$$

Таким образом, для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил на каждую из трех осей прямоугольной системы координат порознь была равна нулю (аналитические условия равновесия).

В частном случае плоской системы сходящихся сил, расположенных в плоскости Oxy , уравнения равновесия будут иметь вид

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0; \quad \sum_{i=1}^n Y_i = 0. \quad (2.8)$$

Третье уравнение равновесия $\sum_{i=1}^n Z_i = \sum_{i=1}^n 0 = 0$ обращается в тождество.

Если в задаче число неизвестных не превышает числа независимых уравнений равновесия, то такая задача называется статически определенной. Если же число неизвестных больше числа уравнений равновесия, задача называется статически неопределенной и может быть решена при рассмотрении упругих свойств системы. Эта задача будет рассмотрена в статике деформируемого тела.

Методические указания к решению задач статики на равновесие

Рассмотрим систему взаимодействующих тел, находящуюся в равновесии. Тогда на любое тело этой системы действует уравновешенная система сил, часть из которых может быть неизвестна. Неизвестные силы должны быть выражены через известные, для чего следует использовать уравнения равновесия.

Рекомендуемая последовательность решения задач статики на равновесие:

— выбрать тело (объект), равновесие которого будет рассмотрено для определения неизвестных;

— установить и показать в виде векторов на чертеже все активные (заданные) силы, действующие на тело;

— освободить (мысленно) от связей тело и заменить их действия на тело силами — реакциями связей; показать их на чертеже векторами и обозначить буквами; если же направление какой-либо реакции неизвестно, представить ее через составляющие по осям прямоугольной системы координат;

— выбрать один из трех способов решения задач: геометрический, графоаналитический или аналитический.

При геометрическом способе решения строят в выбранном масштабе многоугольник сил, который должен быть замкнут. Далее измеряют величины неизвестных векторов, умножают их на масштаб построений и получают истинную величину неизвестных. Неизвестные углы определяются непосредственно по чертежу.

При графоаналитическом способе решения неизвестные определяются из построенного многоугольника (или треугольника) сил путем вычислений с использованием тригонометрии и геометрии.

При аналитическом, наиболее универсальном, способе решения необходимо:

— выбрать систему координат и показать ее на чертеже;

— составить уравнения равновесия (2.7);

— решить полученную систему уравнений и определить неизвестные.

Оси координат следует выбирать так, чтобы они были перпендикулярны линиям действия неизвестных сил, тогда уравнения равновесия будут содержать меньше неизвестных. Если в результате решения уравнений равновесия реакция связи будет отрица-

тельна, это будет означать, что действительное ее направление будет обратно принятому на чертеже.

Пример. По гладкой плоскости, наклоненной к горизонту под углом α , с постоянной скоростью поднимают изделие весом G (рис. 2.4). Определить силу давления \bar{Q} на плоскость и силу, требуемую для поднятия изделия $\bar{P}_{дв}$, считая, что трение отсутствует и линия действия $\bar{P}_{дв}$ параллельна наклонной плоскости.

Решение. Объект, равновесие которого будет рассмотрено, — изделие весом G . Для решения сделаем следующее.

Освобождаем тело от связи — наклонной плоскости, заменяя ее действие силой — реакцией связи \bar{N} .

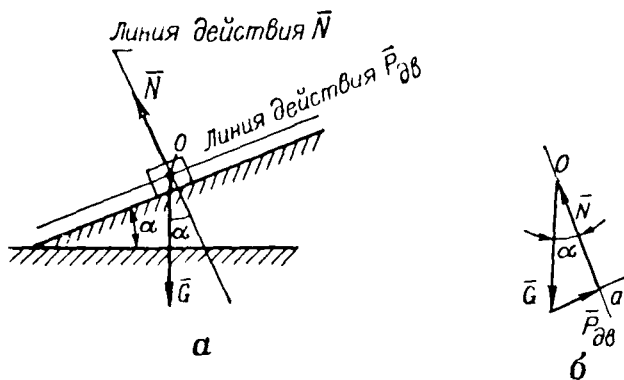


Рис. 2.4.

Устанавливаем, что на тело действуют три силы, лежащие в одной плоскости: сила тяжести \bar{G} , движущая сила $\bar{P}_{дв}$ и реакция \bar{N} со стороны наклонной плоскости; из трех сил известна (по величине и направлению) только \bar{G} .

Устанавливаем линии действия сил $\bar{P}_{дв}$ и \bar{N} .

Выбираем точку O вне схемы и проводим в выбранном масштабе известный вектор \bar{G} .

Проводим через точку O линию действия силы \bar{N} , а через конечную точку вектора \bar{G} — линию действия $\bar{P}_{дв}$. Точка их пересечения a определяет величину и направление неизвестных сил \bar{N} и $\bar{P}_{дв}$.

Направления векторов определяются из условия, чтобы треугольник сил был замкнут. Величину неизвестных векторов определяем графоаналитически. Из силового треугольника следует, что

$$\begin{aligned} P_{дв} &= G \sin \alpha; \\ N &= G \cos \alpha. \end{aligned}$$

Силы давления на плоскость \bar{Q} и реакция наклонной плоскости \bar{N} равны по модулю, действуют по одной прямой, но направлены в противоположные стороны.

Если все построения выполнены в масштабе, то задача может быть решена графически, т. е. непосредственным измерением векторов с последующим учетом масштаба. Однако графический способ дает погрешность значительно большую, чем аналитический, и им обычно не пользуются.

Часто при решении задач возникают затруднения, связанные с определением направления линий действия сил. Тогда в некоторых случаях следует использовать вторую аксиому статики и теорему о трех непараллельных силах.

§ 8. ТЕОРЕМА О ТРЕХ НЕПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛАХ

Теорема. Если тело находится в равновесии под действием трех сил, из которых линии действия двух пересекаются в некоторой точке, то линия действия третьей проходит через ту же точку и все силы лежат в одной плоскости.

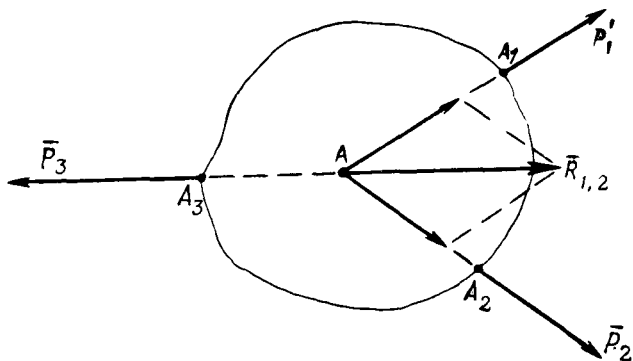


Рис. 2.5.

Доказательство. Пусть на тело, находящееся в равновесии, действуют три силы: \vec{P}_1 , \vec{P}_2 и \vec{P}_3 (рис. 2.5), приложенные соответственно в точках A_1 , A_2 и A_3 . Равнодействующая $\vec{R}_{1,2} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$ приложена в точке пересечения линий их действия, т. е. в точке A. Для того чтобы тело находилось в равновесии, необходимо, чтобы силы $\vec{R}_{1,2}$ и \vec{P}_3 уравновешивались, что будет возможно, если они равны по модулю и действуют по одной прямой, но в противоположные стороны. Следовательно, линия действия \vec{P}_3 проходит тоже через точку A и все три силы лежат в одной плоскости (плоскости параллелограмма), что и требовалось доказать.

Пример. Ракета в данный момент времени имеет вес $G = 20$ кН, движется по прямой CA (рис. 2.6), составляющей угол $\beta = 25^\circ$ с горизонтом. Сила тяги $T = 10$ кН направлена по прямой CB, составляющей угол $\alpha = 5^\circ$ с направлением движения ракеты. Определить величину равнодействующей сил сопротивления (аэродинамических сил) Q и угол γ , составляемый ею с направлением движения в данный момент времени.

Решение. Объект, равновесие которого мы рассматриваем, — ракета. Решаем задачу графоаналитически.

Из произвольной точки O откладываем вниз в выбранном масштабе силу \vec{G} .

Проводим из конца вектора силы \vec{G} линию, параллельную линии действия тяги CB, откладываем на этой линии в принятом масштабе силу \vec{T} .

Соединяем конец вектора \vec{T} с началом вектора \vec{G} , таким образом, замыкаем треугольник сил, из которого находим величину и направление искомого вектора \vec{Q} .

Определяем из треугольника сил, что

$$Q = \sqrt{G^2 + T^2 - 2GT \cos [90^\circ - (\alpha + \beta)]}.$$

Подставляя числовые значения, находим

$$Q = \sqrt{20^2 + 10^2 - 2 \cdot 20 \cdot 10 \sin (25^\circ + 5^\circ)} = 10 \sqrt{3} \approx 17,3 \text{ кН}.$$

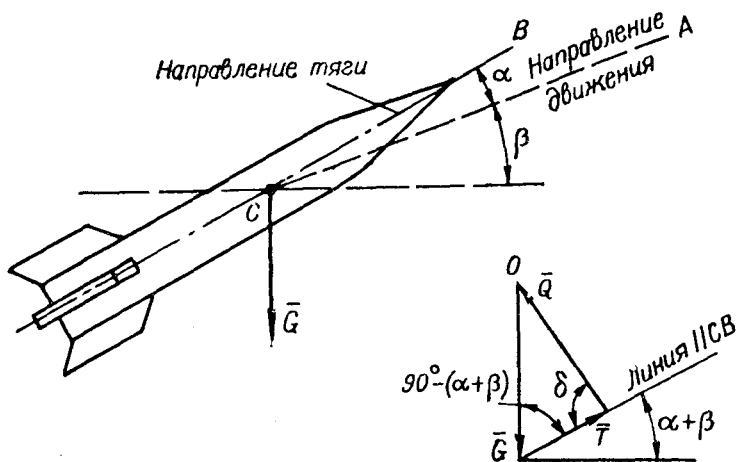


Рис. 2.6.

Для определения угла γ используем теорему синусов

$$\frac{G}{\sin \delta} = \frac{Q}{\sin [90^\circ - (\alpha + \beta)]},$$

откуда

$$\sin \delta = \frac{G}{Q} \cos (\alpha + \beta) = \frac{20}{10 \sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,$$

т. е. угол $\delta = 90^\circ$.

Следовательно, искомый угол γ будет равен

$$\gamma = \delta + \alpha = 90^\circ + 5^\circ = 95^\circ.$$

Пример. Груз весом G поднимается корабельным краном (рис. 2.7) с постоянной скоростью. Определить величину реакций \vec{N}_A , \vec{N}_B , \vec{N}_C .

Решение. Объект, равновесие которого мы рассматриваем, — узел D .

Освобождаем тело-блок D от связей-стержней и заменяем их действие реакциями связей \vec{N}_A , \vec{N}_B , \vec{N}_C .

Устанавливаем, что на тело действуют пять сил: три реакции \vec{N}_A , \vec{N}_B , \vec{N}_C , сила тяжести груза \vec{G} и натяжение троса, перекинутого через блок \vec{P} .

Учтем, что, если пренебречь трением троса и блока, тогда $P = G$. Решаем задачу аналитически.

Проводим неподвижную систему координат $Oxyz$. Составляем уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^5 X_i = N_B \cos \alpha - N_A \cos \alpha = 0, \text{ откуда } N_A = N_B; \quad (a)$$

$$\sum_{i=1}^5 Y_i = -2N_A \sin \alpha - P \sin \beta + N_C \sin \beta = 0; \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^5 Z_i = -G - P \cos \beta + N_C \cos \beta = 0, \text{ откуда } N_C = \frac{G + P \cos \beta}{\cos \beta} \text{ или}$$

$$N_C = G \frac{1 + \cos \beta}{\cos \beta}. \quad (b)$$

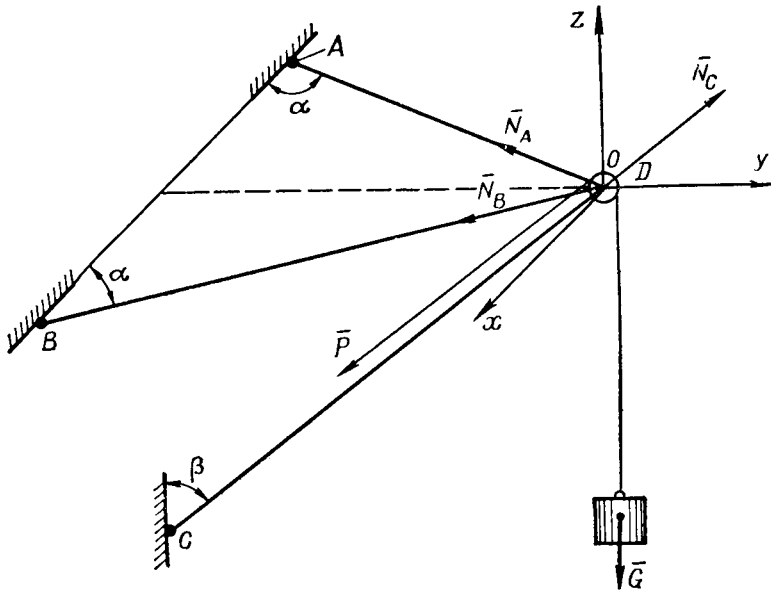


Рис. 2.7.

Из уравнения (6) определяем N_A , используя значение N_C .

$$N_A = \frac{N_C \sin \beta - P \sin \beta}{2 \sin \alpha} = \frac{G \frac{1 + \cos \beta}{\cos \beta} \sin \beta - P \sin \beta}{2 \sin \alpha} \text{ или, так как } G = P,$$

$$N_A = \frac{G \sin \beta}{2 \cos \beta \sin \alpha} = \frac{G \cdot \operatorname{tg} \beta}{\sin \alpha}.$$

§ 9. ПОНЯТИЕ О ТРЕНИИ СКОЛЬЖЕНИЯ

При движении одного не абсолютно гладкого тела по поверхности другого также не абсолютно гладкого тела между ними возникает сила трения, препятствующая движению.

Проведем следующий опыт (рис. 2.8, а). К телу A весом G присоединим трос, перекинутый через блок B , в конце которого подвесим груз весом Q . Трением в блоке пренебрегаем. Система будет находиться в покое, пока силу тяжести \bar{Q} уравновешивает сила натяжения троса, по величине равная силе трения покоя \bar{F}_n .

При увеличении веса груза до значения Q_1 наступит момент, когда груз A начнет двигаться. В этот момент сила трения покоя максимальна и по величине равна Q_1 .

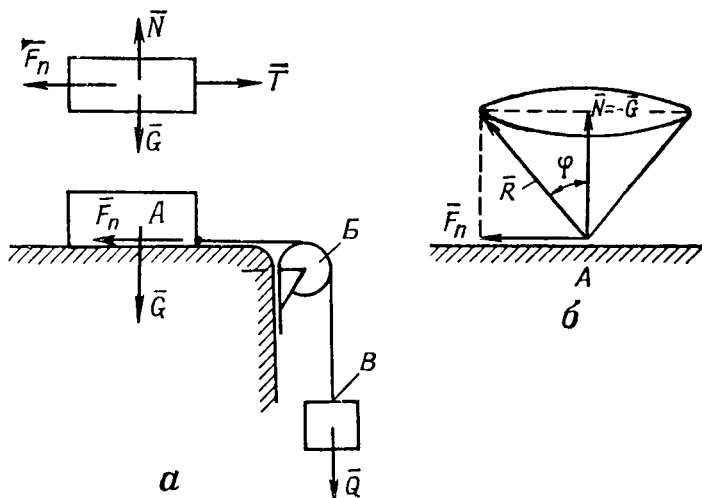


Рис. 2.8.

Следовательно, величина силы трения покоя может принимать значение от 0 до максимального F_{\max} , соответствующего началу скольжения. Впервые исследование трения проводил Леонардо да Винчи (1452—1519 гг.). В конце XVIII века Кулон (1736—1806 гг.) продолжил эти исследования и сформулировал закон сухого трения: величина силы сухого трения пропорциональна нормальному давлению трущихся поверхностей.

Сила трения при покое удовлетворяет условию

$$F_n < f_n N; \quad (F_n)_{\max} = f_n N_{\max} \quad \text{или} \quad f_n = \frac{(F_n)_{\max}}{N_{\max}}, \quad (2.9)$$

где N — нормальное давление;

f_n — безразмерный коэффициент — коэффициент трения покоя, или коэффициент статического трения.

Коэффициент статического трения — безразмерная величина, равная максимальному значению отношений модулей касательной и нормальной составляющих реакций одного тела на другое при равновесии $\left(f_n = \frac{F_{\max}}{N}\right)$. Коэффициент статического тре-

ния $f_{\text{п}}$ зависит от материала и качества обработки трущихся поверхностей, влажности, температуры и других факторов.

Рассмотрим скольжение тел, т. е. относительное движение соприкасающихся тел, при котором точки соприкосновения одного тела движутся с разными (отличными от нулевых) скоростями относительно точек соприкосновения другого тела.

При скольжении возникает сила трения скольжения — мера противодействия возможному скольжению тела по опорной поверхности, возникающему в точках их соприкосновения. Эта сила является касательной составляющей реакции опорной поверхности.

Величина силы трения скольжения при относительном перемещении тела определяется по формуле

$$F_{\text{ск}} = f_{\text{ск}} N. \quad (2.10)$$

Коэффициент трения скольжения — безразмерная величина, равная отношению модуля силы трения скольжения к модулю нормальной составляющей реакции опорной поверхности на скользящее по ней тело.

Коэффициент трения скольжения $f_{\text{ск}}$ несколько меньше $f_{\text{п}}$, зависит дополнительно от относительной скорости скольжения и для большого числа материалов уменьшается с увеличением скорости.

Значения коэффициентов трения $f_{\text{п}}$ и $f_{\text{ск}}$ приводятся в технических справочниках.

Из построений, выполненных на рис. 2.8, б, следует, что при наличии силы трения полная реакция \bar{R} , действующая на тело, направлена под некоторым углом φ к нормали к поверхности. Угол φ_{max} называется углом трения. Угол трения может быть определен из равенства

$$\text{tg } \varphi_{\text{max}} = \frac{(F_{\text{п}})_{\text{max}}}{N} = f_{\text{п}}, \quad (2.11)$$

откуда

$$\varphi_{\text{max}} = \text{arctg } f_{\text{п}}. \quad (2.11a)$$

Если состояние трущихся поверхностей во всех направлениях одинаково, то величина силы трения $F_{\text{п}}$, величина реакции R и угол φ не будут зависеть от направления движения тела.

Поверхность, образованная геометрическим местом прямых линий R , проведенных из точки A под углом φ_{max} к нормали, называется конусом трения.

Полная реакция располагается внутри или в крайнем случае на поверхности конуса трения, когда угол φ достигает предельного значения φ_{max} .

Пример. По негладкой плоскости, наклоненной к горизонту под углом α , поднимают груз весом G . Определить силу $\bar{P}_{\text{дв}}$, требуемую для поднятия груза с постоянной скоростью, если линия действия $\bar{P}_{\text{дв}}$ параллельна наклонной плоскости и $f_{\text{ск}}$ задан. Какую силу $\bar{P}_{\text{п}}$ нужно приложить, чтобы удержать груз

в покое, если $f_{\text{п}}$ задан? Каков должен быть угол α , чтобы груз свободно лежал на наклонной плоскости? (рис. 2.9).

Решение. Объект, равновесие которого рассматриваем, — груз.

Выбираем начало прямоугольных координат в точке O (рис. 2.9, а). Рассматриваем плоскую систему сходящихся сил. Записываем условия равновесия в аналитической форме:

$$\begin{aligned}\sum X_i &= P_{\text{дв}} - F_{\text{ск}} - G \sin \alpha = 0; \\ \sum Y_i &= N - G \cos \alpha = 0.\end{aligned}$$

Из второго условия следует, что $N = G \cos \alpha$. Из первого (с учетом второго)

$$P_{\text{дв}} = F_{\text{ск}} + G \sin \alpha = N f_{\text{ск}} + G \sin \alpha = G \cos \alpha f_{\text{ск}} + G \sin \alpha$$

или

$$P_{\text{дв}} = G (f_{\text{ск}} \cos \alpha + \sin \alpha). \quad (2.12)$$

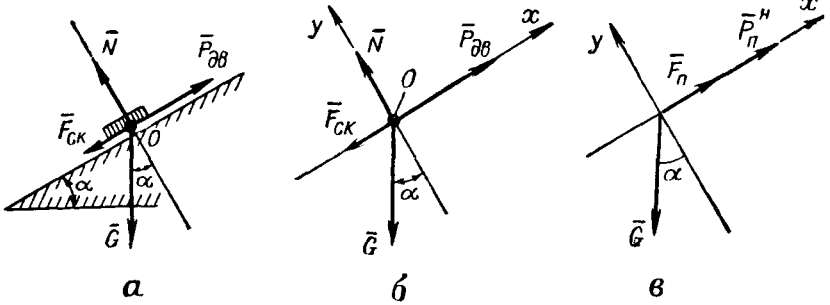


Рис. 2.9.

Для того чтобы удерживать груз в покое, нужно приложить силу $\bar{P}_{\text{п}}$. Она может изменяться по величине в пределах:

а) Верхнее значение до начала движения вверх. В уравнение (2.12) вместо $f_{\text{ск}}$ подставим $f_{\text{п}}$

$$P_{\text{п}}^{\text{в}} \leq G (f_{\text{п}} \cos \alpha + \sin \alpha). \quad (2.13)$$

б) Нижнее значение до начала движения вниз (рис. 2.9, в)

$$P_{\text{п}}^{\text{н}} \geq G (-f_{\text{п}} \cos \alpha + \sin \alpha). \quad (2.14)$$

Следовательно, отношение величин удерживающей силы к силе веса груза может изменяться в пределах

$$-f_{\text{п}} \cos \alpha + \sin \alpha \leq \frac{P}{G} \leq f_{\text{п}} \cos \alpha + \sin \alpha. \quad (2.15)$$

в) При отсутствии удерживающей силы $\bar{P}_{\text{п}}^{\text{н}} = 0$ груз будет в покое, если

$$-f_{\text{п}} \cos \alpha + \sin \alpha = 0$$

или с учетом (2.8)

$$f_{\text{п}} = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi_{\text{max}}.$$

Следовательно, тело будет находиться в покое на негладкой наклонной плоскости до тех пор, пока $\alpha \leq \varphi_{\text{max}}$ (условие самоторможения).

ГЛАВА 3

ТЕОРИЯ ПАР СИЛ

§ 10. ПАРА СИЛ. МОМЕНТ ПАРЫ

Парой сил (кратко — парой) называется совокупность приложенных к одному и тому же телу двух равных по модулю параллельных друг другу, но противоположно направленных сил \vec{P}_1 и \vec{P} (рис. 3.1).

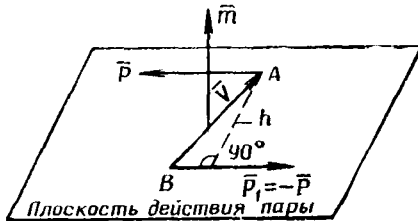


Рис. 3.1.

Плоскостью действия пары называют плоскость, в которой расположена пара, а плечом пары — кратчайшее расстояние h между линиями действия сил пары. Пара сил, приложенная к твердому телу, стремится вызвать его вращение.

Момент пары определяется как мера механического воздействия на тело, выражающаяся вектором, по величине равным произведению силы на плечо пары и направленным по перпендикуляру к плоскости действия пары в ту сторону, откуда вращение пары представляется происходящим против хода часовой стрелки.

Таким образом, момент пары определяется как вектор \vec{m} , равный векторному произведению радиуса-вектора \vec{r} , соединяю-

щего точки приложения сил пары, на вектор силы, составляющий пару*:

$$\vec{m} = \vec{r} \times \vec{P}. \quad (3.1)$$

Модуль момента пары

$$|\vec{m}| = P \cdot r \cdot \sin(\vec{r}, \hat{P}) = Ph, \quad (3.2)$$

где h — плечо пары.

Величина момента пары выражается в Н·м в системе СИ и в кгс·м в системе МКГСС. Применяются и кратные единицы измерения, как, например, кН·м, МН·м, кгс·см.

Геометрическая сумма сил, составляющих пару, равна нулю. Однако, будучи приложена к изолированному телу, она изменит состояние его покоя или движения, т. е. пара сил является неуравновешенной системой сил.

Таким образом, силы, составляющие пару, не находятся в равновесии, не имеют равнодействующей и не могут быть заменены одной силой.

§ 11. ТЕОРЕМЫ ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПАР

Основное свойство пар заключается в том, что, не нарушая равновесия или иного механического состояния тела, всегда можно заменить данную пару другой в том случае, если их моменты геометрически равны. Условия замены одной пары другой называются условиями эквивалентности пар сил.

Первая теорема. Не нарушая механического состояния тела, данную пару, действующую на тело, можно перенести в любое положение в плоскости ее действия.

Доказательство. Дана пара сил, у которой $|\vec{P}_1| = |\vec{P}_2| = P$ и плечо равно h (рис. 3.2).

Продолжим линии действия сил \vec{P}_1 и \vec{P}_2 . Выбираем на первой из них точку A (рис. 3.2) и проводим через нее прямую I . На расстоянии h от точки A проводим прямую II , параллельную прямой I , которая определит положение точки B .

Вдоль линии I в точке A прикладываем две взаимно уравновешивающиеся силы $|\vec{P}_3| = |\vec{P}_4| = P$ и соответственно в точке B силы $|\vec{P}_5| = |\vec{P}_6| = P$. Складывая силы \vec{P}_1 и \vec{P}_4 , получим равнодействующую $\vec{R}_{1,4}$. Затем, складывая силы \vec{P}_2 и \vec{P}_5 , получим $\vec{R}_{2,5}$. Равнодействующие $\vec{R}_{1,4}$ и $\vec{R}_{2,5}$ направлены по диагонали ромба навстречу друг другу и взаимно уравновешиваются. Оставшуюся силу \vec{P}_3 переносим вдоль линии ее действия в точку C , соответственно вторую оставшуюся силу \vec{P}_6 — в точку D . Следовательно, пара сил без нарушения механического состояния

* В дальнейшем будет показано, что вектор \vec{m} свободный.

тела перенесена из положения a в положение b , т. е. теорема доказана.

При переносе данной пары сил в любое другое положение в плоскости ее действия получаем пару сил, эквивалентную данной.

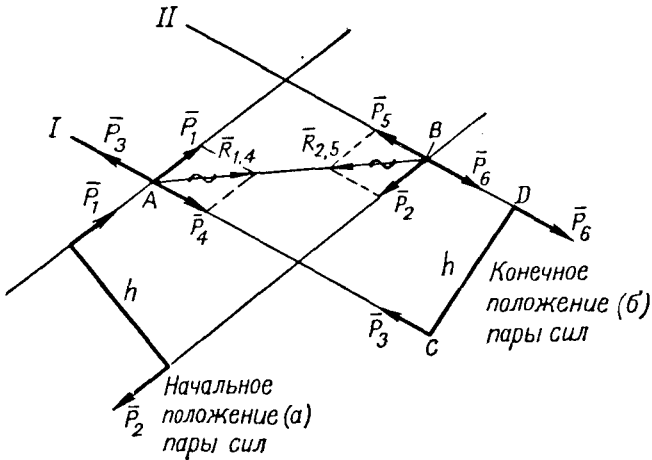


Рис. 3.2.

Вторая теорема. Пару сил, не изменяя ее действия на твердое тело, можно переносить в любую плоскость, параллельную плоскости действия пары.

Доказательство. Пусть плоскость I — плоскость действия пары (\vec{P}_1, \vec{P}_2) (рис. 3.3). В плоскости II , параллельной плоскости I , рассмотрим отрезок A_1B_1 , равный и параллельный отрезку AB . Приложим в точках A_1 и B_1 четыре попарно уравновешенные силы $\vec{P}_3 = -\vec{P}_3'$ и $\vec{P}_4 = -\vec{P}_4'$, каждая из которых по модулю равна силам $P_1 = P_2$ и линии действия которых параллельны (рис. 3.3). Фигура ABA_1B_1 является параллелограммом, у которого точка C — точка пересечения диагоналей. Складываем силы $\vec{P}_1 + \vec{P}_3 = \vec{R}_1'$ и $\vec{P}_2 + \vec{P}_4 = \vec{R}_1$. Равнодействующие \vec{R}_1' и \vec{R}_1 приложены к точке C , равны по модулю, лежат на одной прямой и направлены в противоположные стороны. Поэтому они взаимно уравновешены. Отбросим их. Таким образом, не нарушая равновесия, пара (\vec{P}_1, \vec{P}_2)

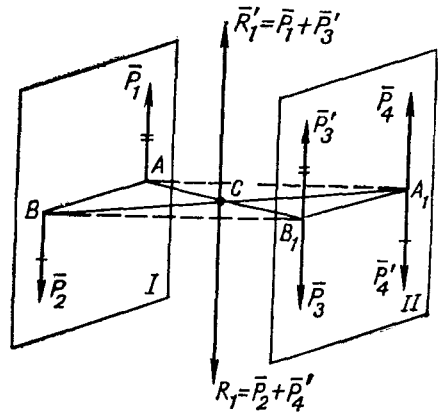


Рис. 3.3.

заменена эквивалентной парой (\bar{P}_3, \bar{P}_4) , лежащей в плоскости II , параллельной плоскости I .

Можно доказать, что две пары эквивалентны, если моменты их геометрически равны.

Таким образом, не изменяя действия пары сил на тело, в паре сил можно менять силы и плечо, но так, чтобы момент пары оставался постоянным.

Вектор пары является свободным вектором, его можно строить в любой точке плоскости действия пары.

§ 12. СЛОЖЕНИЕ ПАР. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ ПАР СИЛ

Вначале покажем, что две пары сил, лежащих в пересекающихся плоскостях (плоскости I и II на рис. 3.4, а), эквивалентны одной паре, момент которой равен геометрической сумме моментов составляющих пар сил.

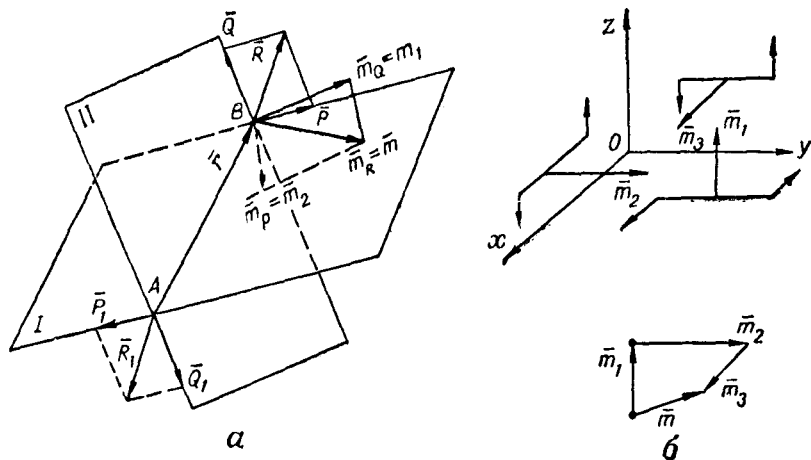


Рис. 3.4.

В пересекающихся плоскостях I и II действуют соответственно пары \bar{m}_1 и \bar{m}_2 . Приводим их к одинаковому плечу, равному длине AB (рис. 3.4), и соответственно к силам $|\bar{Q}| = |\bar{Q}_1|$ и $|\bar{P}| = |\bar{P}_1|$. Тогда, принимая, что $A\bar{B} = \bar{r}$, запишем:

$$\bar{m}(\bar{Q}) = \bar{r} \times \bar{Q}; \quad \bar{m}(\bar{P}) = \bar{r} \times \bar{P}. \quad (3.3)$$

Складываем силы составляющих пар в точке B

$$\bar{R} = \bar{Q} + \bar{P}. \quad (3.4)$$

Умножая и левую и правую часть равенства слева на радиус-вектор, получим

$$\bar{r} \times \bar{R} = \bar{r} \times \bar{Q} + \bar{r} \times \bar{P}.$$

Следовательно,

$$\bar{m}(\bar{R}) = \bar{m}(\bar{Q}) + \bar{m}(P)$$

или

$$\bar{m} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2. \quad (3.5)$$

Теорема справедлива для любого количества пар. Таким образом, для сложения n пар, лежащих в пересекающихся плоскостях, достаточно геометрически сложить их моменты

$$\bar{m} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \bar{m}_3 + \dots + \bar{m}_n = \sum_{i=1}^n \bar{m}_i. \quad (3.6)$$

Очевидно, плоскость действия эквивалентной (равнодействующей) пары перпендикулярна вектору \bar{m} (рис. 3.4, б).

В том случае, когда составляющие пары лежат в одной или параллельных плоскостях, геометрическая сумма в равенстве (3.6) может быть заменена алгебраической:

$$m = \sum_{i=1}^n m_i. \quad (3.7)$$

Равновесие системы пар сил, расположенных как угодно в пространстве, будет тогда, когда момент эквивалентной (равнодействующей) пары равен нулю, т. е. когда

$$\sum_{i=1}^n \bar{m}_i = 0. \quad (3.8)$$

Таким образом, необходимым и достаточным условием равновесия системы пар, как угодно расположенных в пространстве и приложенных к одному и тому же телу, является равенство нулю геометрической суммы моментов всех пар системы (многочлен векторов пар должен быть замкнут).

В том случае, когда система пар лежит в одной или параллельных плоскостях, необходимым и достаточным условием равновесия системы пар будет равенство нулю алгебраической суммы моментов пар системы:

$$m = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n = \sum_{i=1}^n m_i = 0. \quad (3.9)$$

ГЛАВА 4
ПРОИЗВОЛЬНАЯ СИСТЕМА СИЛ

§ 13. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ (ПОЛЮСА)

Мера механического воздействия, учитывающая положение силы по отношению к данной точке, характеризуется особой механической величиной, называемой моментом силы относительно точки.

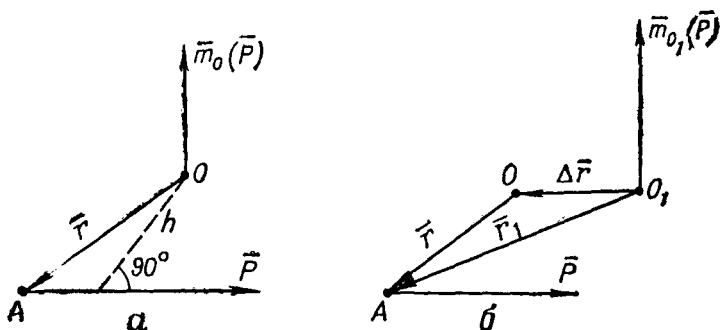


Рис. 4.1.

Момент силы относительно некоторой точки O (полюса) определяется как вектор, приложенный в полюсе и равный векторному произведению радиуса-вектора точки приложения силы относительно полюса на вектор силы (рис. 4.1, а):

$$\vec{m}_0(\vec{P}) = \vec{r} \times \vec{P}. \quad (4.1)$$

Численное значение момента будет

$$|\vec{m}_0(\vec{P})| = P \cdot r \cdot \sin(\widehat{r, P}) = P \cdot h, \quad (4.2)$$

где $h = r \cdot \sin(\widehat{r, P})$ — плечо силы относительно точки, равное длине перпендикуляра, опущенного из полюса на линию действия силы (расстояние точки до линии действия силы).

Таким образом, моментом силы относительно точки (полюса) называется вектор, приложенный в полюсе, по величине равный

произведению силы на плечо, направленный по перпендикуляру к плоскости, содержащей силу и полюс, в ту сторону, откуда вращение тела силой вокруг полюса представляется происходящим против хода часовой стрелки.

Численная величина момента $P \cdot h$ выражается в системе СИ Н·м, кН·м и т. д., в системе МКГСС — кгс·м, кгс·см. Момент силы $\bar{m}_0(\bar{P})$ равен нулю, когда $h=0$, т. е. когда линия действия силы проходит через полюс.

Если положение полюса будет изменено, тогда момент силы относительно нового полюса O_1 (рис. 4.1, б) можно определить по формуле

$$\bar{m}_{0_1}(\bar{P}) = \bar{r}_1 \times \bar{P} = (\bar{r} + \Delta\bar{r}) \times \bar{P} = \bar{r} \times \bar{P} + \Delta\bar{r} \times \bar{P}$$

или

$$\bar{m}_{0_1}(\bar{P}) = \bar{m}_0(\bar{P}) + \Delta\bar{r} \times \bar{P}, \quad (4.3)$$

где $\Delta\bar{r} \times \bar{P}$ — момент силы, приложенной в старом полюсе O , относительно нового O_1 .

Две силы эквивалентны, когда равны их векторы и моменты по отношению к одному и тому же полюсу.

Теорема Вариньона*. Момент равнодействующей двух сходящихся сил относительно точки, лежащей в плоскости их действия, равен геометрической сумме моментов слагаемых сил относительно той же точки.

Доказательство. По определению $\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2$

$$\bar{m}_0(\bar{R}) = \bar{r} \times \bar{R} = \bar{r} \times (\bar{P}_1 + \bar{P}_2) = \bar{r} \times \bar{P}_1 + \bar{r} \times \bar{P}_2$$

или

$$\bar{m}_0(\bar{R}) = \bar{m}_0(\bar{P}_1) + \bar{m}_0(\bar{P}_2),$$

что и требовалось доказать.

Эта теорема может быть распространена на любую систему n сил, имеющих равнодействующую, для которой можно записать

$$\bar{m}_0(\bar{R}) = \sum_{i=1}^n \bar{m}_0(\bar{P}_i). \quad (4.4)$$

§ 14. ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ДАННОМУ ЦЕНТРУ. ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР И ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ

При рассмотрении третьей аксиомы статики (стр. 16) было установлено, что, не нарушая равновесия или иного механического состояния тела, силу, действующую на абсолютно твердое тело, можно переносить в любую точку по линии действия силы.

* Вариньон П.— французский математик и механик (1654—1722 гг.).

Рассмотрим случай, когда точка (или центр) приведения не находится на линии действия силы. Тогда, как показал Пуансо, не нарушая равновесия или иного механического состояния тела, силу \vec{P} , приложенную в точке A тела, можно перенести параллельно-

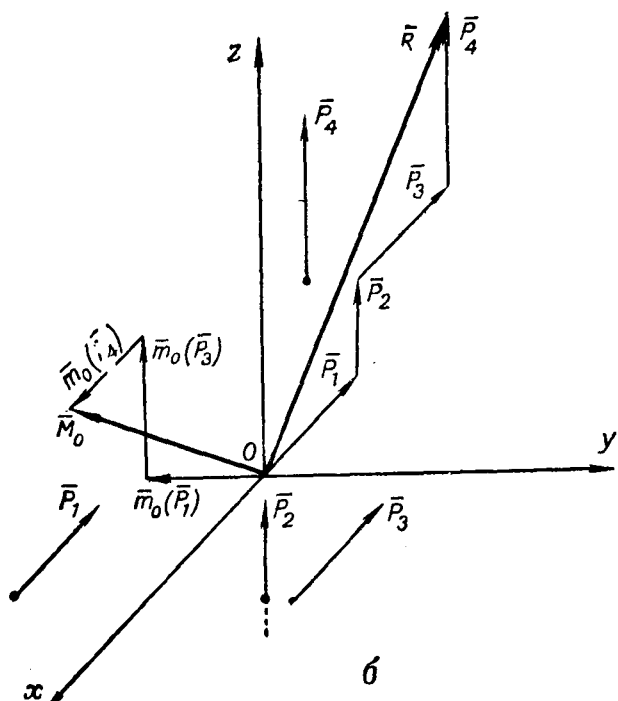
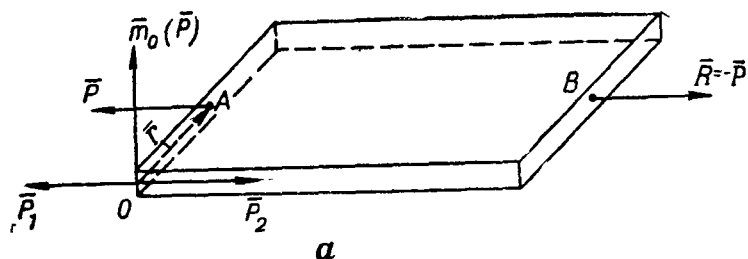


Рис. 4.2.

но своему первоначальному положению в любую точку тела O , не находящуюся на линии действия \vec{P} , но при этом необходимо присоединить пару сил, момент которой равен моменту силы \vec{P} относительно точки приведения O (рис. 4.2).

Доказательство. Пусть дано, что сила \vec{P} приложена в точке A тела, находящегося в равновесии (рис. 4.2, а). Приложим в точке O этого тела взаимно уравновешенную систему сил $|\vec{P}_1| = P$

и $\bar{P}_2 = -\bar{P}_1$, линия действия которых параллельна линии действия приложенной силы \bar{P} . Сила \bar{P}_1 называется приведенной силой, а равные по величине силы \bar{P} и \bar{P}_2 образуют присоединенную пару, момент которой геометрически равен моменту силы \bar{P} относительно центра приведения O :

$$\bar{m}_0(\bar{P}) = \bar{r} \times \bar{P}.$$

Если необходимо привести к одному центру несколько сил, то при приведении каждой силы \bar{P}_i образуется присоединенная пара сил $\bar{m}_i = \bar{r}_i \times \bar{P}_i$ (рис. 4.2, б). Обратим внимание на то, что при приведении силы \bar{P}_2 к центру O (рис. 4.2, б) присоединенной пары нет, так как центр приведения лежит на линии действия силы \bar{P}_2 .

Геометрическая сумма всех сил, приведенных к данному центру приведения, называется равнодействующей системы сил и обозначается \bar{R} .

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i. \quad (4.5)$$

Этот вектор не зависит от положения центра приведения, он инвариантен (независим) по отношению к нему. Поэтому главным вектором называют вектор, равный геометрической сумме векторов всех сил системы.

Геометрически складывая присоединенные пары, получим одну равнодействующую (эквивалентную) пару, момент которой

$$\bar{m} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \dots + \bar{m}_n = \sum_{i=1}^n \bar{m}_i. \quad (4.6)$$

Следовательно, произвольная система сил приведена к одной силе, равной геометрической сумме векторов всех заданных сил системы (главному вектору \bar{R}), и к одной паре, момент которой равен геометрической сумме присоединенных пар (\bar{m}).

Момент каждой присоединенной пары \bar{m}_i равен моменту силы \bar{P}_i относительно центра приведения $\bar{m}_{0i} = \bar{r}_i \times \bar{P}_i$. Следовательно, момент равнодействующей (эквивалентной) пары \bar{m} равен геометрической сумме моментов всех заданных сил относительно центра приведения, т. е.

$$\begin{aligned} \bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \dots + \bar{m}_n &= \bar{m}_0(\bar{P}_1) + \bar{m}_0(\bar{P}_2) + \dots + \bar{m}_0(\bar{P}_n) = \\ &= \sum_{i=1}^n \bar{m}_0(\bar{P}_i) = \bar{M}_0. \end{aligned}$$

Вектор, равный геометрической сумме моментов всех заданных сил системы относительно центра приведения O , называется

главным моментом системы сил относительно центра (\bar{M}_0). Таким образом,

$$\bar{M}_0 = \sum_{i=1}^n \bar{m}_i (\bar{P}_i) = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{P}_i. \quad (4.7)$$

Главный момент зависит от положения центра приведения. Изменим центр приведения, перенесем его из точки O в точку A и обозначим вектор между старым и новым центром приведения через $\Delta\bar{r}$.

Тогда

$$\bar{M}_A = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i + \Delta\bar{r}) \times \bar{P}_i = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{P}_i + \Delta\bar{r} \times \sum_{i=1}^n \bar{P}_i.$$

С учетом (4.1) и (4.2)

$$\bar{M}_A = \bar{M}_0 + \Delta\bar{r} \times \bar{R}. \quad (4.8)$$

Главный момент относительно нового центра приведения равен главному моменту относительно старого, геометрически сложенному с моментом главного вектора \bar{R} , приложенного в старом центре приведения относительно нового.

Главный вектор при наличии главного момента для данной системы сил не является равнодействующей, так как он не эквивалентен ей.

Две системы сил эквивалентны, если они имеют одинаковые главные векторы и главные моменты при приведении этих систем сил к одному центру приведения.

Рассмотрим частные случаи.

Главный вектор и главный момент не равны нулю:

$$\bar{R} \neq 0; \quad \bar{M}_A \neq 0.$$

Система сил не находится в равновесии.

Главный вектор не равен нулю, а главный момент равен нулю:

$$\bar{R} \neq 0; \quad \bar{M}_A = 0.$$

Система сил приводится к главному вектору, т. е. эквивалентна равнодействующей и не находится в равновесии.

Главный вектор равен нулю, а главный момент не равен нулю:

$$\bar{R} = 0; \quad \bar{M}_A \neq 0.$$

Система сил приводится к равнодействующей паре сил и не находится в равновесии.

Главный вектор и главный момент одновременно равны нулю, т. е.

$$\bar{R} = 0; \quad \bar{M}_A = 0. \quad (4.9)$$

Система сил находится в равновесии.

Рассмотрим более подробно последний случай, т. е. условия равновесия системы сил (4.9).

§ 15. СИСТЕМА СИЛ, ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ В ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Пусть на тело действует система сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$, произвольно расположенных в одной плоскости (плоская система сил). Выберем в этой плоскости центр приведения O и совместим координатную плоскость Oxy с плоскостью, в которой расположены силы. В результате перенесения всех сил в центр O система сил может быть приведена к одной силе и к одной паре сил.

Главный вектор системы сил равен геометрической сумме всех сил, приложенных к телу, т. е.

$$\bar{R} = R_x \cdot \bar{i} + R_y \cdot \bar{j},$$

где $R_x = \sum_{i=1}^n X_i; \quad R_y = \sum_{i=1}^n Y_i; \quad R_z \equiv 0.$

Величина главного вектора и его направление определяются из равенств:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2} \quad (4.10)$$

и

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}; \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}, \quad \text{где } \beta = 90^\circ - \alpha.$$

Вектор момента $\bar{m}_0(\bar{P}_i)$ каждой силы \bar{P}_i относительно центра O направлен перпендикулярно плоскости Oxy . Знак «плюс» берем тогда, когда вектор $\bar{m}_0(\bar{P}_i)$ совпадает с положительным направлением оси Oz , т. е. когда сила \bar{P}_i стремится повернуть тело вокруг оси z против хода часовой стрелки. В противном случае берем знак «минус».

Поэтому геометрическое сложение моментов всей плоской системы сил относительно центра O заменяем алгебраическим.

Таким образом, главный момент плоской системы сил равен алгебраической сумме моментов всех сил системы относительно центра приведения O :

$$M_0 = \sum_{i=1}^n m_0(\bar{P}_i), \quad (4.11)$$

где $m_0(\bar{P}_i) = \pm P_i h_i$ и h_i — плечо силы \bar{P}_i относительно O .

Для того чтобы тело под действием плоской системы сил находилось в равновесии, необходимо и достаточно соблюдение условий:

$$\bar{R} = 0; \quad M_0 = 0, \quad (4.12)$$

где O — какая-либо точка плоскости. В соответствии с равенствами (4.10) и (4.11) условия будут выполнены тогда, когда

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \sum_{i=1}^n X_i = 0; \\ R_y &= \sum_{i=1}^n Y_i = 0; \\ M_0 &= \sum_{i=1}^n m_0(\bar{P}_i) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

Таким образом, для сохранения равновесия плоской системы сил должны соблюдаться условия, записанные в виде трех независимых уравнений (4.13), т. е. необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма моментов сил относительно любой точки плоскости действия сил были равны нулю.

Из трех независимых уравнений (4.13) можно определить не более трех неизвестных.

Если число неизвестных сил в системе превысит число уравнений равновесия, то такие статически неопределенные системы могут быть решены лишь с помощью дополнительных уравнений. Число последних должно быть равно числу «лишних» неизвестных и составляют они при рассмотрении деформации (перемещений) системы, т. е. учитываются упругие свойства взаимодействующих тел.

Кроме основной формы условий равновесия (4.13) существуют и другие, эквивалентные основной, при использовании которых надо учитывать ограничения, накладываемые либо на выбор осей координат, либо на выбор центров приведения. Для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех сил относительно двух любых точек A и B плоскости, а также сумма проекций на ось, не перпендикулярную прямой AB , была равна нулю:

$$\sum_{i=1}^n m_A(\bar{P}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_B(\bar{P}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n X_i = 0, \quad (4.14)$$

где ось x не перпендикулярна прямой AB .

Тогда уравнение $\sum_{i=1}^n Y_i = 0$ будет следствием (4.14) и может

быть использовано для контроля правильности решения системы уравнений.

В частном случае линии действия плоской системы сил могут быть параллельны — система параллельных сил. Пусть, например, все линии действия сил параллельны оси y . Тогда первое уравнение системы (4.13) обращается в тождество

$$\sum X_i \equiv 0$$

и для определения неизвестных достаточно двух уравнений равновесия:

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0; \quad M_0 = \sum_{i=1}^n m_0 (\bar{P}_i) = 0.$$

При решении задач иногда используют и третий вид системы уравнений: для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов всех сил относительно любых центров приведения A , B и C , не лежащих на одной прямой, была равна нулю

$$\sum_{i=1}^n m_A (\bar{P}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_B (\bar{P}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_C (\bar{P}_i) = 0. \quad (4.15)$$

Уравнения равновесия часто используются для определения реакций опор. В этом случае можно рекомендовать такую последовательность решения задач:

- выбрать объект, равновесие которого необходимо рассмотреть;
- отбросить мысленно опорные устройства и, пользуясь принципом освобождаемости, заменить их действие силами, геометрически равными реакциям опор;
- выбрать систему координат так, чтобы уравнения равновесия имели простейший вид, т. е. чтобы в каждое из них входило наименьшее число неизвестных;
- составить уравнения равновесия;
- решить полученную систему уравнений и определить известные реакции;
- проверить, правильно ли определены реакции.

В том случае, когда указать направление реакции вначале нельзя, следует определить составляющие этой реакции по осям координат.

Если полученная реакция будет иметь отрицательный знак, это будет означать, что ее действительное направление обратно принятому.

Пример. Ракета установлена на две опоры B и C (рис. 4.3). Здесь и в следующем примере размеры ракеты и нагрузки заимствованы из книги «Конструкция управляемых баллистических ракет» под редакцией проф. А. М. Синакова и доц. М. И. Морозова, Воениздат, 1969. Принимаем условно, что по длине $l+a$ вес ракеты распределен равномерно с интенсивностью $q=1,63$ кН/м. Вес

участка AB условно заменяем силой $P=5,6$ кН, приложенной к точке, находящейся на расстоянии $0,4$ м от опоры B . Определить реакции опор.

Решение. Представляем ракету в виде балки $ABCD$, загруженной нагрузкой по схеме 4.3, б. Объект, равновесие которого следует рассмотреть, — балка $ABCD$.

Отбрасываем опорные устройства и заменяем их действие на балку реакциями опор в точках B и C ; при этом на неподвижной опоре реакция может быть представлена в виде двух составляющих: горизонтальной и вертикальной. В нашем случае (рис. 4.3, в) горизонтальная составляющая реакции в точке B отсутствует*.

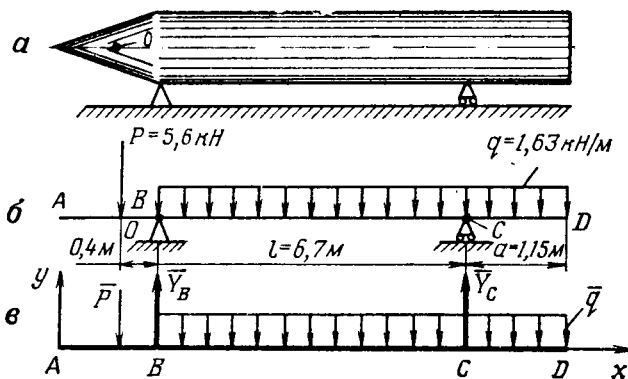


Рис. 4.3.

Выбираем систему прямоугольных координат Axy .

Составляем уравнения равновесия

$$M_B = \sum m_{B_i} = P \cdot 0,4 - q(a+l) \frac{a+l}{2} + Y_C l = 0.$$

Откуда

$$Y_C = \frac{q \frac{(a+l)^2}{2} - P \cdot 0,4}{l} = \frac{1,63 \frac{(6,7+1,15)^2}{2} - 5,6 \cdot 0,4}{6,7} = 7,15 \text{ кН}.$$

Заметим, что нагрузка, равномерно распределенная на длине $l+a$, может быть заменена сосредоточенной силой. Величина силы будет $q(l+a)$, а точка ее приложения — посередине длины участка с равномерно распределенной нагрузкой.

Плечо этой силы относительно опоры B равно $\frac{l+a}{2}$, и, следовательно, момент

силы относительно точки B будет $q(l+a) \frac{l+a}{2} = \frac{q(l+a)^2}{2}$.

Второе уравнение равновесия

$$M_C = \sum m_{C_i} = -Y_B \cdot l - \frac{q \cdot a^2}{2} + \frac{q \cdot l^2}{2} + P(l+0,4) = 0,$$

* В дальнейшем проекции реакции на соответствующие оси прямоугольной системы координат, например в точке C , будут обозначаться X_C ; Y_C и т. д.

откуда

$$Y_B = \frac{\frac{q \cdot l^2}{2} - \frac{q \cdot a^2}{2} + P(l+0,4)}{l} =$$

$$= \frac{\frac{1,63 \cdot 6,7^2}{2} - \frac{1,63 \cdot 1,15^2}{2} + 5,6(6,7 + 0,4)}{6,7} = 11,25 \text{ кН.}$$

Положительный знак у Y_A и Y_B свидетельствует о том, что направление реакций было выбрано правильно.

Проверка. Для проверки используем уравнение равновесия в виде

$$\sum Y_i = -P - q(l+a) + Y_C + Y_B = 0.$$

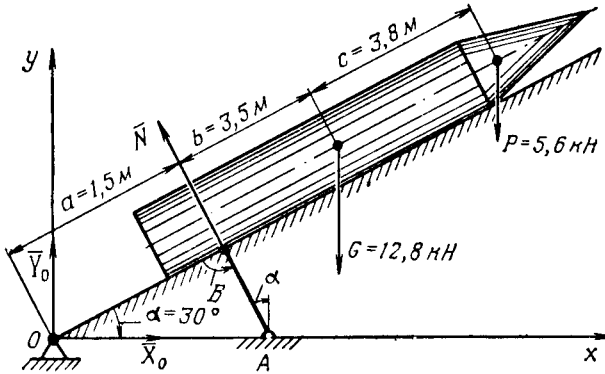


Рис. 4.4.

Подставляя числовые значения, получаем

$$-5,6 - 1,63(6,7 + 1,15) + 7,15 + 11,25 = 0,$$

т. е. реакции определены правильно.

Пример. Определить силу, сжимающую стержень AB , поддерживающий направляющую ракеты в положении $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, составляющие и полную реакцию в шарнире O при нагрузках, представленных на рис. 4.4.

Решение. Объект, равновесие которого следует рассмотреть, — ракета с направляющими.

Отбрасываем опорные устройства и заменяем их действие реакциями опор. В точке O реакцию представляем в виде двух составляющих \bar{X}_0 и \bar{Y}_0 .

Выбираем систему прямоугольных координат Oxy , при этом ось x направим горизонтально.

Составляем уравнения равновесия в виде:

$$\sum_{i=1}^n X_i = X_0 + N \cdot \cos(90^\circ + \alpha) = 0 \text{ или } X_0 = N \sin \alpha;$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i = -G - P + N \cdot \cos \alpha + Y_0 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n m_{0_i} = -G(a+b) \cos \alpha - P(a+b+c) \cos \alpha + N \cdot a = 0.$$

Из последнего равенства находим, что

$$N = \frac{G(a+b)\cos\alpha + P(a+b+c)\cos\alpha}{a} = \frac{[(G+P)(a+b) + P\cdot c]\cos\alpha}{a} =$$

$$= \frac{[(12,8 + 5,6)(1,5 + 3,5) + 5,6 \cdot 3,8]0,87}{1,5} \approx 65,7 \text{ кН.}$$

Из первого уравнения следует

$$X_0 = N \cdot \sin\alpha = 65,7 \cdot 0,5 \approx 32,8 \text{ кН.}$$

Из второго

$$Y_0 = G + P - N \cdot \cos\alpha = 12,8 + 5,6 - 65,7 \cos 60^\circ \approx -14,4 \text{ кН.}$$

Отрицательный знак показывает, что в действительности составляющая реакции $Y_0 \cdot \vec{j}$ направлена в сторону, противоположную принятому направлению. Полная реакция в точке O будет равна

$$R_0 = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2} = \sqrt{32,8^2 + (-14,4)^2} \approx 35,8 \text{ кН.}$$

§ 16. СИСТЕМА СИЛ, ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

При рассмотрении условий равновесия сил, как угодно расположенных в пространстве, появляется необходимость уметь определять момент силы относительно оси.

Рассмотрим тело, которое может вращаться, например, вокруг оси z . Приложим в точке A тела (рис. 4.5, *а*) силу \vec{P} и проведем плоскость xy , перпендикулярную оси z . Точку пересечения плоскости xy с осью z обозначим O . Разложим силу \vec{P} на составляющие: одну — параллельную оси z (\vec{P}_z); другую — лежащую в плоскости, параллельной плоскости Oxy (\vec{P}_{xy}). Очевидно, что сила \vec{P}_z стремится сдвинуть тело в направлении оси z , а сила \vec{P}_{xy} — повернуть его вокруг оси. Вращательный эффект силы \vec{P} (или ее составляющей \vec{P}_{xy}) вокруг оси z определяется моментом, равным

$$m_z(\vec{P}) = m_z(\vec{P}_{xy}) = \pm Ph,$$

где h — плечо силы \vec{P}_{xy} относительно точки O , равное длине перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия \vec{P}_{xy} (рис. 4.5, *б*).

Таким образом, моментом силы \vec{P} относительно оси z называется скалярная величина, равная произведению модуля проекции силы \vec{P} на плоскость Oxy на длину плеча h (рис. 4.5, *б*). Момент $m_z(\vec{P})$ принимаем положительным в том случае, когда сила \vec{P}_{xy} стремится повернуть тело вокруг оси z против хода часовой стрелки, если смотреть с положительного на-

правления оси z . Обозначим координаты точки приложения силы \bar{P} через x и y . Тогда по теореме Вариньона

$$m_0(\bar{P}_{xy}) = m_0(X) + m_0(Y),$$

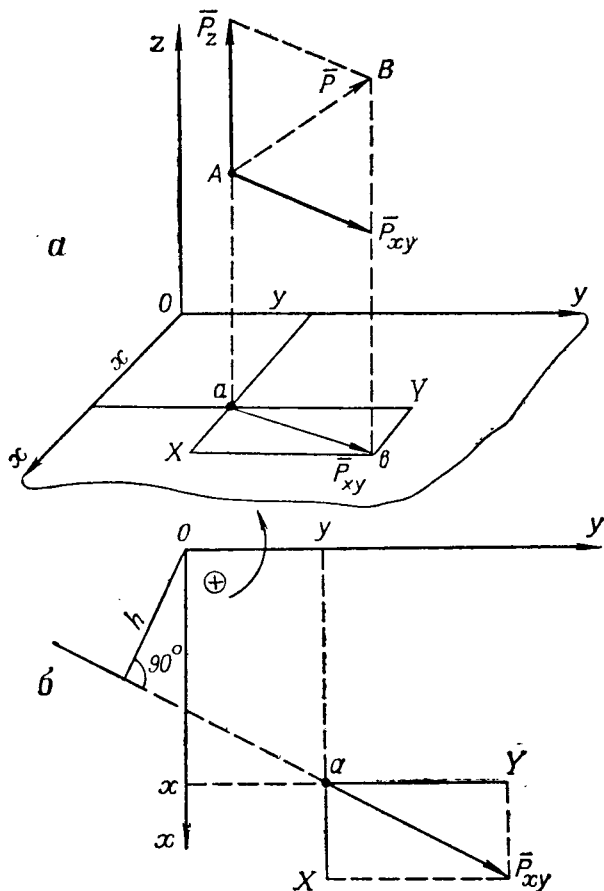


Рис. 4.5.

где X и Y — проекции силы \bar{P}_{xy} на соответствующие оси координат. Из рис. 4.5, б следует, что

$$m_0(X) = -X \cdot y; \quad m_0(Y) = Y \cdot x.$$

Следовательно, момент силы \bar{P} относительно оси z может быть определен по равенству

$$m_z(\bar{P}) = m_0(\bar{P}_{xy}) = Y \cdot x - X \cdot y. \quad (4.16)$$

Таким образом, чтобы определить момент силы относительно какой-либо оси, например оси z , необходимо:

— провести любую плоскость Oxy , перпендикулярную оси z (рис. 4.3);

— определить проекцию силы \vec{P} на плоскость Oxy , т. е. определить \vec{P}_{xy} ;

— найти длину перпендикуляра h , опущенного из точки O (точки пересечения оси z с плоскостью) на линию действия \vec{P}_{xy} ;

— определить знак и величину момента $m_z(\vec{P}) = P_{xy} \cdot h$.

Момент силы относительно оси z равен нулю, когда:

— сила \vec{P} параллельна оси z ($\vec{P}_{xy} = 0$);

— линия действия силы пересекает ось z .

Обобщая оба рассмотренных случая, можно сказать, что момент силы относительно оси равен нулю всегда, когда ось и линия действия силы \vec{P} лежат в одной плоскости.

Аналитическая связь между моментами силы относительно точек и координатных осей. В соответствии с (3.1)

$$\vec{m}_0(\vec{P}) = \vec{r} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}, \quad (4.17)$$

где $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$, а $\vec{P} = X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j} + Z \cdot \vec{k}$.

Известно, что $\vec{i} \times \vec{i} = 0$; $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$; $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$ и т. д.

Тогда из (4.17) следует

$$m_0(\vec{P}) = (yZ - zY) \cdot \vec{i} + (zX - xZ) \cdot \vec{j} + (xY - yX) \cdot \vec{k}. \quad (4.18)$$

С другой стороны, вектор $\vec{m}_0(\vec{P})$ можно выразить через составляющие

$$m_0(\vec{P}) = m_x \cdot \vec{i} + m_y \cdot \vec{j} + m_z \cdot \vec{k}. \quad (4.19)$$

Из сопоставления (4.18) и (4.19) следует

$$m_x = y \cdot Z - z \cdot Y; \quad m_y = z \cdot X - x \cdot Z; \quad m_z = x \cdot Y - y \cdot X, \quad (4.20)$$

где m_x , m_y , m_z — моменты силы относительно соответствующих координатных осей.

Моментом силы относительно оси называется скалярная величина, равная проекции на данную ось вектора момента силы относительно какой-либо точки той же оси. Модуль момента силы относительно точки будет

$$|\vec{m}_0(\vec{P})| = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}. \quad (4.21)$$

Направляющие косинусы вектора $\vec{m}_0(\vec{P})$

$$\cos \alpha = \frac{m_x}{m_0}; \quad \cos \beta = \frac{m_y}{m_0}; \quad \cos \gamma = \frac{m_z}{m_0}.$$

Для системы сил, как угодно расположенных в пространстве, проекции главного момента на оси координат будут:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \sum_{i=1}^n m_x(\bar{P}_i) = \sum_{i=1}^n (y_i \cdot Z_i - z_i \cdot Y_i); \\ M_y &= \sum_{i=1}^n m_y(\bar{P}_i) = \sum_{i=1}^n (z_i \cdot X_i - x_i \cdot Z_i); \\ M_z &= \sum_{i=1}^n m_z(\bar{P}_i) = \sum_{i=1}^n (x_i \cdot Y_i - y_i \cdot X_i). \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

Главный вектор равен геометрической сумме заданной системы сил, приложенных к телу $\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i$ или в проекциях на оси прямоугольных координат:

$$R_x = \sum_{i=1}^n X_i; \quad R_y = \sum_{i=1}^n Y_i; \quad R_z = \sum_{i=1}^n Z_i.$$

Величина главного вектора будет равна

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

а его направляющие косинусы

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}; \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}; \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R}.$$

Главный момент пространственной системы сил относительно выбранного центра O равен геометрической сумме моментов всех сил данной системы относительно центра:

$$\bar{M}_0 = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times \bar{P}_i).$$

Левая часть последнего равенства может быть записана в виде

$$\bar{M}_0 = M_x \cdot \bar{i} + M_y \cdot \bar{j} + M_z \cdot \bar{k},$$

где M_x , M_y и M_z — проекции главного момента на оси координат — могут быть определены в соответствии с (4.22). Величина главного момента и его направляющие косинусы определяются из равенств:

$$M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \quad (4.23)$$

и

$$\cos \alpha = \frac{M_x}{M_0}; \quad \cos \beta = \frac{M_y}{M_0}; \quad \cos \gamma = \frac{M_z}{M_0}.$$

Условия равновесия системы сил, произвольно расположенных в пространстве. Для равновесия системы сил, как угодно расположенных в пространстве, необходимо и достаточно, чтобы

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0;$$

$$M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 0.$$

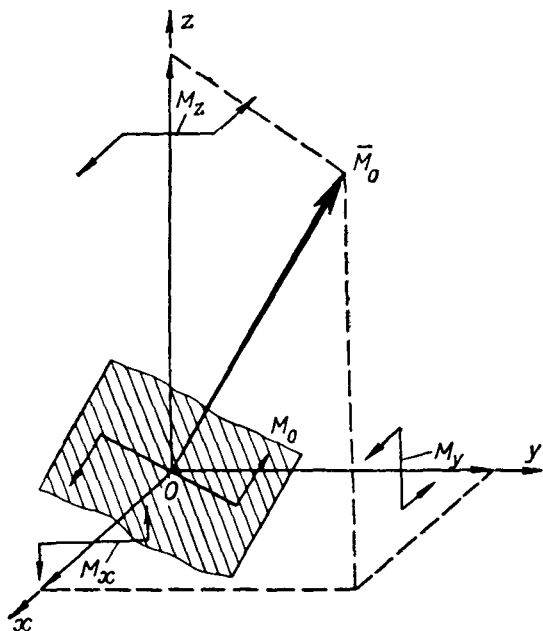


Рис. 4.6.

Условия равновесия будут выполнены тогда, когда

$$\left. \begin{aligned} R_x = \sum X_i = 0; \quad M_x = \sum m_x(\bar{P}_i) = 0; \\ R_y = \sum Y_i = 0; \quad M_y = \sum m_y(\bar{P}_i) = 0; \\ R_z = \sum Z_i = 0; \quad M_z = \sum m_z(\bar{P}_i) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

Вывод. Для равновесия системы сил, как угодно расположенных в пространстве, необходимо и достаточно соблюдение шести независимых уравнений (4.24). Полученные уравнения называются уравнениями равновесия произвольной пространственной системы сил, приложенных к одному и тому же телу.

В частном случае, когда линии действия сил параллельны, например координатной оси z , из полученной системы уравнений равно-

весия могут быть отброшены три уравнения, обращющиеся в тождество, а именно:

$$R_x = \sum_{i=1}^n X_i \equiv 0; R_y = \sum_{i=1}^n Y_i \equiv 0; M_z = \sum_{i=1}^n m_z(\bar{P}_i) \equiv 0.$$

Условия равновесия для пространственной системы n сил, параллельных оси z , будут

$$\sum_{i=1}^n Z_i = 0; \sum_{i=1}^n m_x(\bar{P}_i) = 0; \sum_{i=1}^n m_y(\bar{P}_i) = 0. \quad (4.25)$$

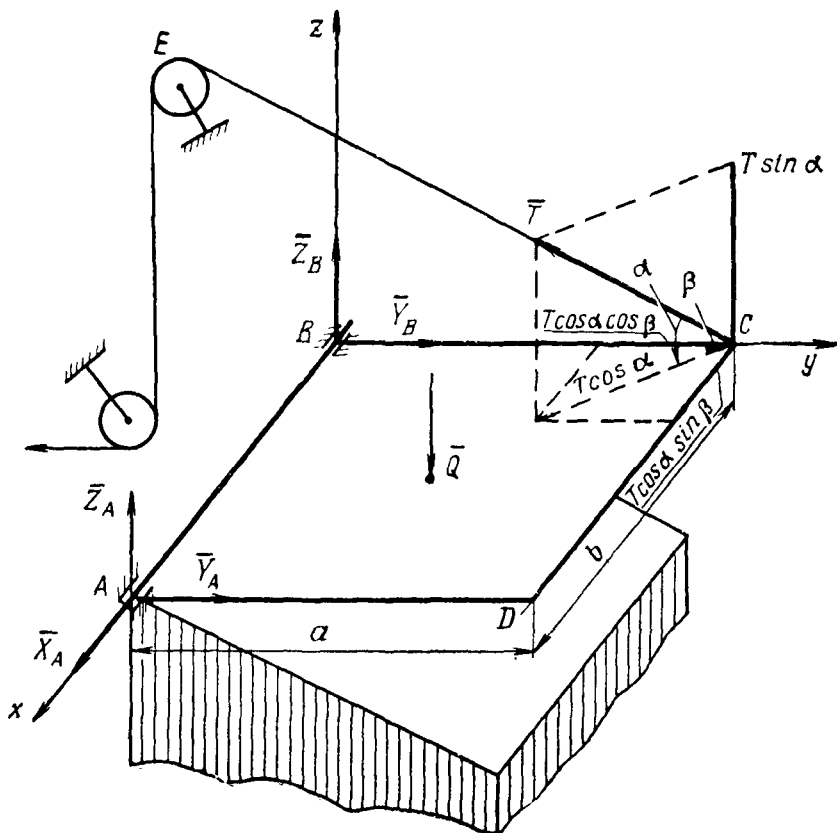


Рис. 4.7.

Пример. Крышка однородного люка постоянной толщины (рис. 4.7) поддерживается с помощью упорно-опорного подшипника A, опорного подшипника B и троса CE. Вес крышки Q приложен в центре крышки ABCD. Определить при заданных размерах опорные реакции в точках A, B и натяжение троса T.

Решение. Объект, равновесие которого мы рассматриваем, — крышка люка.

Пользуясь принципом освобождаемости, прикладываем к телу силы, равные реакциям связей. В точках A и B направление реакции мы не знаем, поэтому определяем их проекции на оси прямоугольной системы координат.

В упорно-опорном подшипнике их три: X_A, Y_A, Z_A , опором подшипнике две: Y_B и Z_B . Реакция троса T направлена по тросу.

Итак, на крышку действуют: известная сила тяжести крышки Q и шесть неизвестных сил (реакций); задача статически определяемая.

Составляем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} 1. \quad \sum X_i &= X_A + T \cos \alpha \cdot \sin \beta = 0; & 4. \quad \sum m_x(\bar{P}_i) &= -Q \frac{a}{2} + T \sin \alpha \cdot a = 0; \\ 2. \quad \sum Y_i &= Y_A + Y_B - T \cos \alpha \cdot \cos \beta = 0; & 5. \quad \sum m_y(\bar{P}_i) &= Q \frac{b}{2} - Z_A \cdot b = 0; \\ 3. \quad \sum Z_i &= Z_A + Z_B + T \sin \alpha - Q = 0; & 6. \quad \sum m_z(\bar{P}_i) &= Y_A b - T \cos \alpha \sin \beta \cdot a = 0. \end{aligned}$$

При составлении уравнений моментов мы пользовались теоремой Вариньона: момент равнодействующей силы \bar{T} относительно оси равен сумме моментов составляющих этой силы относительно той же оси.

Из полученной системы уравнений определяем:

$$\text{из 4-го } T = \frac{Q}{2 \sin \alpha};$$

$$\text{из 1-го } X_A = -T \cos \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{Q}{2} \operatorname{ctg} \alpha \cdot \sin \beta;$$

$$\text{из 6-го } Y_A = T \frac{a}{b} \cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{Q}{2} \frac{a}{b} \operatorname{ctg} \alpha \cdot \sin \beta;$$

$$\text{из 2-го } Y_B = T \cos \alpha \cdot \cos \beta - Y_A = \frac{Q}{2} \operatorname{ctg} \alpha \left(\cos \beta - \frac{a}{b} \sin \beta \right);$$

$$\text{из 5-го } Z_A = -\frac{Q}{2};$$

$$\text{из 3-го } Z_B = Q - Z_A - T \sin \alpha = \frac{Q}{2} (3 - 2) = \frac{Q}{2}.$$

§ 17. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ СИЛЫ. ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

Совокупность сил, линии действия которых параллельны, называются пространственной или плоской системой параллельных сил.

Параллельные силы складываются алгебраически. Для определения точки приложения равнодействующей можно сложение сил производить последовательно.

Центром параллельных сил называется точка на прямой действия равнодействующей системы параллельных сил, вокруг которой поворачивается эта прямая, если все параллельные силы поворачиваются вокруг точек их приложения, оставаясь параллельными между собой.

Покажем, что такая точка существует, и определим ее положение в пространстве (рис. 4.8).

Пусть, например, линии действия всех сил параллельны оси z , т. е. $\bar{P}_i = P_i \cdot \bar{k}$. Тогда главный вектор будет $\bar{R} = \sum \bar{P}_i = (\sum P_i) \bar{k}$. Выбираем центр приведения в точке O .

Главный момент системы параллельных сил относительно центра приведения O равен

$$\bar{M}_0 = \sum \bar{m}_0(\bar{P}_i) = \sum \bar{r}_i \times \bar{P}_i = \sum \bar{r}_i \times P_i \bar{k} = \sum \bar{r}_i P_i \times \bar{k}.$$

Выберем другой центр приведения — точку C , но так, чтобы главный момент относительно этого нового центра был равен нулю. Обозначим $\overline{OC} = \vec{r}_c$, тогда $\overline{CO} = -\vec{r}_c$.

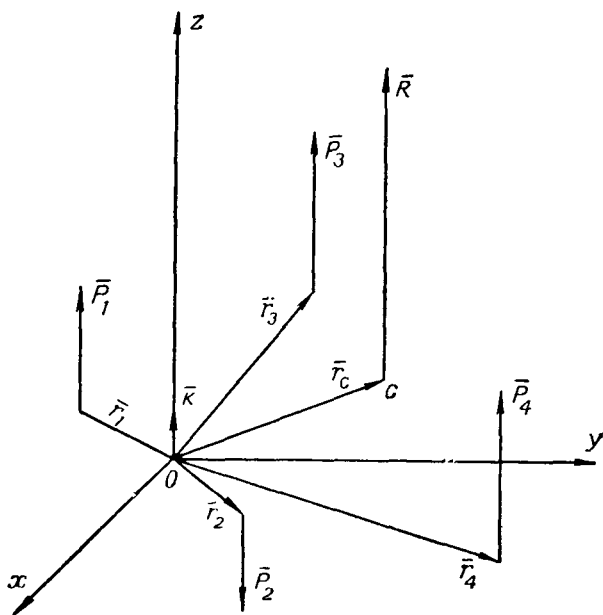


Рис. 4.8.

Имеем в соответствии с (4.8)

$$\begin{aligned} \overline{M}_c &= \overline{M}_0 + \overline{CO} \times \overline{R} = \overline{M}_0 + (-\vec{r}_c) \times \overline{R} = \\ &= \sum_{i=1}^n \vec{r}_i P_i \times \vec{k} - \vec{r}_c \times \sum_{i=1}^n P_i \vec{k}. \end{aligned}$$

Учитывая, что орт $\vec{k} = \text{const}$, получаем

$$\overline{M}_c = \left(\sum_{i=1}^n P_i \vec{r}_i - \vec{r}_c \sum_{i=1}^n P_i \right) \times \vec{k}.$$

Главный момент M_c обращается в нуль, когда

$$\sum_{i=1}^n P_i \vec{r}_i - \vec{r}_c \sum_{i=1}^n P_i = 0.$$

Откуда

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n P_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n P_i}. \quad (4.26)$$

Таким образом, система параллельных сил приводится к равнодействующей, приложенной в точке C , положение которой определяется радиусом-вектором \bar{r}_c . Как следует из формулы (4.26), радиус-вектор \bar{r}_c не зависит от орта \bar{k} , т. е. если все параллельные силы, не изменяя их величин и точек приложения, одновременно повернуть на один и тот же угол, положение точки C не изменится. Точка C называется центром параллельных сил.

Проектируя равенство (4.26) на оси прямоугольной системы координат, получаем:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum P_i x_i}{\sum P_i}; \\ y_c &= \frac{\sum P_i y_i}{\sum P_i}; \\ z_c &= \frac{\sum P_i z_i}{\sum P_i}. \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

Частный случай. При действии только двух параллельных сил

$$\bar{r}_c = \frac{P_1 \bar{r}_1 + P_2 \bar{r}_2}{P_1 + P_2} = \frac{\bar{r}_1 + \frac{P_2}{P_1} \bar{r}_2}{1 + \frac{P_2}{P_1}}.$$

Обозначим $\frac{P_2}{P_1} = \lambda$. Тогда

$$\bar{r}_c = \frac{\bar{r}_1 + \lambda \bar{r}_2}{1 + \lambda}. \quad (4.28)$$

Последнее равенство, как известно из математики (аналитическая геометрия на плоскости), является формулой для деления отрезка в заданном отношении.

Равнодействующая двух параллельных сил, направленных в одну сторону, приложена в точке C , делящей отрезок, соединяющий точки приложения сил, в отношении, обратно пропорциональном величинам этих сил.

Если $P_1 = P_2$, т. е. $\lambda = 1$, то

$$\bar{r}_c = \frac{\bar{r}_1 + \bar{r}_2}{2}. \quad (4.29)$$

Полученные равенства справедливы как для случая, когда все параллельные силы направлены в одну сторону, т. е. имеют одинаковый знак, так и тогда, когда силы направлены в противоположные стороны, т. е. имеют разные знаки. В случае когда знаменатель обращается в нуль, $r_c = \infty$,

ГЛАВА 5

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ФИГУР

§ 18. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

Силой тяжести или весом тела называют силу, с которой тело притягивается к Земле. Мысленно разделим тело на ряд элементарных тел, каждое весом ΔG_i . Все силы тяжести направлены к центру Земли. С достаточной степенью точности, учитывая весьма большую величину радиуса Земли и очень малые относительные размеры тел, расположенных на ее поверхности, можно считать силы тяжести тел параллельными* (рис. 5.1).

Радиус-вектор центра C параллельных сил (рис. 4.8) тяжести определяется в соответствии с формулой (4.26)

$$\bar{r}_c = \frac{\sum \Delta G_i \bar{r}_i}{\sum \Delta G_i}, \quad (5.1)$$

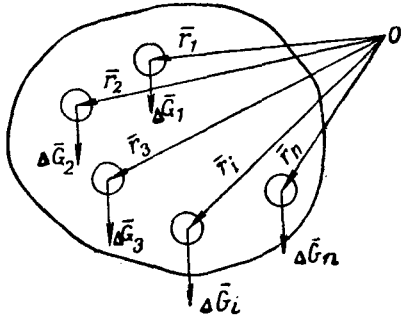


Рис. 5.1.

где $\sum \Delta G_i = G$ — вес тела, а точка C — центр параллельных сил.

Центр параллельных сил, с которыми элементарные частицы тела притягиваются к Земле, называется центром тяжести тела.

В соответствии с предыдущим координаты центра тяжести определяются по формулам:

$$x_c = \frac{\sum \Delta G_i x_i}{\sum \Delta G_i}; \quad y_c = \frac{\sum \Delta G_i y_i}{\sum \Delta G_i}; \quad z_c = \frac{\sum \Delta G_i z_i}{\sum \Delta G_i}. \quad (5.2)$$

Пример. На подводной лодке портовым краном перемещен груз весом $G = 300$ кН из носа в корму на расстояние 50 м. Определить перемещение центра тяжести подводной лодки, считая ее водоизмещение Q равным 15000 кН.

* Если на поверхности Земли на расстоянии 1000 м по меридиану взять две точки, то угол между направлениями их сил тяжести равен $32''$.

Решение. Выбираем произвольную точку O , из которой проводим радиусы-векторы центров тяжести: груза \vec{r}_1 , подводной лодки без груза (весом $Q - G$) \vec{r}_2 и центра тяжести подводной лодки с грузом \vec{r}_c . Определяем радиусы-векторы по формуле (5.1):

до перемещения груза

$$\vec{r}_c^{(1)} = \frac{G \cdot \vec{r}_1 + (Q - G) \vec{r}_2}{Q};$$

после перемещения груза

$$\vec{r}_c^{(2)} = \frac{G(\vec{r}_1 + \vec{l}) + (Q - G) \vec{r}_2}{Q},$$

где \vec{l} — вектор перемещения груза.

Определяем вектор $\Delta \vec{r}$ смещения центра тяжести подводной лодки при перемещении груза G :

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_c^{(2)} - \vec{r}_c^{(1)} = \frac{G \vec{l}}{Q},$$

откуда следует, что перемещение центра тяжести при смещении груза происходит параллельно перемещению груза. Подставляя числовые значения величин, находим

$$|\Delta \vec{r}| = \frac{300 \cdot 50}{15000} = 1 \text{ м.}$$

Центр тяжести объема однородных тел. Принимая тело однородным, обозначим вес единицы объема материала, из которого оно выполнено, γ . Тогда, обозначив объем элемента тела через ΔV_i , имеем $\Delta G_i = \Delta V_i \gamma$. Подставляя значение ΔG_i в (5.1) и сокращая на γ , определим радиус-вектор центра тяжести тела

$$\vec{r}_c = \frac{\sum \Delta V_i \vec{r}_i}{\sum \Delta V_i}. \quad (5.3)$$

Из формулы (5.3) следует, что положение центра тяжести однородного тела в пространстве зависит только от объемов элементов тела и их расположения в пространстве, т. е. от формы тела, поэтому центр тяжести однородного тела называется центром тяжести объема.

Координаты центра тяжести объема

$$x_c = \frac{\sum \Delta V_i x_i}{\sum \Delta V_i}; \quad y_c = \frac{\sum \Delta V_i y_i}{\sum \Delta V_i}; \quad z_c = \frac{\sum \Delta V_i z_i}{\sum \Delta V_i}. \quad (5.4)$$

Пример. Подводная лодка водоизмещением $Q = 15000$ кН находится в надводном положении. Положение ее центра тяжести известно. Принимаем его за начало координат. Ось x направляем горизонтально, ось z вертикально вниз. Для перехода ее в другое положение заполняют забортной водой носовую цистерну объемом $V_{\text{ц}} = 50$ м³. Определить новые координаты центра тяжести подводной лодки, если координаты центра объема носовой цистерны $x_c^{(1)} = 40$ м; $y_c^{(1)} = 0$ м и $z_c^{(1)} = 1,5$ м, а вес единицы объема воды $\gamma = 10,3$ кН/м³.

Решение. Определяем координаты нового центра тяжести подводной лодки (5.4)

$$x_c = \frac{Q \cdot O + G_{II} x_c^{(1)}}{Q + G_{II}} = \frac{\gamma \cdot V_{II} x_c^{(1)}}{Q + \gamma V_{II}} = \frac{10,3 \cdot 50 \cdot 40}{15000 + 10,3 \cdot 50} \approx 1,3 \text{ м},$$

где вес цистерны $G_{II} = \gamma V_{II}$

$$y_c = 0; \quad z_c = \frac{\gamma V_{II} z_c^{(1)}}{Q + G_{II}} = \frac{10,3 \cdot 50 \cdot 1,5}{15000 + 10,3 \cdot 50} \approx 0,12 \text{ м}.$$

Центр тяжести площади. Рассмотрим однородное тело — пластинку постоянной толщины, равной h . Мысленно разделим пластинку на n элементарных призм, каждая высотой h и площадью основания ΔF_i . Тогда

$$\Delta V_i = h \cdot \Delta F_i; \quad V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i = h \sum_{i=1}^n \Delta F_i = hF.$$

Подставляя значение ΔV_i в формулу (5.3), определяем

$$\bar{r}_c = \frac{\sum \Delta V_i \bar{r}_i}{\sum \Delta V_i} = \frac{h \sum \Delta F_i \bar{r}_i}{h \sum \Delta F_i}.$$

После сокращения радиус-вектор центра тяжести однородного тела — пластинки постоянной толщины будет

$$\bar{r}_c = \frac{\sum \bar{r}_i \cdot \Delta F_i}{\sum \Delta F_i}. \quad (5.5)$$

Из формулы (5.5) следует, что положение центра тяжести однородного тела постоянной толщины в пространстве зависит только от площадей элементов тела и расположения этих элементов в пространстве и не зависит от толщины и материала тела. Центр тяжести однородного тела постоянной толщины называется центром тяжести площади (рис. 5.4).

Координаты центра тяжести площади:

$$x_c = \frac{\sum x_i \Delta F_i}{\sum \Delta F_i}; \quad y_c = \frac{\sum y_i \Delta F_i}{\sum \Delta F_i}; \quad z_c = \frac{\sum z_i \Delta F_i}{\sum \Delta F_i}. \quad (5.6)$$

Пусть тонкая однородная пластинка постоянной толщины расположена, например, в плоскости Oyz . Тогда координаты центра тяжести площади фигуры будут

$$y_c = \frac{\sum y_i \Delta F_i}{\sum \Delta F_i};$$

$$z_c = \frac{\sum z_i \Delta F_i}{\sum \Delta F_i}.$$

Оси прямоугольной системы координат, начало которых совпадает с центром тяжести фигуры, называют центральными осями.

Суммы произведений вида

$$\sum_{i=1}^n z_i \cdot \Delta F_i = S_y; \quad \sum_{i=1}^n y_i \cdot \Delta F_i = S_z \quad (5.7)$$

называются статическими моментами площади относительно соответствующих осей y и z .

Статическим моментом площади относительно оси, лежащей в плоскости сечения, называется сумма произведений из элементарных площадок на расстояния от центра тяжести этих площадок до оси.

С учётом (5.7)

$$y_c = \frac{S_z}{F}; \quad z_c = \frac{S_y}{F}. \quad (5.8)$$

Размерность статического момента — (длина)³. Статический момент может быть положительным или отрицательным. Если же площадки взять бесконечно малыми, а число их бесконечно большим и перейти к пределу, тогда:

$$\left. \begin{aligned} S_y &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta F_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n z_i \cdot \Delta F_i = \int_F z dF; \\ S_z &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta F_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n y_i \cdot \Delta F_i = \int_F y dF. \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Для центральных осей $y_c=0$ и $z_c=0$. Тогда из (5.8) следует, что $S_z=0$ и $S_y=0$, т. е. относительно центральных осей статические моменты равны нулю.

Если однородное тело или фигура имеет одну ось симметрии, центр тяжести лежит на этой оси, если их будет две — центр тяжести находится в точке их пересечения.

Пример. Определить координаты центра тяжести плоской фигуры, состоящей из швеллера № 16 (ГОСТ 8240—56) и листа сечением 240×16 мм ($F_1=38,4$ см²) (рис. 5.2).

Решение. Вычерчиваем фигуру в удобном масштабе (например, 1:2, 1:4 и т. д.). Размеры швеллера, его площадь сечения выписываем из табл. ГОСТ 8240—56 ($F_2=18,1$ см²; $y_2=1,8$ см).

Выбираем начальные оси прямоугольной системы координат y_n, z_n (рис. 5.2).

Проводим центральные оси каждой фигуры параллельно начальным и обозначаем их начало буквами c_1, c_2 и т. д.

Используя (5.6), определяем:

$$z_c = \frac{z_1 F_1 + z_2 F_2}{F_1 + F_2} = 3,62 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{y_1 F_1 + y_2 F_2}{F_1 + F_2} = 8,75 \text{ см}.$$

Наносим положение центра тяжести всей фигуры на чертеже и проводим центральные оси параллельно начальным.

Если фигура делится на большое количество простейших, тогда для вычисления координат центра тяжести фигуры целесообразно использовать таблицу.

Использованный метод определения центра тяжести носит название метода группировки площадей. В случае если есть

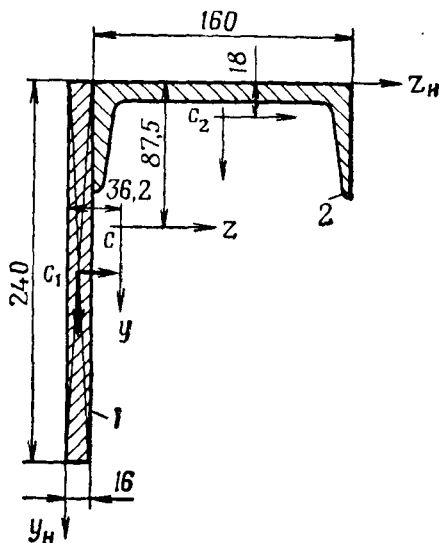


Рис. 5.2.

вырезы (отверстия), при использовании метода группировки площадей площадь каждого выреза берется с отрицательным знаком.

Кроме упомянутого метода в некоторых случаях можно использовать метод непосредственного интегрирования.

Пример. Определить координату y_c центра тяжести треугольника AOB с основанием $AB=b$ (рис. 5.3) и высотой h .

Решение. Принимаем вершину треугольника за начало координат, ось z проводим параллельно основанию, ось y вертикально вниз. В соответствии с формулами (5.8) и (5.9)

$$y_c = \frac{\int y dF}{F}, \quad (*)$$

где $dF = b_y dy$ — площадь элементарной площадки, находящейся на расстоянии y от оси z .

Находим из подобия треугольников, что $\frac{b_y}{b} = \frac{y}{h}$, откуда $b_y = b \frac{y}{h}$.

Подставив в формулу (*) значение $dF = \frac{b}{h} y dy$, получим

$$y_c = \frac{\int_0^h y \frac{b}{h} y dy}{\frac{bh}{2}} = \frac{2}{3} h.$$

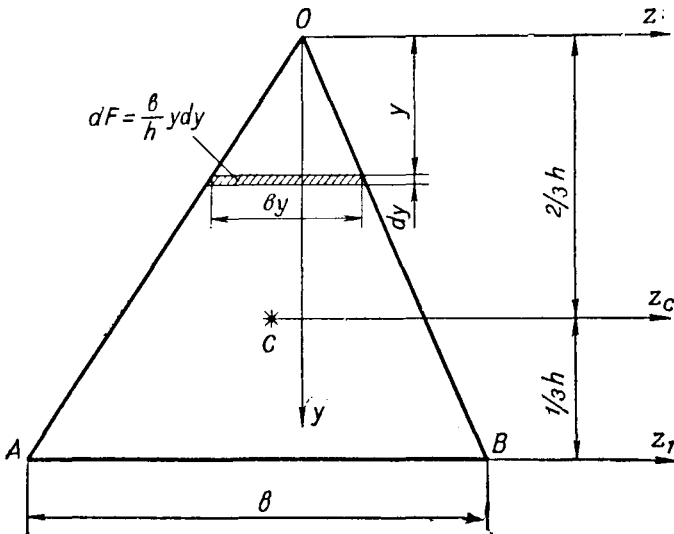


Рис. 5.3.

Вывод. Центр тяжести треугольника располагается на расстоянии $1/3$ высоты, отсчитываемой от основания.

Центр тяжести материальной линии. Рассмотрим пространственную материальную линию (например, однородную проволоку с постоянной малой площадью поперечного сечения). В общем случае форма материальной линии может быть любой.

Осевой мы будем называть линию, проходящую через центры тяжести сечений. Обозначим $l = \sum \Delta l_i$ длину осевой линии. Тогда

$$\Delta V_i = F \Delta l_i \text{ и } \bar{r}_c = \frac{\sum \Delta V_i \bar{r}_i}{\sum \Delta V_i} = \frac{\sum \bar{r}_i \Delta l_i}{\sum \Delta l_i} = \frac{\sum \bar{r}_i \Delta l_i}{l}.$$

Координаты центра тяжести тела в виде материальной линии:

$$x_c = \frac{\sum x_i \Delta l_i}{\sum \Delta l_i}; \quad y_c = \frac{\sum y_i \Delta l_i}{\sum \Delta l_i}; \quad z_c = \frac{\sum z_i \Delta l_i}{\sum \Delta l_i}, \quad (5.10)$$

где Δl_i — элементарная длина осевой линии.

Координаты центра тяжести тела в виде однородной проволоки постоянного сечения зависят только от длин отдельных элементов

и распределения этих длин в пространстве, т. е. от формы осевой линии проволоки. Центр тяжести проволоки называется центром тяжести материальной линии.

§ 19. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ФИГУР. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим геометрические характеристики плоских фигур. Проведем (рис. 5.4) прямоугольную систему координат $Oxyz$ с началом в произвольной точке O плоскости. Ось x направим перпен-

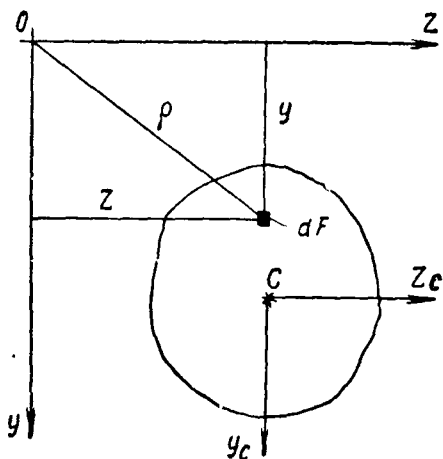


Рис. 5.4.

дикулярно плоской фигуре (на рис. 5.4 к читателю), а оси y и z — в плоскости чертежа так, чтобы система координат $Oxyz$ была правой. Выделяем элементарную площадку dF , координаты которой y и z .

К геометрическим характеристикам плоской фигуры кроме ее площади относятся:

1) **Статический момент.** Как было указано выше, интегралы вида

$$S_y = \int_F z dF; \quad S_z = \int_F y dF$$

называются статическими моментами плоской фигуры относительно осей y и z соответственно. Понятие о статическом моменте уже было использовано при определении центра тяжести фигуры. Напомним, что статический момент площади может быть как положительным, так и отрицательным. Относительно центральных осей статические моменты равны нулю, т. е. $S_{y_c} = 0; S_{z_c} = 0$.

2) **Моменты инерции.** Интегралы вида

$$I_y = \int_F z^2 dF; \quad I_z = \int_F y^2 dF \quad (5.11)$$

называются осевыми (экваториальными) моментами инерции плоской фигуры.

Осевым моментом инерции плоской фигуры называется величина, равная пределу, распространенному на всю площадь плоской фигуры, суммы произведений из элементарных площадок на квадраты их расстояний от некоторой оси, лежащей в плоскости фигуры. С осевыми моментами инерции мы встретимся при изучении изгиба, сложного сопротивления и т. п.

Интеграл вида

$$I_p = \int_F \rho^2 dF \quad (5.12)$$

называется полярным моментом инерции плоской фигуры.

Полярным моментом инерции плоской фигуры называется величина, равная пределу, распространенному на всю площадь плоской фигуры, суммы произведений из элементарных площадок на квадраты их расстояний от некоторой точки (полюса), лежащей в плоскости фигуры.

С полярным моментом инерции мы встретимся при изучении кручения.

Из рис. 5.4 следует, что $\rho^2 = z^2 + y^2$. Подставляя значение ρ^2 в формулу (5.12), получим

$$I_p = \int_F (z^2 + y^2) dF = \int_F z^2 dF + \int_F y^2 dF$$

или

$$I_p = I_y + I_z. \quad (5.13)$$

Следовательно, полярный момент инерции плоской фигуры равен сумме осевых моментов инерции относительно ортогональных осей, проходящих через полюс.

Интеграл вида

$$I_{yz} = \int_F yz dF \quad (5.14)$$

называется центробежным моментом инерции плоской фигуры.

Центробежным моментом инерции плоской фигуры называется величина, равная пределу, распространенному на всю площадь плоской фигуры, суммы произведений элементарных площадок на произведение их координат относительно ортогональных осей, ле-

жащих в плоскости фигуры. С центробежным моментом инерции мы встретимся при изучении изгиба.

Моменты инерции плоских фигур имеют размерность — (длина)⁴. Осевые и полярный моменты инерции всегда положительны. Центробежный момент инерции будет положительным, когда координаты y и z имеют одинаковые знаки, и отрицательным, когда y и z имеют противоположные знаки. Центробежный момент инерции равен нулю тогда, когда хотя бы одна из осей будет осью симметрии, что следует из (5.14).

3) **Радиус инерции.** Радиусом инерции называется такое расстояние от оси до некоторой точки, лежащей в плоскости фигуры, произведение квадрата которого на площадь поперечного сечения равно осевому моменту инерции фигуры относительно той же оси,

$$i_z^2 F = I_z; \quad i_y^2 F = I_y, \quad (5.15)$$

откуда

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{F}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}}, \quad (5.16)$$

где i_z и i_y — радиусы инерции относительно осей z и y соответственно. Радиус инерции имеет размерность длины.

4) **Моменты сопротивления.** Пусть оси y и z центральные. Осевым моментом сопротивления называется отношение осевого момента инерции фигуры относительно центральной оси (y или z) к расстоянию от соответствующей оси до наиболее удаленной от нее точки сечения:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}; \quad W_y = \frac{I_y}{z_{\max}}, \quad (5.17)$$

где W_z и W_y — моменты сопротивления относительно осей z и y соответственно.

Размерность моментов сопротивления — (длина)³.

По аналогии с осевым, полярным моментом сопротивления называется отношение вида

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}}, \quad (5.18)$$

где ρ_{\max} — расстояние от центра тяжести до наиболее удаленной точки сечения.

§ 20. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ СТАТИЧЕСКИМИ МОМЕНТАМИ И МОМЕНТАМИ ИНЕРЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЕЙ

Допустим, что статические моменты S_y и S_z , а также моменты инерции I_y и I_z плоской фигуры относительно осей координат y и z известны. Требуется определить моменты инерции относительно

по осям координат y_1 и z_1 , параллельных исходным осям y и z . Из чертежа (рис. 5.5) следует, что

$$y_1 = y + a; \quad z_1 = z + b.$$

Подставляя значения координат y_1 и z_1 в соответствующие интегралы, получаем:

1. Статические моменты

$$S_{z_1} = \int_F y_1 dF = \int_F (y + a) dF = \int_F y dF + a \int_F dF.$$

Следовательно,

$$S_{z_1} = S_z + aF.$$

Соответственно

$$S_{y_1} = S_y + bF.$$

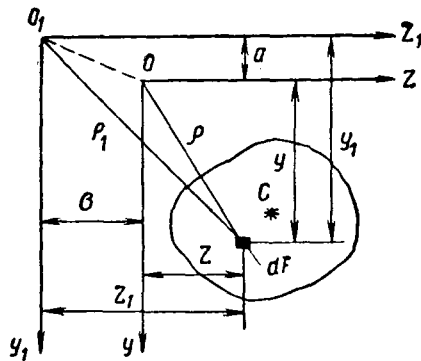


Рис. 5.5.

2. Моменты инерции:

$$I_{z_1} = \int_F y_1^2 dF = \int_F (y + a)^2 dF = \int_F y^2 dF + 2a \int_F y dF + a^2 F;$$

$$I_{y_1} = \int_F z_1^2 dF = \int_F (z + b)^2 dF = \int_F z^2 dF + 2b \int_F z dF + b^2 F.$$

Используя ранее введенные обозначения (5.9) и (5.11), можно записать

$$I_{z_1} = I_z + 2aS_z + a^2F. \quad (5.19)$$

Аналогично определяем, что

$$I_{y_1} = I_y + 2bS_y + b^2F. \quad (5.20)$$

Если точка O — начало осей координат Oyz — выбрана в центре тяжести сечения, тогда оси z и y — центральные и $S_y = 0$; $S_z = 0$. Уравнения (5.19) и (5.20) будут иметь вид:

$$I_{z_1} = I_z + a^2F; \quad I_{y_1} = I_y + b^2F. \quad (5.21)$$

Из уравнений (5.21) следует, что всегда $I_{y_1} > I_y$ и $I_{z_1} > I_z$. Аналогично решается вопрос об изменении центробежного момента инерции для случая, когда начальные оси Oyz центральные

$$I_{y_1 z_1} = \int_F (y + a)(z + b) dF = I_{yz} + a \cdot b \cdot F. \quad (5.22)$$

Из полученного равенства (5.22) следует, что при параллельном переносе только одной оси (например, $a=0$) центробежный момент инерции не изменяется.

§ 21. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ НЕКОТОРЫХ ФИГУР

А. Моменты инерции и моменты сопротивления прямоугольника

В прямоугольнике размером $b \times h$ (рис. 5.6) выделим на расстоянии y от оси z элементарную площадку шириной b , высотой dy

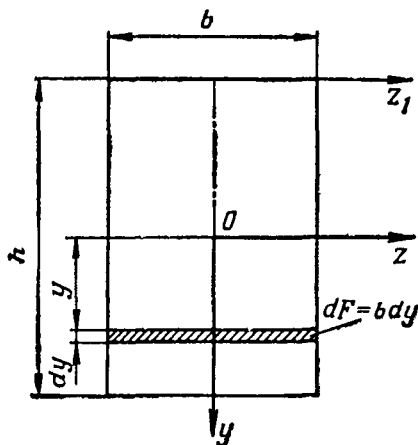


Рис. 5.6.

той dy и площадью $dF = b \cdot dy$. После подстановки значения dF в равенство (5.11) получаем, что

$$I_z = \int_F y^2 dF = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = 2b \int_0^{h/2} y^2 dy = 2b \frac{y^3}{3} \Big|_0^{h/2}.$$

После подстановки пределов осевой момент инерции I_z будет

$$\left. \begin{aligned} I_z &= \frac{bh^3}{12} \cdot \\ I_y &= \frac{hb^3}{12} \cdot \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

Очевидно, что

Момент инерции прямоугольника относительно оснований можно определить из уравнения (5.21)

$$I_{z_1} = I_z + \left(\frac{h}{2}\right)^2 F = \frac{bh^3}{12} + \frac{h^2bh}{4} = \frac{bh^3}{3}. \quad (5.24)$$

Полярный момент инерции прямоугольника

$$I_p = I_y + I_z = \frac{hb^3}{12} + \frac{bh^3}{12} = \frac{F}{12} (h^2 + b^2), \quad (5.25)$$

где $bh = F$ — площадь прямоугольника.

Момент сопротивления W_z прямоугольника по определению

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{I_z}{h/2}. \text{ Подставляя из (5.23) значение } I_z, \text{ получим}$$

$$\left. \begin{aligned} W_z &= \frac{bh^2}{6}. \\ \text{Соответственно } W_y &= \frac{hb^2}{6}. \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

Б. Моменты инерции и моменты сопротивления треугольника

Учтем, что центр тяжести треугольника лежит от основания на расстоянии, равном $1/3$ его высоты (рис. 5.7). Выбираем на-

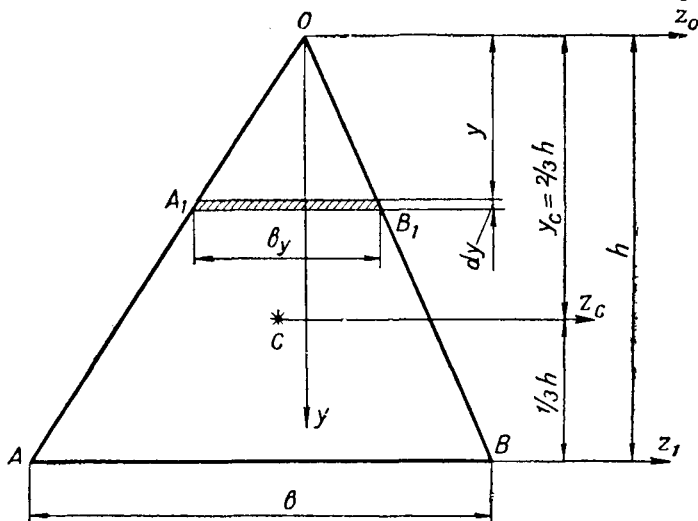


Рис. 5.7.

чало координат (точку O) в вершине треугольника. Величина элементарной площадки, лежащей на расстоянии y от оси z , равна $dF = \frac{y}{h} \cdot b dy$. Таким образом,

$$I_{z_0} = \int_F y^2 dF = \frac{b}{h} \int_0^h y^3 dy = \frac{bh^3}{4}.$$

Моменты инерции относительно центральной оси z (на рис. 5.7 обозначена z_c) и относительно основания z_1 определяются по уравнениям:

$$I_z = I_{z_0} - \left(\frac{2}{3} h\right)^2 F = \frac{bh^3}{4} - \frac{4}{18} bh^3 = \frac{bh^3}{36};$$

$$I_{z_1} = I_z + \left(\frac{h}{3}\right)^2 F = \frac{bh^3}{36} + \frac{bh^3}{18} = \frac{bh^3}{12}.$$

Следовательно,

$$I_{z_0} = \frac{bh^3}{4}; \quad I_z = \frac{bh^3}{36}; \quad I_{z_1} = \frac{bh^3}{12}. \quad (5.27)$$

Моменты сопротивления (учитывая, что $y_{\max}^{(0)} = \frac{2}{3} h$ и $y_{\max}^{(1)} = \frac{1}{3} h$) будут равны

$$W_z^{(0)} = \frac{I_z}{\frac{2}{3} h} = \frac{bh^2}{24}.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Соответственно } W_z^{(1)} = \frac{I_z}{\frac{1}{3} h} = \frac{bh^2}{12}. \end{array} \right\} (5.28)$$

В. Моменты инерции и моменты сопротивления кольца и круга

Рассмотрим кольцо с наружным радиусом r и внутренним r_0 и вычислим его полярный момент инерции, т. е. интеграл вида

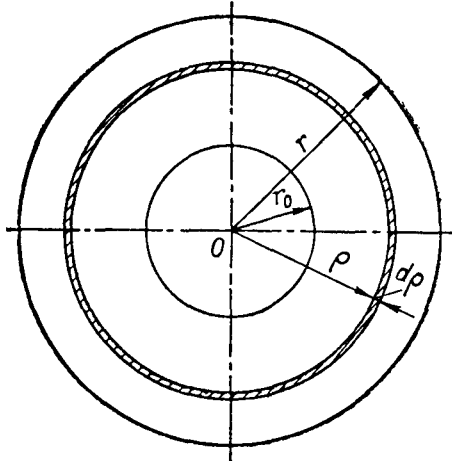


Рис. 5.8.

$I_p = \int_F \rho^2 dF$. Для этого выделим элементарную площадку в форме тонкого кольца (рис. 5.8) шириной dr и площадью $dF = 2\pi r dr$.

Подставляя значение dF в (5.12), определяем, что

$$J_p = \int_F \rho^2 dF = \int_{r_0}^r \rho^2 2\pi\rho d\rho = \frac{\pi(r^4 - r_0^4)}{4}. \quad (5.29)$$

Полярный момент инерции можно записать и в другом виде, а именно:

$$J_p = \frac{\pi r^4}{2} \left(1 - \frac{r_0^4}{r^4}\right) = \frac{\pi r^4}{2} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi d^4}{32} (1 - \alpha^4), \quad (5.30)$$

где $\alpha = \frac{r_0}{r}$ — отношение внутреннего радиуса к наружному. При $r_0 = 0$ $\alpha = 0$ и тогда

$$J_p = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (5.31)$$

Полярный момент сопротивления для кольца

$$W_p = \frac{J_p}{r} = \frac{\pi r^3}{2} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi d^3}{16} (1 - \alpha^4). \quad (5.32)$$

Соответственно для сплошного круга (отверстие отсутствует)

$$W_p = \frac{\pi r^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16}. \quad (5.33)$$

На флоте используются технические средства, которые имеют сечение в виде тонкого кольца толщиной δ . Тогда полярный момент инерции и полярный момент сопротивления такой фигуры приближенно будут равны, принимая $\rho \approx r_{cp} = \text{const}$ и $F = 2\pi r_{cp} \delta$.

$$\left. \begin{aligned} J_p &= \int_F r_{cp}^2 \cdot dF = r_{cp}^2 F = 2\pi r_{cp}^3 \delta = \frac{\pi d_{cp}^3 \delta}{4}; \\ W_p &= \frac{J_p}{r} = 2\pi r_{cp}^2 \delta = \frac{\pi d_{cp}^2 \delta}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

На практике часто принимают, что $r_{cp} = r$ и $F = 2\pi r \delta$, где r — наружный радиус кольца.

Зная, что полярный момент инерции связан с осевыми зависимостью (5.13), определяем осевые (экваториальные) моменты инерции кольца.

$$I_y = I_z = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi r^4}{4} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi d^4}{64} (1 - \alpha^4). \quad (5.35)$$

Соответственно для тонкого кольца

$$I_y = I_z = \pi r_{cp}^3 \delta = \frac{\pi d_{cp}^3 \delta}{8}. \quad (5.36)$$

Осевые моменты сопротивления кольца

$$W_y = W_z = \frac{\pi d^3}{32} (1 - \alpha^4) \quad (5.37)$$

и для тонкого кольца

$$W_y = W_z = \pi r_{\text{ср}}^2 \delta = \frac{\pi d_{\text{ср}}^2 \delta}{4}. \quad (5.38)$$

Радиусы инерции кольца:
полярный

$$i_p = \sqrt{\frac{I_p}{F}} = \sqrt{\frac{\pi r^4 (1 - \alpha^4)}{2\pi r^2 (1 - \alpha^2)}} = r \sqrt{\frac{1 + \alpha^2}{2}}; \quad (5.39)$$

соответственно осевые

$$i_y = i_z = \frac{r}{2} \sqrt{1 + \alpha^2}. \quad (5.40)$$

При $\alpha = 0$

$$i_p = \frac{r}{\sqrt{2}}; \quad i_y = i_z = \frac{r}{2}. \quad (5.41)$$

Г. Моменты инерции и моменты сопротивления плоских фигур сложной формы

Используя известное положение математики, можно записать, что

$$I_z = \int_F y^2 dF = \int_{F_1} y^2 dF + \int_{F_2} y^2 dF + \dots + \int_{F_n} y^2 dF,$$

где F_1, F_2, \dots, F_n — площади отдельных фигур, на которые может быть мысленно разделена сложная фигура. Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} I_z &= I_z^{(1)} + I_z^{(2)} + \dots + I_z^{(n)} \\ \text{Аналогично } I_y &= I_y^{(1)} + I_y^{(2)} + \dots + I_y^{(n)} \end{aligned} \right\} \quad (5.42)$$

Так, для фигуры, представленной на рис. 5.2, можно записать, что ее момент инерции относительно оси y_n

$$I_{y_n}^{(1)} = \frac{b_1 h_1^3}{12} + a_1^2 F_1 = \frac{24 \cdot 1,6^3}{12} + 0,8^2 \cdot 24 \cdot 1,6 = 32,8 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_n}^{(2)} = I_{y_1} + a_2^2 F_2 = 747 + 9,6^2 \cdot 18,1 = 1417 \text{ см}^4,$$

где $I_{y_1} = 747 \text{ см}^4$ и $F_2 = 18,1 \text{ см}^2$ взяты из ГОСТ.

Следовательно, $I_{y_n} = I_{y_n}^{(1)} + I_{y_n}^{(2)} = 32,8 + 1417 \approx 1450 \text{ см}^4$.

§ 22. ИЗМЕНЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПРИ ПОВОРОТЕ
КООРДИНАТНЫХ ОСЕЙ НА УГОЛ α

В рассматриваемом случае (рис. 5.9) положение начала координат не изменяется; имеет место поворот координатных осей на угол α , отсчитываемый от оси y , против хода часовой стрелки (положительное направление).

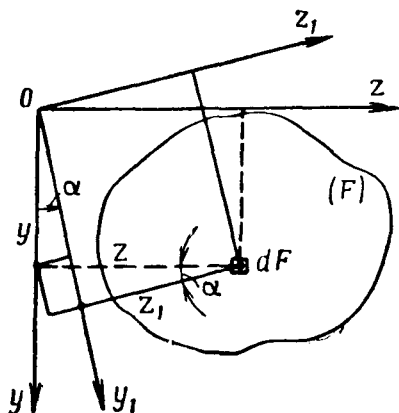


Рис. 5.9.

Пусть дана фигура, моменты инерции которой относительно осей z и y известны. Как изменяются моменты инерции, если оси будут повернуты на угол α (рис. 5.9). Заданы:

$$I_z = \int_F y^2 dF; \quad I_y = \int_F z^2 dF; \quad I_{yz} = \int_F yz dF.$$

Определить:

$$I_{z_1} = \int_F y_1^2 dF; \quad I_{y_1} = \int_F z_1^2 dF; \quad I_{y_1 z_1} = \int_F y_1 z_1 dF.$$

Координаты площадки dF в новой системе Oy_1z_1 выражаются через старые координаты уравнениями (рис. 5.9):

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= y \cos \alpha + z \sin \alpha; \\ z_1 &= z \cos \alpha - y \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (5.43)$$

Подставляя значения новых координат из (5.43) в уравнения, определяющие I_{z_1} , I_{y_1} , $I_{y_1 z_1}$, получим

$$\begin{aligned} I_{z_1} &= \int_F y_1^2 dF = \int_F (y \cos \alpha + z \sin \alpha)^2 dF = \\ &= \cos^2 \alpha \int_F y^2 dF + \sin 2\alpha \int_F yz dF + \sin^2 \alpha \int_F z^2 dF \end{aligned}$$

или

$$I_{z_1} = I_z \cos^2 \alpha + I_{yz} \sin 2\alpha + I_y \sin^2 \alpha. \quad (5.44)$$

Соответственно можно показать, что

$$I_{y_1} = I_z \sin^2 \alpha - I_{yz} \sin 2\alpha + I_y \cos^2 \alpha; \quad (5.45)$$

$$I_{y_1 z_1} = I_{yz} \cos 2\alpha - \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha. \quad (5.46)$$

Из равенств (5.44) и (5.45) с учетом (5.13) следует

$$I_{y_1} + I_{z_1} = I_y + I_z = I_p = \text{const.} \quad (5.47)$$

§ 23. ГЛАВНЫЕ ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ОСИ ИНЕРЦИИ

Проследим, как изменяется центробежный момент инерции при повороте осей. Допустим, оси поворачиваются на угол $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$. Тогда из уравнения (5.46)

$$I_{y_2 z_2} = I_{yz} \cos 2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

или

$$I_{y_2 z_2} = -I_{yz} \cos 2\alpha - \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha = -I_{y_1 z_1}. \quad (5.48)$$

Из уравнения (5.48) видно, что при повороте осей Oy_1z_1 на угол 90° против хода часовой стрелки центробежный момент инерции изменяет свой знак. Следовательно, при каком-то угле α_0 центробежный момент инерции обращается в нуль.

Главными центральными осями инерции плоской фигуры называются оси, проходящие через центр тяжести и расположенные в плоскости фигуры, центробежный момент инерции относительно которых равен нулю.

Из определения главных центральных осей инерции следует, что

$$O = I_{yz} \cos 2\alpha_0 + \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha_0.$$

Откуда

$$\text{tg } 2\alpha_0 = \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y}. \quad (5.49)$$

Можно доказать, что, хотя сумма осевых моментов инерции относительно любых взаимно перпендикулярных центральных

осей является величиной постоянной, но относительно главных осей один из моментов инерции будет иметь максимальное значение, а другой — минимальное. При подстановке значения угла из уравнения (5.49) в (5.44) и (5.45) после преобразования получаем

$$I_{\frac{\max}{\min}} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{yz}^2}, \quad (5.50)$$

где знак «+» относится к I_{\max} , а знак «—» к I_{\min} .

ГЛАВА 6

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛАХ

§ 24. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТАТИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА

При решении задач статики абсолютно твердого тела мы не рассматривали свойства материала, из которого выполнено тело. Однако в природе абсолютно твердых тел не существует. Детали всех механизмов, машин и приборов под действием внешних сил деформируются, т. е. изменяют размеры, а иногда и форму. Характер и величина деформаций связаны с действующими силами и со структурой (строением) материалов. В статике деформируемого тела изучается сопротивление тел действующим на них силам, что позволяет выбрать надежные размеры тел. Все тела можно разделить по форме на несколько групп, а именно:

а) Стержни. Стержень — тело, форма которого может быть образована движением плоской неизменной или изменяющейся фигуры при условии, что центр тяжести ее остается на некоторой направляющей линии — кривой (кривой стержень) или прямой (прямой стержень), а плоскость фигуры нормальна к направляющей линии; при этом размеры фигуры невелики по сравнению с длиной стержня. Направляющая линия называется осью стержня, а фигура, получающаяся в сечении, плоскостью, нормальной к оси, называется поперечным сечением стержня.

Стержень, у которого поперечные сечения не очень малы по сравнению с длиной его оси, часто называют брусом.

б) Пластинки и оболочки — тела, у которых два размера значительно превышают третий (толщину). Если тело ограничено двумя параллельными плоскостями при малой толщине, оно называется пластиной, если двумя криволинейными поверхностями, — оболочкой (корпуса ракет, торпед и другой техники). Если толщина пластинки превосходит некоторый предел, она называется плитой.

в) Массив. Тела, у которых все три размера имеют одинаковый порядок.

В статике деформируемого тела обычно рассматриваются приближенные методы расчета на прочность, жесткость и устойчивость элементов механизмов и машин, имеющих в основном форму стержня.

Деталь механизма или машины считается прочной, если она в условиях эксплуатации способна сопротивляться действию нагрузок без разрушения в течение определенного времени.

Элемент механизма или машины считается достаточно жестким, когда его деформации не превышают допустимой величины. Жесткость тесно связана с понятием о деформациях.

Элемент механизма или машины считается устойчивым, когда под действием приложенных нагрузок он сохраняет свою первоначальную форму равновесия.

Понятие об устойчивости можно иллюстрировать примером сжатия тонкого стержня (например, линейки) осевыми силами. При достижении силы определенной величины линейка внезапно выпучивается в сторону — происходит потеря устойчивости прямой формы, что может вызвать разрушение.

Под действием наружного давления оболочка (мина, корпус подводной лодки) может потерять свою первоначальную форму — происходит потеря устойчивости оболочки.

Сопротивление материалов действию динамических нагрузок (например, ударной) значительно слабее, чем статических. Расчеты, связанные с динамическим характером нагрузки, будут частично рассмотрены в динамике.

Основными задачами статики деформируемого тела являются:

— установление размеров и рациональной формы элементов механизмов машин и приборов, обеспечивающих их прочность, жесткость, устойчивость при их наименьшем весе;

— определение допустимых нагрузок и получающихся при этом деформаций при заданных размерах и форме элементов машин.

Требования наибольшей необходимой долговечности и наименьшей затраты материала противоречат друг другу. Статика упругого тела позволяет в известной мере сочетать эти два требования и установить оптимальные размеры, обеспечивающие требуемую долговечность детали без излишнего расходования материала.

§ 25. ОСНОВНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ, ПРИНИМАЕМЫЕ В СТАТИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА

При изучении статики деформируемого тела вводятся следующие основные допущения.

1-е допущение — о физической однородности и непрерывности материала. Предполагается, что состав тела во всех точках его объема одинаков и материал полностью заполняет весь объем. Допущение вполне оправдано для таких материалов, как сталь, медь, чугун и другие, и условно для таких материалов, как бетон, древесина. Расчеты, основанные на допущении о сплошности и однородности строения, дают вполне удовлетворительные результаты по сравнению с опытами.

2-е допущение — об изотропности и ортотропности материала. Однородные материалы называются изотропными, если они

имеют одинаковые физико-механические свойства во всех направлениях (например, сталь). Ортоотропными материалами называются такие, которые обладают однородностью, но имеют одинаковые механические свойства только для определенных направлений волокон, расположенных параллельно какой-либо одной оси.

Анизотропными материалами называются такие, которые не обладают свойствами изотропности или ортоотропности.

В дальнейшем при изучении напряженного состояния мы будем полагать, что детали изготовлены из изотропного (сталь, медь и др.) или ортоотропного материала (текстурированная электротехническая сталь, кованая или штампованная сталь).

Под действием внешних сил изменяются размеры и форма тела. Этому изменению сопротивляются силы взаимодействия между частицами тела — силы упругости.

3-е допущение — об отсутствии начальных внутренних усилий в теле до приложения нагрузки. В действительности даже при отсутствии нагрузки имеются внутренние усилия (в стальных деталях — от неравномерного остывания, в бетоне — от затвердевания, в дереве — от высыхания и т. д.), что вносит некоторую неточность в расчет, так как неизвестны значения этих усилий.

4-е допущение (принцип Сен-Венана) состоит в том, что в точках тела, достаточно удаленных от места приложения нагрузок, внутренние силы не зависят от характера приложения нагрузок. Это допущение, подтвержденное исследованиями методами теории упругости, позволяет значительно упростить расчеты, связанные с прочностью и деформациями тел. Так, если нагрузки распределены по некоторой небольшой площадке тела в крайнем торцевом его сечении, можно их для расчета заменить равнодействующей — сосредоточенной силой и эта замена не влияет на распределение внутренних усилий в расчетном сечении, расположенном на некотором удалении от торцевого.

5-е допущение — о независимости действия сил. Принцип независимости действия сил гласит: результат воздействия на тело системы сил равен сумме результатов воздействия каждой из прикладываемых к телу сил в любой последовательности. Применение этого принципа возможно, если принять, что:

— перемещения точек тела, включая перемещения точек приложения нагрузок, малы по сравнению с размерами тела;

— между перемещениями точек тела в результате деформаций и приложенными нагрузками существует линейная зависимость.

6-е допущение — гипотеза плоских сечений. Плоские поперечные сечения, проведенные в стержне до деформаций, остаются плоскими и после деформаций.

§ 26. КЛАССИФИКАЦИЯ ДЕФОРМАЦИИ

Деформации бывают упругими и остаточными.

Деформации называются упругими, если после снятия нагрузки (силы, пары сил) форма и размеры деталей полностью вос-

становливаются. В том случае, когда после снятия нагрузки первоначальная форма и размеры тела не восстанавливаются, деформации называются остаточными или пластическими.

Таким образом, остаточной деформацией называется часть деформации, не исчезающая после устранения воздействий, вызвавших ее.

В дальнейшем будем полагать, что деформации малы и являются упругими.

Выделим мысленно в теле элементарный параллелепипед. Под действием приложенных сил он изменит свою форму и размеры. Такую деформацию геометрически можно расчленить на линейную и угловую.

Линейная деформация характеризует изменение линейных размеров ребер кубика. Угловая деформация (угол сдвига) характеризует изменение первоначально прямого угла между гранями кубика.

Зная деформации отдельных элементов тела и условия его закрепления, можно определить новые координаты точек тела после деформации, т. е. определить их перемещения. Как правило, в машинах, приборах и механизмах эти перемещения должны быть упругими и не должны превосходить определенных допускаемых величин. Это условие называется условием жесткости.

§ 27. МЕТОД СЕЧЕНИЙ

Под действием приложенных нагрузок тело изменяет свою форму и размеры до тех пор, пока внутренние силы — силы упругости — не уравновесят приложенные — внешние нагрузки. Полученное состояние тела называется напряженным состоянием.

В дальнейшем в соответствии с гипотезой о сплошности материала будем полагать внутренние силы непрерывно распределенными по сечению тела.

В случае если внутренние силы не могут уравновесить внешние, тело разрушается.

Для определения внутренних сил, возникающих в произвольном сечении деформируемого тела, применяют метод сечений.

Метод сечений дает возможность установить наличие и величины внутренних сил в теле путем мысленного рассечения его плоскостью или поверхностью и позволяет в дальнейшем рассматривать внутренние силы как внешние по отношению к отсеченной части тела. Рассмотрим прямой брус (рис. 6.1), находящийся в равновесии под действием пространственной системы сил. Мысленно разрежем его в сечении $a-a$ и отбросим левую часть I , заменив ее действие на правую внутренними силами. Внутренние силы могут быть приведены к главному вектору и главному моменту. За центр приведения обычно принимают центр тяжести сечения. При выбранной системе координат проекции главного вектора и главного момента внутренних сил будут (рис. 6.1):

— продольная сила \bar{N} , направленная вдоль оси бруса, совпадающей с осью x ;

— поперечные силы \bar{Q}_y и \bar{Q}_z , лежащие в плоскости сечения и направленные по соответствующим координатным осям y и z ;

— изгибающие моменты M_y и M_z , моменты системы сил, заменяющие в данном поперечном сечении действие отброшенной части бруса на его оставшуюся часть, взятые относительно центральных осей y и z сечения бруса соответственно;

— крутящий момент $M_K = M_x$, момент системы сил, заменяющий в данном поперечном сечении действие отброшенной части бруса на его оставшуюся часть, взятый относительно оси бруса.

Для определения шести неизвестных используют шесть уравнений равновесия системы сил, произвольно расположенных в пространстве. Продольную и поперечные силы, изгибающие и

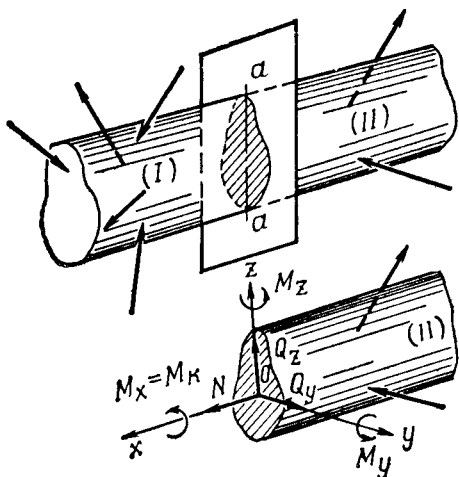


Рис. 6.1.

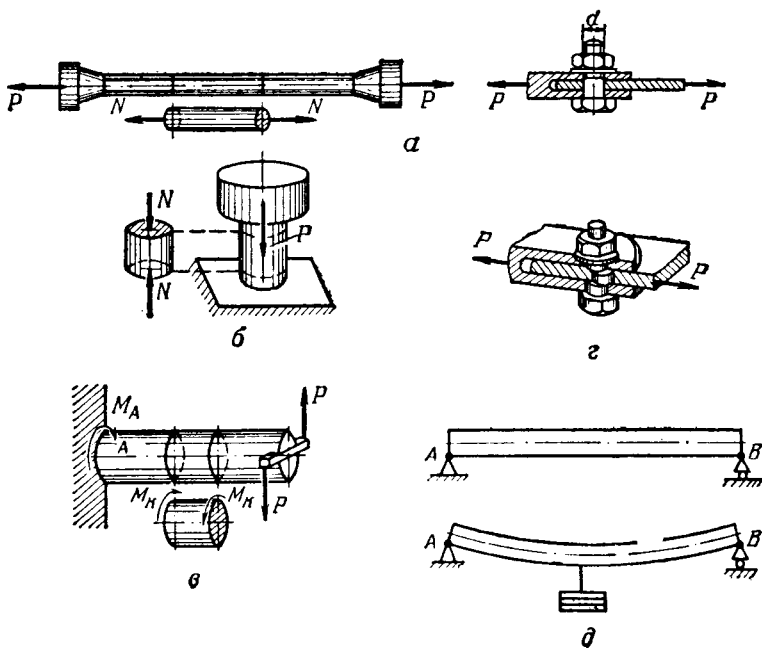


Рис. 6.2.

крутящий моменты часто называют внутренними усилиями или внутренними силовыми факторами.

Если приложенные силы, включая реакции, лежат в одной плоскости, например Oxy , для уравнивания отсеченной части необходимо приложить продольную силу N , поперечную Q_y и изгибающий момент $M_x = M_z$. Для определения N , Q , M_x используют три уравнения равновесия плоской системы сил.

В отдельных случаях (рис. 6.2) в поперечном сечении стержня могут возникнуть только:

- продольная сила N — растяжение или сжатие;
- поперечные силы Q_y или Q_z — сдвиг;
- крутящий момент $M_x = M_z$ — кручение;
- изгибающие моменты M_y или M_z — чистый изгиб.

Все перечисленные выше деформации являются простейшими. Наличие нескольких усилий в поперечном сечении, например изгибающих и крутящего моментов, приводит к сложным деформациям (сложное сопротивление).

§ 28. НАПРЯЖЕНИЕ

Для определения внутренних сил, действующих в различных точках выбранного сечения, необходимо знать закон распределения их по сечению. Будем полагать, что этот закон выражается в виде непрерывной функции координат точек сечения. Выделим элементарную площадку ΔF , на которую приходится соответствующая внутренняя сила $\Delta \bar{R}$. Тогда вектор средней интенсивности внутренних сил, действующих на выделенную площадку, определяется равенством

$$\bar{p}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta F}. \quad (6.1)$$

Предел этого отношения при $\Delta F \rightarrow 0$ называется вектором напряжения в данной точке

$$\bar{p} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta F}. \quad (6.2)$$

Напряжением в точке называется интенсивность внутренних сил, действующих на определенным образом ориентированную площадку, мысленно проведенную через данную точку тела. Напряжение равно пределу отношения главного вектора внутренних сил, действующих на рассматриваемую площадку, к величине этой площадки при стягивании ее контура в точку.

За единицу измерения напряжения принимают в системе СИ Н/м^2 (кратные МН/м^2 и т. д.); в системе МКГСС кгс/м^2 (кратные кгс/см^2 , кгс/мм^2 и т. д.).

Очевидно, что в зависимости от того, как проведено сечение, будут различными и напряжения в данной точке. Поэтому следует

всегда указывать, в какой точке какого сечения действует данное напряжение.

Вектор полного напряжения может быть направлен под некоторым углом к выделенной площадке (рис. 6.3).

Внешней (внутренней) нормалью \bar{n} называется нормаль к элементарной площадке, взятой на поверхности тела или на сечении, направленная по отношению к рассматриваемой части тела во внешнюю (внутреннюю) сторону.

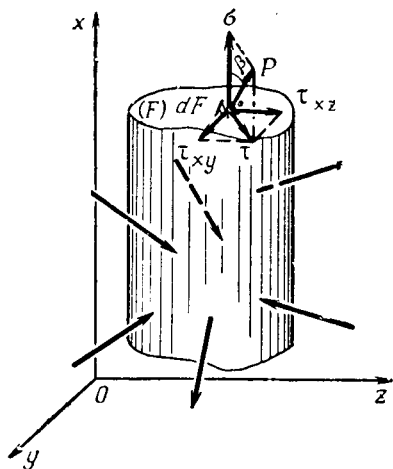


Рис. 6.3.

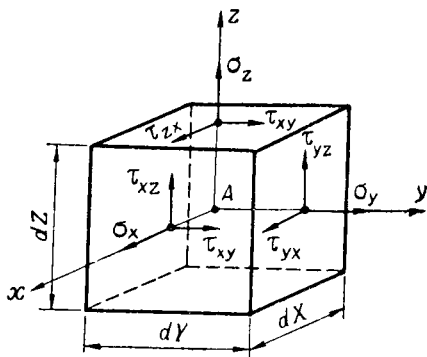


Рис. 6.4.

Составляющая полного напряжения, направленная по нормали к данной площадке, носит название нормального напряжения и обозначается σ . При совпадении направления $\bar{\sigma}$ с внешней нормалью нормальное напряжение берут со знаком «+» (растяжение), при совпадении с внутренней — со знаком «-» (сжатие). Составляющая полного напряжения, действующая в плоскости сечения, называется касательным напряжением и обозначается τ .

Из рис. 6.3 следует, что

$$\sigma = p \cos \beta; \quad \tau = p \sin \beta \quad \text{и} \quad p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}, \quad (6.3)$$

где β — угол между полным напряжением \bar{p} и внешней нормалью к данной площадке.

Для определения касательного напряжения достаточно знать его составляющие по двум осям координат (рис. 6.3), лежащим в плоскости площадки. Если на площадке ΔF касательное напряжение отсутствует ($\tau = 0$), тогда $p = \sigma$. Такая площадка называется главной площадкой, а напряжение главным напряжением.

Вырежем мысленно вокруг точки A элементарный кубик со сторонами $dx = dy = dz$ (рис. 6.4). По его граням в общем случае будут

действовать и нормальные и касательные напряжения. Нормальное напряжение обозначим σ с индексом координатной оси, которой параллельно данное нормальное напряжение. Касательные напряжения обозначим τ с двумя индексами. Первый индекс показывает, какой координатной оси перпендикулярна рассматриваемая площадка, а второй — какой координатной оси параллельно

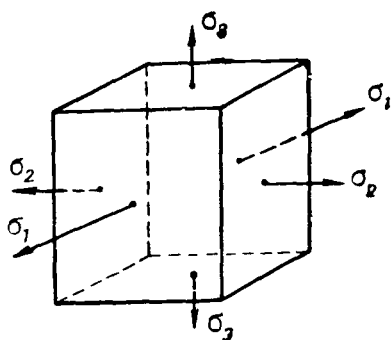


Рис. 6.5.

данное касательное напряжение. Так, τ_{xy} — касательное напряжение, действующее на площадке, перпендикулярной оси x , и направленное параллельно оси y .

Совокупность напряжений, действующих по граням бесконечно малого кубика, окружающего точку A , характеризует напряженное состояние в данной точке. Можно выбрать такое положение кубика, при котором по его граням будут действовать только одни нормальные напряжения, которые в этом случае будут главными напряжениями, а площадки — главными площадками. Главные напряжения обозначаются с учетом знака: наибольшее σ_1 , среднее σ_2 и наименьшее σ_3 (рис. 6.5).

Если $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 \neq 0$, $\sigma_3 \neq 0$, напряженное состояние называется объемным либо трехосным. Если одно из главных напряжений равно нулю, напряженное состояние называется плоским либо двухосным. Если два главных напряжения равны нулю, а третье отлично от нуля, напряженное состояние называется линейным либо одноосным.

ГЛАВА 7

ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ (СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ) В СЕЧЕНИЯХ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ (БРУСА) ПРИ ПРОСТЕЙШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Остановимся на вопросе определения внутренних усилий (силовых факторов) при простейших деформациях, используя метод сечений.

§ 29. ОСЕВОЕ РАСТЯЖЕНИЕ (СЖАТИЕ)

Осевым растяжением (сжатием) стержня называется такое напряженное состояние, при котором в его поперечных сечениях действуют только нормальные внутренние силы, равнодействующая которых в каждом сечении направлена вдоль оси стержня по внешней (растяжение) или по внутренней (сжатие) нормали к сечению.

Равнодействующая всех внутренних сил в данном сечении называется продольной силой \bar{N} . Рассмотрим последовательность определения продольных сил, действующих в сечениях стержня, на примере.

Пример. Определить, пренебрегая собственным весом, продольную силу, действующую в сечениях ступенчатого стержня, и построить график изменения ее вдоль оси стержня (эпюра продольных сил) (рис. 7.1).

Решение. Устанавливаем, что количество участков, для которых требуется определить продольную силу, равно трем.

Проводим ось Ox , направляя ее по линии действия заданных сил.

Определяем методом сечений продольную силу на первом участке длиной l_1 . Для этого мысленно рассекаем стержень сечением $I-I$, отбрасываем нижнюю часть, заменяя ее действие на верхнюю силой \bar{N}_1 , которую рекомендуется всегда направлять по внешней нормали к сечению (рис. 7.1, а). Это соответствует допущению, что стержень растянут. Условие равновесия отсеченной части будет

$$\sum X_i = P_1 + N_1 = 0, \text{ откуда } N_1 = -P_1 = -30 \text{ кН.}$$

Отрицательный знак указывает, что на первом участке стержень сжат.

Вычисляем аналогично продольные силы: \bar{N}_2 на участке l_2 (рис. 7.1, б) и \bar{N}_3 на участке l_3 (рис. 7.1, в) из уравнений:

$$\sum X_i = P_1 - P_2 + N_2 = 0, \text{ откуда } N_2 = P_2 - P_1 = 100 - 30 = 70 \text{ кН}$$

(растяжение);

$$\sum X_i = P_1 - P_2 + P_3 + N_3 = 0, \text{ откуда } N_3 = P_2 - P_1 - P_3 = 100 - 30 - 150 = -80 \text{ кН}$$

(сжатие).

График изменения продольной силы вдоль стержня, который называется эпюрой продольных сил, представлен на рис. 7.1, г. Штриховка, указывающая значение N в каждом сечении, должна быть перпендикулярной оси стержня. Из эпюры следует, что первый и третий участки сжаты (знак «-»), а второй (средний) растянут (знак «+»).

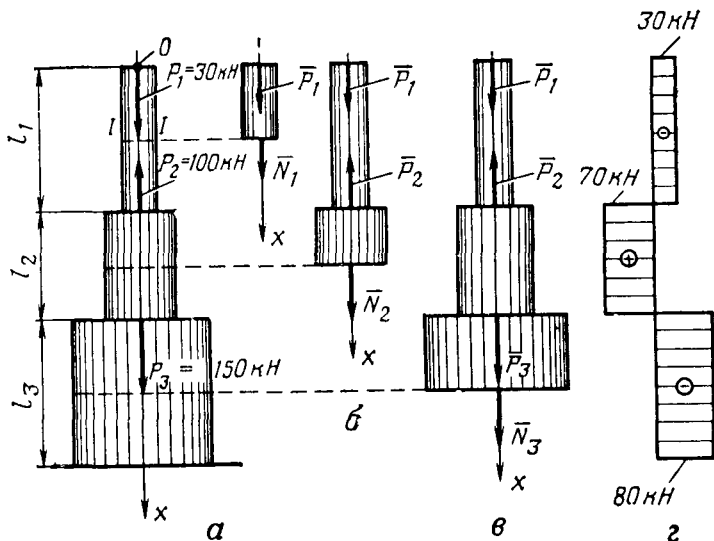


Рис. 7.1.

Наибольшие значения продольных сил: положительной (растяжение) $N_2 = 70 \text{ кН}$ и отрицательной (сжатие) $N_3 = 80 \text{ кН}$. Из рассмотренного примера следует, что величина продольной силы в любом поперечном сечении стержня равна алгебраической сумме проекций на ось стержня всех внешних сил, действующих на стержень по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Пользуясь этим определением, для вычисления N можно не изображать отсеченную часть и не составлять для нее уравнения равновесия.

§ 30. КРУЧЕНИЕ

Чистым кручением стержня (или кручением) называется такое состояние стержня, при котором в его поперечных сечениях имеются только внутренние касательные силы, причем в каждом сечении главный их вектор равен нулю, а главный момент равен крутящему. Чистое кручение, например, может быть осуществлено приложением к концам прямого стержня пар сил, лежащих в плоскостях, перпендикулярных оси стержня. Моменты этих пар будем обозначать M_ν и называть вращающими моментами.

Чистое кручение на практике встречается редко. Обычно вращающий момент передается на вал в местах посадки шкивов, зуб-

чатых колес и т. д. Вращающий момент создается либо за счет разности натяжений ветвей ременной передачи, либо силой, смещенной относительно оси вала при передаче зубчатым зацеплением и т. д. В таких случаях кроме M_B на вал действуют силы, вызывающие изгиб и другие виды деформаций.

При малых деформациях можно пользоваться принципом независимости действия сил, т. е. изучать кручение независимо от других видов деформаций. Установим связь между вращающим моментом, угловой скоростью ω и передаваемой мощностью N . Из курса физики известно, что

$$N = M_B \omega,$$

откуда

$$M_B = \frac{N}{\omega}. \quad (7.1)$$

Если принять за единицу измерения мощности 1 Вт, угловой скорости 1 рад/с, тогда вращающий момент M_B будет выражаться в Н·м.

В том случае, когда мощность задана в кВт, а частота вращения — в оборотах в минуту ($\omega = \frac{\pi n}{30}$), $N_{\text{кВт}} = M_B \cdot \frac{\pi n}{30} \cdot \frac{1}{1000}$, откуда $M_B = \frac{30000}{\pi} \cdot \frac{N}{n}$ или

$$M_B = 9550 \frac{N}{n} [\text{Н} \cdot \text{м}] = 974 \frac{N}{n} [\text{кгс} \cdot \text{м}], \quad (7.2)$$

где N выражено в кВт, а n — в оборотах в минуту.

Иногда мощность задается в лошадиных силах (1 л. с. = 0,736 кВт).

Тогда из формулы (7.2) следует

$$M_B = 716,2 \frac{N}{n} [\text{кгс} \cdot \text{м}] = 71620 \frac{N}{n} [\text{кгс} \cdot \text{см}],$$

где N выражено в л. с., а n — в оборотах в минуту.

Крутящий момент. В различных поперечных сечениях стержня (вала) возникают крутящие моменты M_K , для определения которых пользуются методом сечений.

Мысленно разрежем вал, например, по $a-a$ (рис. 7.2), отбросим одну его часть, например правую, и рассмотрим условие равновесия оставшейся. При этом для сохранения равновесия взаимодействие частей вала заменим внутренним — крутящим моментом, который для отсеченной части является внешним. Составим условие равновесия отсеченной левой части в виде

$$M_x = M_B^{(1)} - M_K = 0, \text{ откуда } M_K = M_B^{(1)}.$$

Если на отсеченную часть действует несколько вращающих моментов, из условия равновесия следует, что

$$M_k = \sum_{i=1}^m M_{Bi},$$

где m — число вращающих моментов, действующих на часть вала, расположенную по одну (либо слева, либо справа) сторону от рассматриваемого сечения.

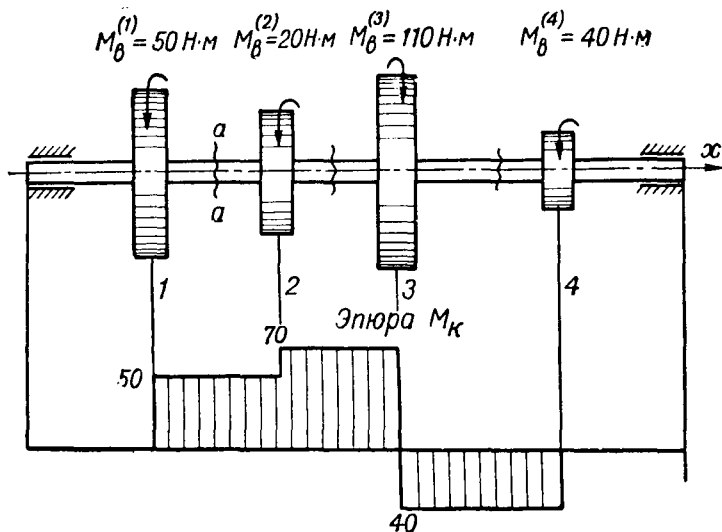


Рис. 7.2.

Крутящий момент в сечении численно равен алгебраической сумме вращающих моментов, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Графическое изображение изменения величины крутящего момента в каждом поперечном сечении вдоль оси вала от нагрузки, заданной по величине и направлению, называется эпюрой крутящего момента. При построении эпюры M_k условно может быть принято следующее правило знаков: если смотреть со стороны сечения, когда вращающий момент стремится повернуть оставшуюся, например левую, от сечения часть стержня против хода часовой стрелки, крутящий момент в сечении считают положительным.

Может быть принято и другое правило знаков; важно его придерживаться на всей длине вала.

Пример построения эпюры M_k представлен на рис. 7.2.

Из построенной эпюры следует, что наибольшее значение крутящего момента равно $70 \text{ Н}\cdot\text{м}$ и он действует на участке 2—3.

§ 31. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ И ИХ ОСНОВНЫЕ ТИПЫ

Стержень, работающий на изгиб, называется балкой. Внешние силы, действующие на балку, условно делят на приложенные (заданные) и реакции опор; величина и направление последних зависят от приложенных сил и характера опорного устройства (см. главу 1).

Опорой называется устройство, соединяющее балку с основанием и налагающее ограничение (связи) на ее перемещения. В дальнейшем под опорами следует понимать расчетные схемы действительных опор.

Опорной реакцией называют главный вектор системы сил, заменяющий действие опоры на балку.

Опорным моментом называют главный момент системы сил, заменяющий действие опоры на балку при приведении этой системы к точке, принятой за точку опоры. Напомним определение основных опорных устройств, используемых в балках.

Опора A (рис. 7.3, a), налагающая полное число связей и не допускающая никаких перемещений, называется защемляющей опорой (защемление — заделка). При плоской системе сил действие указанной опоры можно заменить опорным моментом и двумя ортогональными составляющими полной реакции.

Опора A (рис. 7.3, b , $в$), допускающая вращение вокруг определенной оси, называется цилиндрической неподвижной или шарнирно-неподвижной опорой. Действие данной опоры может быть заменено двумя ортогональными составляющими полной реакции, направленными перпендикулярно оси цилиндра.

Опора B (рис. 7.3, b , $в$), допускающая вращение вокруг определенной оси и поступательное перемещение, параллельное определенной плоскости, называется цилиндрической подвижной или шарнирно-подвижной опорой. Действие подобной опоры может быть заменено реакцией, перпендикулярной опорной поверхности.

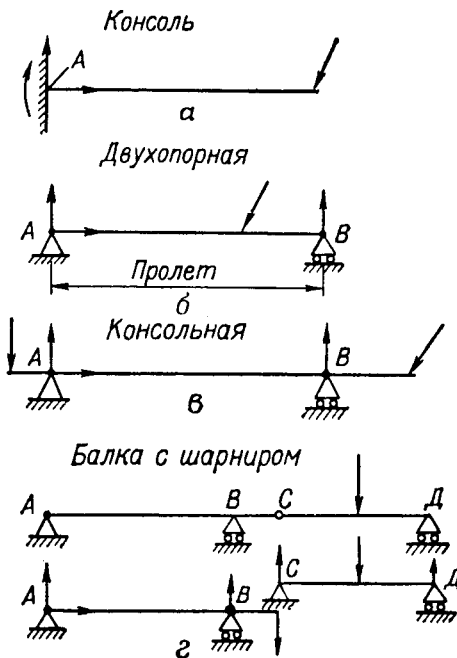


Рис. 7.3.

Кроме рассмотренных выше опор могут встретиться упруго перемещающиеся, шаровые и другие опоры.

Балка, у которой один конец зашцеилен, а другой свободен, называется консолью. Балка, имеющая одну опору шарнирно-неподвижную, а вторую шарнирно-подвижную, называется двухопорной. Двухопорная балка, имеющая один или два конца, свисающих над опорами, называется консольной.

Если две балки (рис. 7.3, г) соединены с помощью шарнира, то они называются шарнирными и могут быть представлены в виде двух самостоятельных балок.

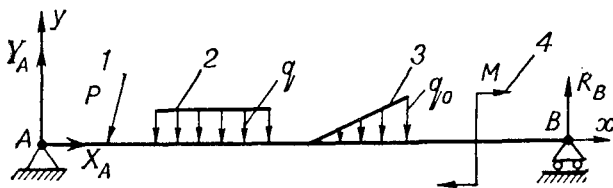


Рис. 7.4.

Отметим, что характерной особенностью всех выше рассмотренных балок является то, что они нагружены плоской системой сил и имеют не более трех опорных реакций, т. е. последние могут быть определены с помощью трех уравнений равновесия. Такие балки называются статически определенными.

Заданные нагрузки, рассматриваемые в данном курсе, представлены на рис. 7.4. Момент пары сил для краткости будем называть моментом.

§ 32. ИЗГИБАЮЩИЙ МОМЕНТ, ПОПЕРЕЧНАЯ И ПРОДОЛЬНАЯ СИЛЫ. ПОНЯТИЕ О ПЛОСКОМ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ

В дальнейшем ограничимся рассмотрением балок постоянного сечения по длине и имеющими в сечении хотя бы одну ось симметрии. Приложенные нагрузки лежат в плоскости, проходящей через ось балки и ось симметрии сечения (плоский изгиб).

При действии на стержень плоской системы сил (§ 27) в его поперечных сечениях возникают (рис. 7.5):

— продольная сила \bar{N} — составляющая главного вектора внутренних сил, действующая по оси стержня перпендикулярно плоскости сечения;

— поперечная сила \bar{Q} — составляющая главного вектора внутренних сил, лежащая в плоскости сечения;

— изгибающий момент $\bar{M}_и$ — главный момент, создаваемый внутренними силами относительно центральной оси z , перпендикулярной плоскости действия нагрузок.

Все указанные силовые факторы являются функциями координаты x сечения.

Рассмотрим изгиб балок, у которых нагрузки лежат не только в одной из главных плоскостей инерции, но и пересекают ось стержня под прямым углом. Такой изгиб носит название плоского поперечного прямого изгиба; при этом в каждом сечении будут действовать только поперечная сила и изгибающий момент (Q и $M_{из}$).

Далее будет показано, что изгибающий момент связан с нормальными напряжениями σ , а поперечная сила — с касательными τ . Следовательно, для определения этих напряжений надо уметь определять значения Q и $M_{из}$ в любом сечении, выражая их через внешние нагрузки, приложенные к балке. При плоском поперечном изгибе вычислять изгибающий момент и поперечную силу можно следующим образом.

$M_{из}(x)$ — изгибающий момент, численно равен алгебраической сумме моментов от всех нагрузок (включая реактивные), действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения, взятых относительно его центральной оси z , перпендикулярной плоскости действия сил*.

$Q(x)$ — поперечная сила, численно равная алгебраической сумме всех внешних сил (включая реактивные), действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Построение эпюр $Q(x)$ и $M(x)$ в функции координаты сечения x . Для определения положения наиболее опасного сечения при изгибе необходимо знать $Q(x)$ и $M(x)$ в каждом сечении. Графическое изображение изменения $Q(x)$ или $M(x)$, дающее величину поперечной силы или изгибающего момента в каждом поперечном сечении балки от нагрузки, заданной по величине и направлению, называется эпюрой поперечной силы и соответственно эпюрой изгибающего момента.

Используя метод сечения для определения изгибающего момента, можно рассматривать условия равновесия любой части балки, расположенной слева или справа от данного сечения. При этом если бы пользоваться правилами знаков, принятыми в статике абсолютно твердого тела, знаки изгибающего момента, действующего в данном сечении, получались бы разными в зависимости от того, какую часть балки мы бы считали оставшейся, а какую отбрасываемой (рис. 7.6). Поэтому целесообразно знак изгибающего момента связать с деформациями. Аналогичный вывод можно сделать и о выборе знака поперечной силы.

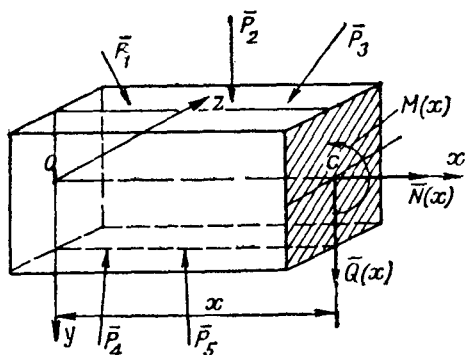


Рис. 7.5.

* В дальнейшем индекс «из» при $M_{из}(x)$ опускаем.

Изгибающий момент в данном сечении принимается положительным, если балка изгибается в выпуклость вниз, и отрицательным, если балка изгибается выпуклостью вверх (рис. 7.6, а). Если в данном сечении $M=0$, деформированная ось балки в этом сечении имеет точку перегиба.

При положительной поперечной силе в данном сечении смещение левой части по отношению к правой происходит вверх (рис. 7.6, б).

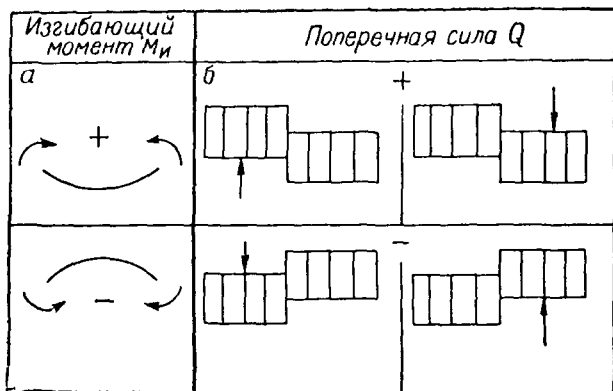


Рис. 7.6.

Рекомендуемая последовательность вычисления поперечной силы и изгибающего момента при построении эпюр:

- наметить направление реакций;
- составить уравнения равновесия, из которых определить величину и уточнить направление реакций; проверить, правильно ли они определены;
- наметить вдоль оси балки границы участков, которые определяются точками приложения сил, моментов или границами приложения распределенной нагрузки;
- записать выражения $Q(x)$ на каждом участке; вычислить кроме граничных и промежуточные значения Q в количестве, достаточном для построения эпюры $Q(x)$;
- записать выражения $M(x)$ для каждого участка и вычислить частные значения момента M в количестве, достаточном для построения эпюры $M(x)$;
- построить эпюры $Q(x)$ и $M(x)$, на которых показать найденные (числовые) значения ординат. Произвести проверку правильности построения эпюр;
- определить опасные сечения, в которых действуют наибольшие Q_{\max} и M_{\max} и численные значения последних.

§ 33. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ ЭПЮР ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛЫ И ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА

Пример. Построить эпюры $Q(x)$ и $M(x)$ для двухопорной балки (рис. 7.7), нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q .

Решение. Определяем реакции опор. В точках A и B реакции будут направлены вверх и равны между собой вследствие симметрии системы. Следовательно,

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2}.$$

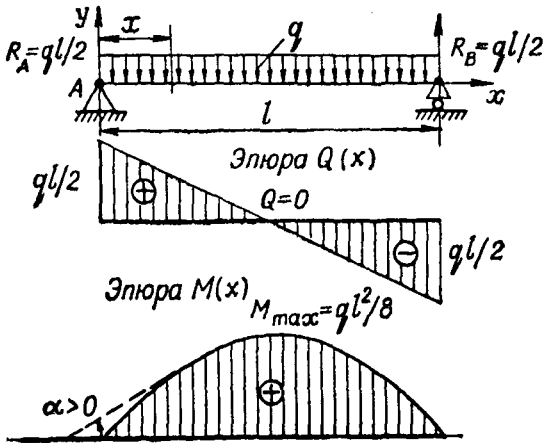


Рис. 7.7.

Балка по длине имеет один участок, при этом значение поперечной силы в сечении с координатой x будет

$$Q(x) = R_A - q \cdot x,$$

где $q \cdot x$ — нагрузка, создаваемая распределенной интенсивностью q на длине x .

Для построения эпюры $Q(x)$ достаточно знать два значения поперечной силы, например при $x=0$ и при $x=l$. Объясняется это тем, что $Q(x)$ изменяется по линейной зависимости:

$$\text{при } x=0 \quad Q(0) = R_A = \frac{ql}{2}; \quad \text{при } x=l \quad Q(l) = R_A - ql = -\frac{ql}{2}.$$

Записываем уравнение, определяющее изгибающий момент $M(x)$ в сечении x :

$$M(x) = R_A \cdot x - \frac{qx^2}{2} = \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2},$$

где $-qx \cdot \frac{x}{2}$ — момент от нагрузки qx на плече $\frac{x}{2}$.

Из полученного уравнения видно, что изгибающий момент по длине балки изменяется по уравнению квадратичной параболы. Для построения эпюры следует вычислить значение $M(x)$ не менее чем в трех точках вдоль оси балки.

Используя симметрию эпюры $M(x)$, выбираем на левой половине балки сечения, в которых определяем значения $M(x)$:

$$\text{при } x = 0 \quad M(0) = 0; \quad \text{при } x = \frac{l}{4} \quad M\left(\frac{l}{4}\right) = \frac{3}{32} ql^2;$$

$$\text{при } x = \frac{l}{2} \quad M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql^2}{8}.$$

Строим соответствующие эпюры (рис. 7.7) $Q(x)$ и $M(x)$.

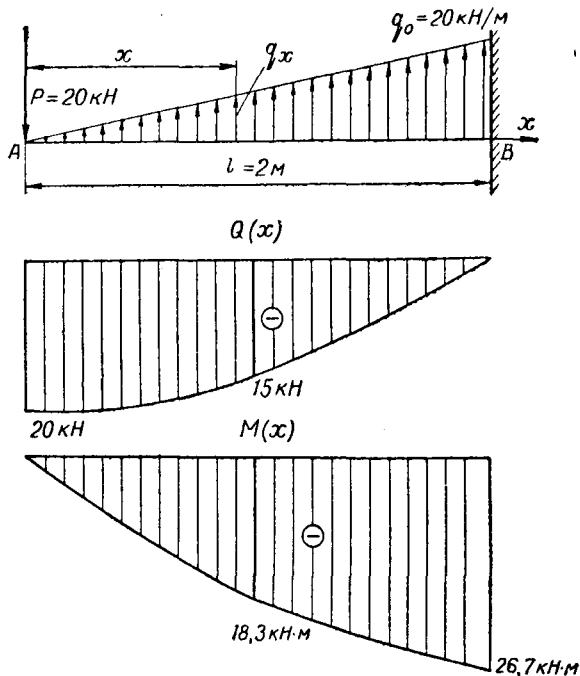


Рис. 7.8.

Определяем, что в опорных сечениях действует наибольшая поперечная сила

$$Q_{\max} = \frac{ql}{2}, \quad \text{в сечении посредине пролета наибольший изгибающий момент}$$

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8}.$$

Пример. Построить эпюры $Q(x)$ и $M(x)$ для консоли (рис. 7.8), если $P = 20\text{ кН}$ ($\sim 2\text{ т}$), $q_0 = 20\text{ кН/м}$ ($\sim 2\text{ т/м}$) и $l = 2\text{ м}$.

Решение. В общем случае защемление можно заменить опорным моментом и двумя составляющими полной реакции. Однако для консоли опорный момент и реакции можно не определять, если выбрать начало координат на свободном конце консоли. Консоль по длине имеет один участок.

Записываем уравнение, определяющее поперечную силу в сечении x :

$$Q(x) = -P + \frac{q_x \cdot x}{2}.$$

где q_x — интенсивность нагрузки в сечении с координатой x , определяемая из подобия треугольников.

$$\frac{q_x}{q_0} = \frac{x}{l}, \text{ откуда } q_x = q_0 \frac{x}{l}.$$

После подстановки получаем

$$Q(x) = -P + \frac{q_0 x^2}{2l} \text{ — уравнение квадратичной параболы.}$$

Определяем три частных значения поперечной силы:

$$Q(0) = -P = 20 \text{ кН;}$$

$$Q\left(\frac{l}{2}\right) = -P + \frac{q_0 \left(\frac{l}{2}\right)^2}{2l} = -P + \frac{q_0 l}{8} = -20 + \frac{20 \cdot 2}{8} = -15 \text{ кН;}$$

$$Q(l) = -P + \frac{q_0 l^2}{2l} = -P + \frac{q_0 l}{2} = -20 + \frac{20 \cdot 2}{2} = 0.$$

Записываем уравнение, определяющее изгибающий момент в сечении x :

$$M(x) = -P \cdot x + \frac{q_x \cdot x}{2} \cdot \frac{x}{3} = -P \cdot x + \frac{q_0 \cdot x^3}{6l} \text{ — уравнение кубической параболы,}$$

где $\frac{q_x \cdot x}{2}$ — нагрузка, лежащая по левую сторону от рассматриваемого сечения с координатой x , а $\frac{x}{3}$ — плечо нагрузки по отношению к рассматриваемому сечению.

Определяем не менее трех частных значений изгибающего момента:

$$M(0) = 0;$$

$$\begin{aligned} M\left(\frac{l}{2}\right) &= -P \frac{l}{2} + \frac{q_0 \left(\frac{l}{2}\right)^3}{6l} = -P \frac{l}{2} + \frac{q_0 l^2}{48} = \\ &= -\frac{20 \cdot 2}{2} + \frac{20 \cdot 2^2}{48} = -18,3 \text{ кН} \cdot \text{м;} \end{aligned}$$

$$M(l) = -Pl + \frac{q_0 l^3}{6l} = -Pl + \frac{q_0 l^2}{6} = -20 \cdot 2 + \frac{20 \cdot 2^2}{6} = -26,7 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Строим эпюры $Q(x)$ и $M(x)$. Из построений определяем: $|Q_{\max}| = 20$ кН в сечении A и $|M_{\max}| = 26,7$ кН·м в защемлении.

Пример. Построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента для двухопорной балки, представленной на рис. 7.9.

Решение. Опорные реакции в точках A и B направлены вверх. Из условий равновесия определяем, что

$$R_A = \frac{P \cdot b}{l} \text{ и } R_B = \frac{P \cdot a}{l}.$$

В рассматриваемом примере балку по длине следует разделить на два участка, а именно от опоры A до сечения, где приложена сила \bar{P} ($0 \leq x \leq a$); и от сечения, где приложена сила, до правой опоры B ($a \leq x \leq l$).

Записываем выражения поперечной силы по участкам

$$Q(x_1) = R_A = \frac{P \cdot b}{l} = \text{const.} \quad Q(x_2) = R_A - P = \frac{P \cdot b}{l} - P = -\frac{P \cdot a}{l} = \text{const.}$$

Записываем выражения изгибающего момента по участкам:

$$\begin{aligned} M(x_1) &= R_A \cdot x_1; & M(x_2) &= R_A x_2 - P(x_2 - a); \\ M(0) &= 0; & M(a) &= R_A \cdot a = \frac{P \cdot a \cdot b}{l}; \\ M(a) &= R_A \cdot a = \frac{P \cdot a \cdot b}{l}. & M(l) &= R_A \cdot l - P(l - a) = 0. \end{aligned}$$

Строим эпюры $Q(x)$ и $M(x)$. Из построенных эпюр следует, что при переходе через границу между участками на эпюре $Q(x)$ наблюдается скачок на

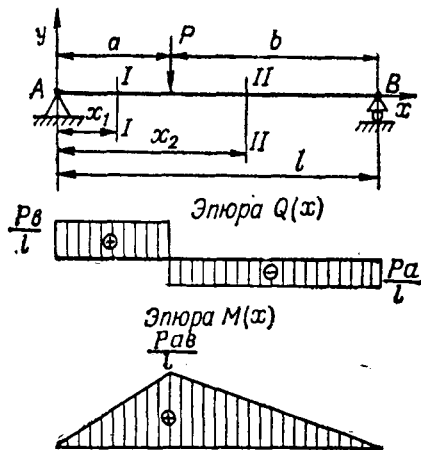


Рис. 7.9.

величину $R_A + R_B = P$. Наибольшие значения поперечной силы на опоре $R_A = \frac{P \cdot b}{l}$ или $R_B = \frac{P \cdot a}{l}$ в зависимости от значений величин a и b .

Наибольший изгибающий момент действует в граничном сечении и равен

$$M_{\max} = \frac{P \cdot a \cdot b}{l}. \quad (7.3)$$

В частном случае при $a = b = \frac{l}{2}$

$$M_{\max} = \frac{P \cdot l}{4}. \quad (7.4)$$

Единичная функция. Когда уравнения, определяющие $Q(x)$ и $M(x)$, имеют различный вид вдоль оси балки, т. е. балка имеет

несколько участков, целесообразно использовать так называемую единичную функцию, вид которой представлен на рис. 7.10. Обозначим единичную функцию $I_{a,x}$, где индексы a и x показывают, что единичная функция в пределах от 0 до a равна нулю, а от a до x постоянна и равна единице, т. е. при $x \leq a$ $I_{a,x} = 0$; при $x \geq a$ $I_{a,x} = 1$.

Используя единичную функцию, можно поперечную силу и изгибающий момент записать в виде не четырех, а только двух уравнений, каждое из которых действительно по всей длине балки:

$$Q(x) = R_A - P I_{a,x};$$

$$M(x) = R_A \cdot x - P(x - a) I_{a,x}.$$

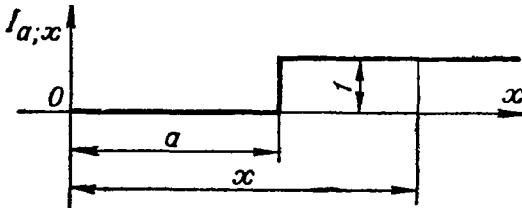


Рис. 7.10.

Действительно, при $x \leq a$ $I_{a,x} = 0$ получаем уравнения, определяющие значения $Q(x)$ и $M(x)$ на первом участке; при $x \geq a$ $I_{a,x} = 1$ получаем соответствующие уравнения для второго участка. Особенно запись $Q(x)$ и $M(x)$ упрощается в случае наличия многих участков вдоль оси балки.

§ 34. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ИЗГИБАЮЩИМ МОМЕНТОМ $M(x)$, ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛОЙ $Q(x)$ И ИНТЕНСИВНОСТЬЮ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ $q(x)$

Выделим на балке участок длиной dx , расположенный на расстоянии x от начала отсчета, на который действует внешняя распределенная нагрузка $q(x)$ (рис. 7.11, а).

На выделенный элемент балки (рис. 7.11, б) кроме распределенной нагрузки действуют слева $Q(x)$ и $M(x)$, справа $Q(x) + dQ(x)$ и $M(x) + dM(x)$. Рассмотрим условия равновесия выделенного элемента $ABCD$.

Проектируем все нагрузки на ось y , полагая, что на элементарной длине dx интенсивность постоянна и равна средней $q(x)$

$$\sum Y_i = Q(x) - Q(x) - dQ(x) + q(x) dx = 0.$$

Из полученного уравнения равновесия после простейших преобразований получаем, что

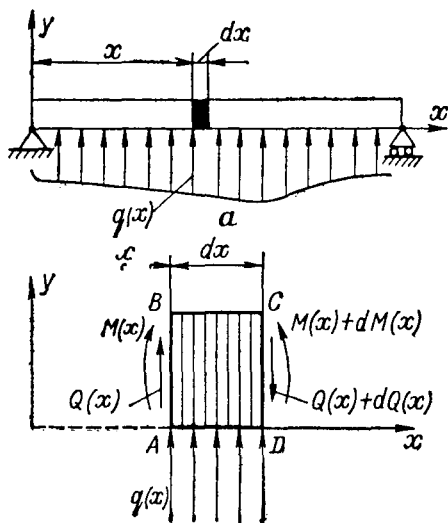
$$\frac{dQ}{dx} = q(x). \quad (7.5)$$

Интенсивность распределенной нагрузки в сечении с координатой x равна производной от поперечной силы, действующей в том же сечении по координате x .

Определяем сумму моментов относительно точки D :

$$\sum m_{Di} = -M(x) - Q(x) dx - \frac{q(x)(dx)^2}{2} + M(x) + dM(x) = 0.$$

В уравнении равновесия момент, действующий против хода часовой стрелки, принимаем положительным.



б

Рис. 7.11.

После сокращений и преобразований, пренебрегая малыми величинами с порядком малости выше первого, получаем

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x). \quad (7.6)$$

Производная от изгибающего момента по координате сечения равна поперечной силе, действующей в том же сечении.

Дифференциальные зависимости (7.5) и (7.6) получены проф. Д. И. Журавским*. Как следствие, из полученных дифференциальных зависимостей следует, что

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = q(x). \quad (7.7)$$

Используем полученные дифференциальные зависимости (7.5), (7.6) и (7.7) для контроля построения эпюр.

Пусть $q(x)$ непрерывная функция и $q(x) > 0$. Тогда при изменении знака $Q(x)$ с отрицательного на положительный $Q(x)|_{x=a} = 0$. Из зависимости (7.6) следует

$$\left. \frac{dM(x)}{dx} \right|_{x=a} = Q(a) = 0.$$

При этом значении $x=a$ изгибающий момент имеет минимальное значение. Соответственно при изменении знака $Q(x)$ с положительного на отрицательный ($q < 0$) изгибающий момент будет иметь максимальное значение (рис. 7.7).

Если поперечная сила $Q(x)$ на некотором участке балки равна нулю, тогда изгибающий момент $M(x)$ на этом участке будет иметь постоянное значение, т. е. участок подвергается чистому изгибу.

* Строитель ряда крупнейших мостов в России (1821—1891 гг.).

Если на некотором участке балки $q(x) = 0$, то на этом участке $Q(x) = \text{const}$, эпюра поперечной силы прямая, параллельная оси балки (рис. 7.9).

Из зависимости $\frac{d^2M}{dx^2} = q(x)$ следует, что, когда $q < 0$ (отрицательная), эпюра изгибающего момента направлена выпуклостью вверх (правило «зонтика»), и когда $q > 0$, эпюра направлена выпуклостью вниз (рис. 7.12).

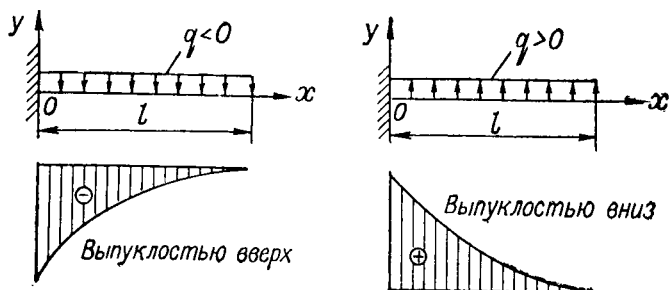


Рис. 7.12.

В месте приложения силы на эпюре $Q(x)$ будет скачок на величину силы. В месте, где приложена пара сил, на эпюре $M(x)$ будет скачок на величину момента пары.

На шарнирно-опертом конце балки при отсутствии пары сил, приложенной непосредственно над опорой, изгибающий момент равен нулю, а поперечная сила равна реакции опоры (рис. 7.9).

На защемленном конце балки изгибающий момент равен опорному моменту.

ГЛАВА 8

ДЕФОРМАЦИЯ РАСТЯЖЕНИЯ И СЖАТИЯ

При осевом растяжении (сжатии) принимают, а опытные исследования это подтверждают, что поперечные сечения стержня, плоские до деформации, остаются плоскими и параллельными и после деформации. Это позволяет считать, что нормальное напряжение (величина внутренних сил, приходящихся на единицу площади сечения) во всех точках поперечного сечения одинаково.

§ 35. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ЛИНЕЙНОМ (ОДНООСНОМ) НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

При определении напряжений и деформаций бруса при осевом растяжении (сжатии) следует отвлечься от способа приложения внешней нагрузки, например в крайних его сечениях, так как он практически не влияет на внутренние усилия в сечениях, достаточно удаленных от места приложения нагрузки (принцип Сен-Венана).

Продольная сила в данном поперечном сечении равна равнодействующей всех нормальных напряжений, т. е.

$$N = \int_F \sigma dF.$$

Для однородного изотропного материала исходя из гипотезы плоских сечений при одноосном напряженном состоянии нормальное напряжение σ по сечению постоянно, следовательно (рис. 8.1),

$$N = \sigma \cdot F,$$

откуда

$$\sigma = \frac{N}{F}. \quad (8.1)$$

Условие прочности при одноосном растяжении или сжатии соответственно должно быть записано в виде

$$\frac{N}{F} \leq [\sigma]_p; \quad \frac{|N|}{F} \leq [\sigma]_{сж}, \quad (8.2)$$

где $[\sigma]_p$ и $[\sigma]_{сж}$ — допускаемые напряжения соответственно на растяжение и сжатие, т. е. такие безопасные наибольшие напряжения, которые обеспечивают длительную работу детали*.

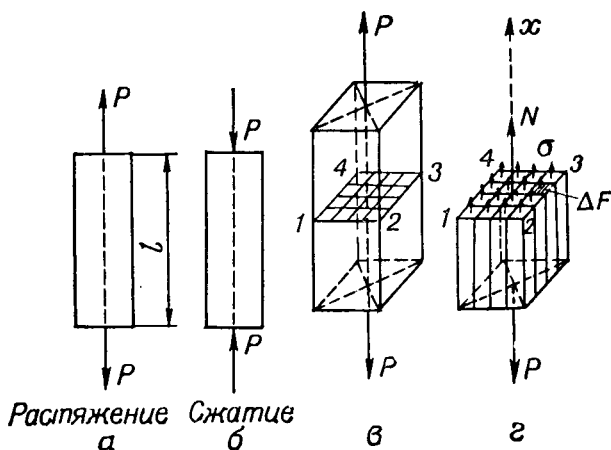


Рис. 8.1.

Под действием осевой силы стержень удлиняется либо укорачивается**. Разность между начальной и конечной длиной называется абсолютным удлинением (укорочением). Обозначим абсолютное удлинение стержня $l_1 - l = \Delta l$ (рис. 8.2), где l — первоначальная длина. Тогда относительное удлинение

$$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon. \quad (8.3)$$

В результате опытов установлено, что между напряжением σ и относительным удлинением ε существует до некоторого значения напряжения линейная зависимость, т. е.

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (8.4)$$

Коэффициент пропорциональности E в формуле (8.4) называется модулем продольной упругости или просто модулем упругости. E — физическая постоянная, характеризующая упругие свойства материала. Так как ε безразмерная величина, то размерность E будет такая же, как и σ , т. е. в системе СИ Н/м^2 ; МН/м^2 и т. д., в системе МКГСС кгс/см^2 ; кгс/мм^2 .

Так, для стали Ст. 3 при нормальных условиях среднее значение модуля упругости $E \approx 1,96 \cdot 10^5 \text{ МН/м}^2 = 2 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}^2$, для меди $E \approx 0,98 \cdot 10^5 \text{ МН/м}^2 = 1 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}^2$ и т. д.

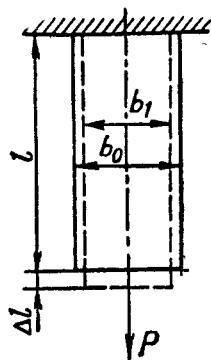


Рис. 8.2.

* Значения допускаемых напряжений даны в справочниках.

** В курсах «Сопротивление материалов» на чертежах показаны величины нагрузок.

Значения E для различных материалов могут быть взяты из справочников.

Из сравнений (8.1) и (8.3) следует, что

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{EF} = \frac{\sigma l}{E}. \quad (8.5)$$

Формула (8.5) выражает закон Гука. Величину $\frac{EF}{l}$ называют жесткостью стержня при растяжении (сжатии), а $\frac{EF}{l}$ — относительной жесткостью. Если стержень ступенчатый, следует определить по формуле (8.5) удлинение (укорочение) Δl_i каждого участка, а затем для определения изменения длины однородного стержня их алгебраически сложить, т. е.

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{E_i F_i} = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^n \sigma_i l_i, \quad (8.6)$$

где n — число участков и $E_i = E$ принято равным const.

Пример. Построить эпюры σ и Δl для ступенчатого стержня, рассмотренного в примере на стр. 83. Принять следующие значения величин:

$$F_1 = 3 \text{ см}^2; \quad F_2 = 5 \text{ см}^2; \quad F_3 = 8 \text{ см}^2;$$

$$l_1 = 1 \text{ м}; \quad l_2 = 0,75 \text{ м}; \quad l_3 = 1 \text{ м};$$

$$E = 2 \cdot 10^6 \cdot \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2} = 1,96 \cdot 10^5 \cdot \frac{\text{МН}}{\text{м}^2}.$$

При решении задачи на стр. 84 было найдено, что

$$N_1 = -30 \text{ кН}; \quad N_2 = 70 \text{ кН}; \quad N_3 = -80 \text{ кН}.$$

Решение. Определяем напряжения в поперечных сечениях по формуле (8.1):

$$\sigma_I = \frac{N_1}{F_1} = -\frac{30 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-4}} = -100 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2} \left(-981 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2} \right);$$

$$\sigma_{II} = \frac{N_2}{F_2} = \frac{70 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-4}} = 120 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2} \left(1180 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2} \right);$$

$$\sigma_{III} = \frac{N_3}{F_3} = -\frac{80 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 10^{-4}} = -100 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2} \left(-981 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2} \right).$$

По полученным данным строим эпюру распределения напряжений σ по длине стержня (рис. 8.3, б).

Определяем изменение длин участков по формуле (8.5)

$$\Delta l_1 = \frac{\sigma_1 l_1}{E} = -\frac{100 \cdot 1}{1,96 \cdot 10^5} = -0,51 \cdot 10^{-3} \text{ м } (-0,51 \text{ мм}).$$

Аналогично находим, что $\Delta l_2 = 0,46 \cdot 10^{-3} \text{ м } (0,46 \text{ мм}), \quad \Delta l_3 = -0,51 \cdot 10^{-3} \text{ м } (-0,51 \text{ мм}).$

Изменение длины стержня $\Delta l = \sum_{i=1}^3 \Delta l_i = -0,51 + 0,46 - 0,51 = -0,56 \text{ мм}.$

Перемещения различных сечений определяются следующим образом (рис. 8.3).

Перемещение нижнего сечения (зашемление) равно нулю.

Перемещение сечения, расположенного на расстоянии $l_3=100$ см от нижнего, равно Δl_3 , т. е. равно $-0,51 \cdot 10^{-3}$ м.

Перемещение сечения, расположенного на расстоянии $l_2+l_3=175$ см от нижнего, равно $\Delta l_3+\Delta l_2=-0,05 \cdot 10^{-3}$.

Перемещение верхнего сечения равно изменению длины всего стержня, т. е. $-0,56 \cdot 10^{-3}$ м. Откладываяем в выбранном масштабе эти перемещения от вертикали на соответствующих расстояниях от нижнего сечения. Соединяем полученные точки прямыми линиями. Полученная диаграмма называется эпюрой перемещений сечений стержня. Ординаты этой эпюры в масштабе изображают перемещения соответствующих сечений.

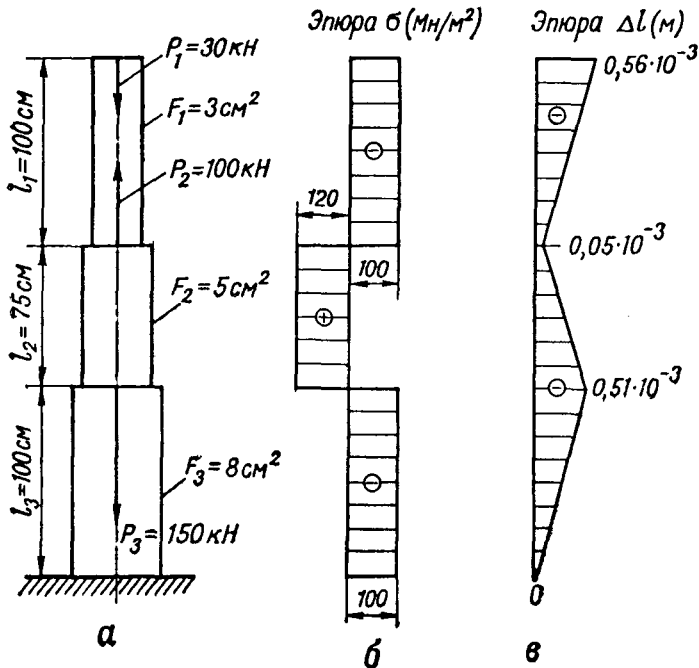


Рис. 8.3.

На рис. 8.3, в представлена эпюра перемещений сечений стержня. Знак «—» означает перемещение сечения вниз.

§ 36. КОЭФФИЦИЕНТ ПУАССОНА

Опыт показал, что при осевом растяжении стержня уменьшает-ся его поперечное сечение. Абсолютной поперечной деформацией называют величину, равную (рис. 8.2):

$$|\Delta b| = b_1 - b_0. \quad (8.7)$$

Соответственно относительная поперечная деформация

$$\epsilon' = \left| \frac{\Delta b}{b} \right|,$$

где при растяжении $\Delta b = -\epsilon' b$.

Отношение модулей относительной поперечной деформации $|\epsilon'|$ к относительной продольной $|\epsilon|$ в пределах применимости закона Гука называется коэффициентом поперечной деформации или коэффициентом Пуассона*.

$$\mu = \left| \frac{\epsilon'}{\epsilon} \right| \quad (8.8)$$

или при растяжении

$$\epsilon' = -\mu\epsilon. \quad (8.9)$$

В последнем равенстве удлинение полагаем положительным, а укорочение отрицательным.

Коэффициент Пуассона μ , как и модуль упругости E , является характеристикой упругих свойств материала. Пуассон показал, что в области упругих деформаций для каждого материала μ имеет вполне определенное значение. Так, для сталей опытным путем установлено, что $\mu = 0,25 \div 0,33$. Для меди $\mu = 0,31 \div 0,33$, алюминия $\mu = 0,32 \div 0,36$ и т. д.

Значение коэффициента Пуассона можно найти в справочниках.

Установлено, что при продольной и поперечной деформациях изменяется объем стержня. Относительное изменение объема определяется по формуле

$$\epsilon_V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{\sigma}{E} (1 - 2\mu). \quad (8.10)$$

Из уравнения (8.10) следует, что при $\mu = 0,5$ объем стержня не изменяется (например, при растяжении резинового стержня).

§ 37. ПОНЯТИЕ О НАПРЯЖЕНИЯХ И ДЕФОРМАЦИЯХ СТЕРЖНЯ С УЧЕТОМ ЕГО СОБСТВЕННОГО ВЕСА

Рассмотрим стержень постоянного сечения. При определении напряжений и деформаций стержня кроме силы P учтем его собственный вес. Обозначим F — площадь сечения стержня, l — его длину, γ — вес единицы объема. Используя метод сечений, рассмотрим условие равновесия отсеченной нижней части стержня, длина которой x (рис. 8.4):

$$\sum X_i = -N_x + P + \gamma Fx = 0, \text{ откуда } N_x = P + \gamma Fx.$$

Учитывая, что $N_x = \sigma_x \cdot F$, имеем

$$\sigma_x = \frac{N_x}{F} = \frac{P}{F} + \gamma x. \quad (8.11)$$

* Французский математик и механик, автор работ по дифференциальным уравнениям, теории вероятностей, небесной механике, теории упругости (1781—1840 гг.).

Наибольшее напряжение σ_{\max} будет в сечении $x=l$:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \gamma l.$$

Запишем условие прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \gamma \cdot l \leq [\sigma],$$

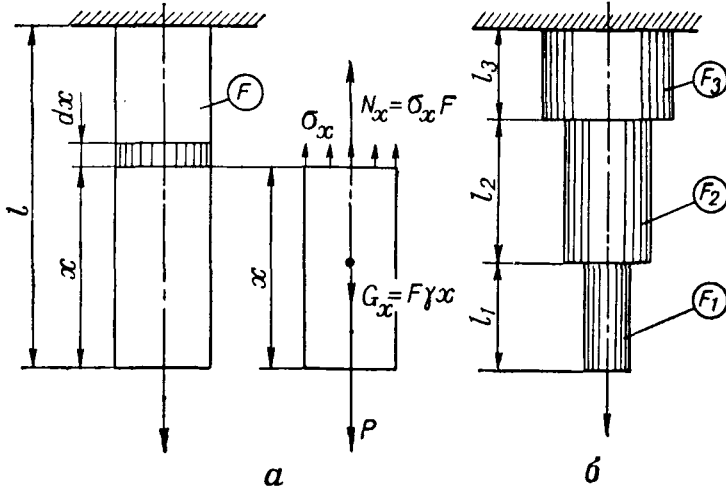


Рис. 8.4.

откуда

$$F \geq \frac{P}{[\sigma] - \gamma \cdot l}. \quad (8.12)$$

При $\gamma=0$ получаем формулу (8.2). Таким образом, с учетом собственного веса площадь поперечного сечения стержня должна быть больше, чем без его учета.

Площадь, определяемая по формуле (8.12), относится к сечению, расположенному на расстоянии $x=l$ от нижнего. По мере уменьшения l площадь сечения F в соответствии с (8.12) уменьшается. Поэтому с точки зрения лучшего использования материала стержень постоянного сечения не является оптимальным и при большой длине его целесообразно выполнять ступенчатым (рис. 8,4, б). Для этого выбирают вначале число ступенчатых участков и длину каждого l_1, l_2, \dots, l_n и т. д. Тогда соответствующие площади поперечных сечений определяются из равенств:

$$F_1 \geq \frac{P}{[\sigma] - \gamma l_1}; \quad (8.13)$$

$$F_2 \geq \frac{P + \gamma F l_1}{[\sigma] - \gamma l_2} = \frac{P_1}{[\sigma] - \gamma l_2},$$

где $P_1 = P + \gamma F l_1$ — сила, действующая на нижнее сечение второго участка. Если число участков взять весьма большим, форма стержня будет приближаться к брусу равного сопротивления.

Для определения деформаций стержня постоянного сечения с учетом собственного веса вначале рассмотрим удлинение участка длиной dx (рис. 8.4, а). Из уравнения (8.5) следует, что

$$\Delta dx = \frac{N_x \cdot dx}{EF}.$$

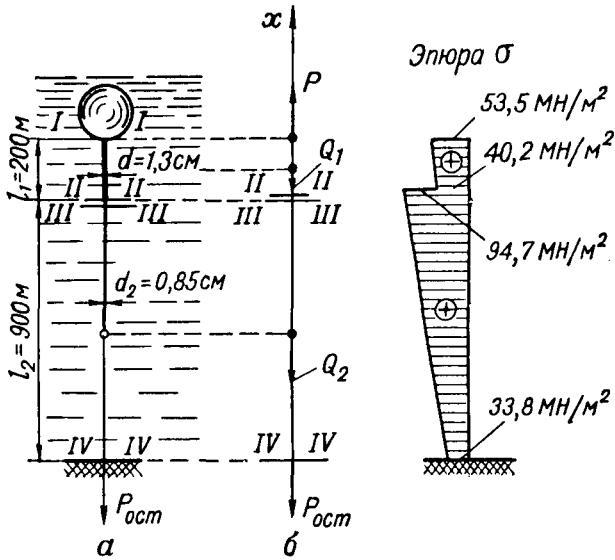


Рис. 8.5.

Удлинение стержня длиной x складывается из удлинений его отдельных участков, т. е.

$$\Delta x = \int_0^x \frac{(P + \gamma F x) dx}{EF} = \frac{\left(P + \frac{\gamma F x}{2}\right) x}{EF}. \quad (8.14)$$

Полное удлинение всего стержня ($x=l$)

$$\Delta l = \frac{\left(P + \frac{\gamma Fl}{2}\right) l}{EF} = \frac{\left(P + \frac{Q}{2}\right) l}{EF}, \quad (8.15)$$

где $\gamma Fl = Q$ — вес всего стержня.

Следовательно, перемещение сечения A вычисляется по формуле (8.15), соответствующей закону Гука, но к действующей силе P добавляется половина веса стержня $\frac{Q}{2}$.

Пример. Построить эпюру распределения нормальных напряжений по длине стального минрепа (рис. 8.5) и определить полное его удлинение, если минреп состоит из двух участков диаметром $d_1=1,3$ см и $d_2=0,85$ см и длиной соответственно $l_1=200$ м и $l_2=900$ м. Остаточная плавучесть $P_{ост}=200$ кгс=1962 Н.

Принять вес единицы объема стали $\gamma_{тр} = 7,8 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кгс}}{\text{см}^3} = 76,5 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$ и воды

$$\gamma_{в} = 1 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кгс}}{\text{см}^3} = 9,81 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}, \text{ модуль упругости } E = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2} = 1,96 \cdot 10^5 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2}.$$

Решение. Определяем вес участков минрепа в воде

$$\begin{aligned} Q_1 &= F l_1 (\gamma_{тр} - \gamma_{в}) = \frac{\pi d_1^2}{4} \cdot l_1 (\gamma_{тр} - \gamma_{в}) = \\ &= \frac{\pi \cdot 1,3^2}{4} \cdot 200 \cdot 10^2 (7,8 \cdot 10^{-3} - 1 \cdot 10^{-3}) = 180 \text{ кгс} = 1765 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Аналогично определяем, что $Q_2=346$ кгс=3390 Н. Считаем их приложенными в центрах тяжести соответствующих участков.

Вычисляем поддерживающую силу (плавучесть P) мины, используя уравнение равновесия:

$$\sum X_i = -Q_1 - Q_2 - P_{ост} + P = 0,$$

откуда

$$P = Q_1 + Q_2 + P_{ост} = 180 + 346 + 200 = 726 \text{ кгс} = 7120 \text{ Н}.$$

Определяем нормальные напряжения в четырех сечениях:

$$\sigma_I = \frac{N_1}{F_1} = \frac{726}{1,33} = 546 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2} = 53,5 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2};$$

$$\sigma_{II} = \frac{N_2}{F_2} = \frac{P - Q_1}{F_1} = \frac{726 - 180}{1,33} = 410 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2} = 40,2 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2};$$

$$\sigma_{III} = \frac{N_3}{F_2} = \frac{726 - 180}{0,565} = 965 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2} \approx 94,7 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2};$$

$$\sigma_{IV} = \frac{N_4}{F_2} = \frac{200}{0,565} = 354 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2} = 33,8 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2},$$

где

$$F_1 = \frac{\pi \cdot 1,3^2}{4} = 1,33 \text{ см}^2; F_2 = \frac{\pi \cdot 0,85^2}{4} = 0,565 \text{ см}^2 \text{ и } N_2 = N_3.$$

Эпюра напряжений имеет линейный характер и представлена на рис. 8.5, б. Полное удлинение минрепа складывается из удлинений участков

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{\left(P - \frac{Q_1}{2}\right) l_1}{EF_1} + \frac{\left(P - Q_1 - \frac{Q_2}{2}\right) l_2}{EF_2} = 34,5 \text{ см}.$$

§ 38. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

Обратимой или упругой деформацией называется такая, которая исчезает после прекращения действия внешних сил. Боль-

шинство материалов деталей машин, механизмов и приборов могут иметь весьма малые упругие деформации.

При увеличении нагрузки выше определенного предела появляются необратимые — остаточные (или пластические) — деформации, которые не исчезают после разгрузки.

Свойство твердых тел необратимо изменять свои размеры и форму под действием приложенных сил называется пластичностью.

Строго говоря, весьма малые пластические деформации наблюдаются и в упругом состоянии материала. Однако за пределами упругости пластические деформации являются главными, основными, по сравнению с ничтожно малыми упругими.

На результаты испытаний существенное влияние оказывают условия испытаний и размеры испытываемого образца. Поэтому для сопоставления результатов испытания проводятся над образцами стандартных размеров, при стандартных условиях (давление, температура, скорость деформаций). Опытные исследования классифицируют*:

по виду деформаций: растяжение (сжатие), сдвиг, кручение, изгиб;

по характеру нагрузок: статическая, ударная, изменяющаяся периодически (испытания на выносливость, усталость); наиболее распространены и просты статические испытания на растяжение (сжатие).

В зависимости от свойств материалы делят на пластичные и хрупкие.

Пластичные материалы, как, например, малоуглеродистая сталь, медь, алюминий, свинец, олово, разрушаются при больших остаточных деформациях, т. е. больших относительных удлинениях при разрушении.

Хрупкие материалы, как, например, чугун, закаленная сталь, стекло, бетон, разрушаются при малых остаточных деформациях, не превышающих 5%.

Деление материалов на пластичные и хрупкие является условным, так как одни и те же материалы в различных условиях могут быть либо пластичными, либо хрупкими; так, при понижении температуры деталь из мягкой стали может быть хрупкой, а при всестороннем сжатии хрупкий материал проявляет пластические свойства. Изучение свойств материалов, имеющее важное значение для выбора материала и допускаемых напряжений, производится по экспериментальным кривым $P=f(\Delta l)$ или $M_B=f_1(\varphi)$.

Диаграмма растяжения образца из пластичного материала. Рассмотрим диаграмму растяжения, на которой по оси абсцисс откладываем абсолютное удлинение Δl , а по оси ординат — действующую силу P (рис. 8.6).

* Более подробные сведения о методике проведения испытаний, применяемых приборах и машинах можно найти в специальных руководствах.

При возрастании величины силы от нуля до значения $P=P_n$, что на диаграмме соответствует точке A , между силой и деформацией существует линейная зависимость и справедлив закон Гука. При снятии нагрузки размеры образца восстанавливаются. При дальнейшем возрастании силы до $P=P_{уп}$ (точка B) зависимость между силой и деформацией несколько отклоняется от линейной; в этом случае при полной разгрузке образец будет уже иметь незначительные остаточные деформации до 0,03%. При увеличении силы, начиная с $P=P_T$ (точка C), наблюдается так называемая

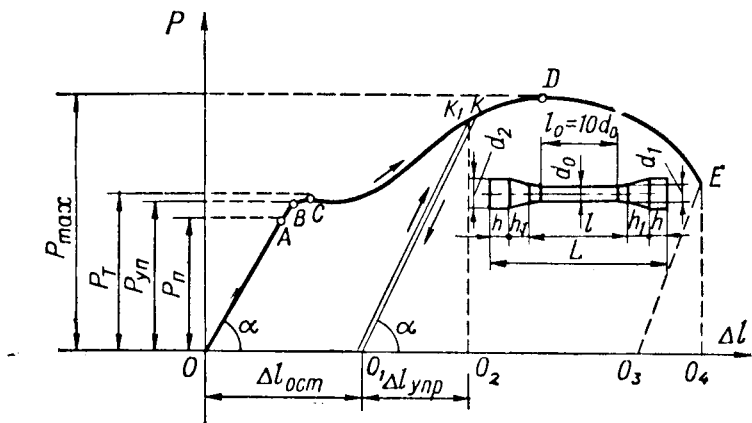


Рис. 8.6.

мая текучесть материала — деформации растут при почти постоянном значении силы, равном P_T . Блестящая, отполированная поверхность образца становится матовой, появляются полосы — линии Чернова, которые наклонены под углом 45° к оси образца. Под этим углом действуют максимальные касательные напряжения, которые в данном случае вызывают необратимые пластические деформации. Кристаллы металла сдвигаются друг относительно друга по плоскостям скольжения, при этом изменяется кристаллическая структура. Материал упрочняется и за пределом текучести вновь начинает оказывать сопротивление увеличивающейся нагрузке. На диаграмме это соответствует участку CD , на котором между силой и деформацией устанавливается сложная нелинейная зависимость.

Вблизи точки D нарушается равномерность распределения деформаций и напряжений по длине образца, появляется местная пластическая деформация, происходит местное утонение образца: на нем появляется шейка. С появлением шейки в ее районе концентрируется пластическая деформация. Уменьшение поперечного сечения шейки происходит весьма интенсивно. Для получения удлинения требуется сила, меньшая, чем прежняя; участок кривой растяжения DE идет вниз. Точка E соответствует нагрузке, при которой происходит разрыв образца. Разрыв сопровождается зву-

ковой волной, концы образца в месте разрыва нагреваются и приобретают магнитные свойства.

Если при нагрузке, соответствующей пластическим деформациям (участок CD кривой растяжения), приостановить нагружение, а затем образец разгрузить, то линия разгрузки KO_1 будет близка к прямой*. Отрезок OO_1 представляет остаточное удлинение образца $\Delta l_{ост}$, отрезок O_1O_2 — упругое удлинение $\Delta l_{упр}$, исчезающее после разгрузки, и OO_2 — полное удлинение

$$\Delta l = \Delta l_{ост} + \Delta l_{упр}.$$

При повторном нагружении испытуемого образца линия нагрузки O_1K , близкая к прямой, пойдет приблизительно параллельно AO до точки K , затем пропорциональность между силой P и деформацией

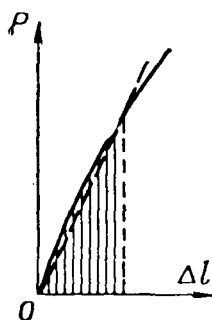


Рис. 8.7.

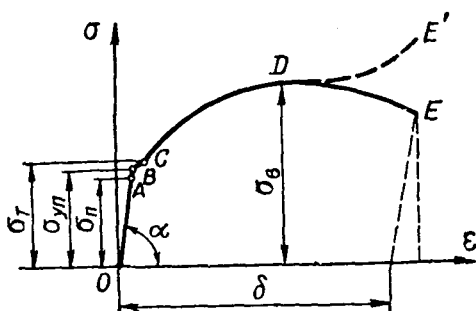


Рис. 8.8.

вновь нарушается и кривая растяжения будет близка к кривой, получаемой при обычном растяжении (KDE).

Из рис. 8.6 следует, что при повторном нагружении увеличивается предел пропорциональности. Явление изменения свойств и состояния материала, вызванное пластической деформацией, называется **наклепом**.

Наклеп применяется при изготовлении оружейных стволов, цепей, в арматуре железобетона, при протяжке проволоки. Если наклеп нежелателен, его можно снять отжигом.

При растяжении хрупкого материала (рис. 8.7) сила и удлинение не связаны линейной зависимостью даже при малых значениях силы. Разрушение материала наступает при незначительных деформациях. При проведении расчетов в этом случае кривую растяжения заменяют прямой линией, для которой и используют закон Гука, полагая, что модуль упругости E не переменная, а постоянная величина.

Диаграмма напряжений для пластичного материала. Диаграммой условных напряжений называется кривая (рис. 8.8), характеризующая зависимость напряжения σ от относительного удлинения

* Как условно показано на рис. 8.6.

ния ϵ . Она может быть получена из диаграммы растяжения, если учесть, что $\sigma = \frac{P}{F_0}$ и $\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ и где F_0 и l_0 — первоначальные площадь сечения и длина стержня.

Диаграмма напряжений подобна диаграмме растяжения, но в большей степени характеризует данный материал, так как по осям отложены относительные величины.

Рассмотрим характерные точки диаграммы напряжений.

Пределом пропорциональности называется напряжение $\sigma_{п} = \frac{P_{п}}{F_0}$, до которого сохраняется линейная зависимость между напряжением и деформацией или отклонение от линейной зависимости достигает некоторой определенной величины. Таким образом, закон Гука справедлив до предела пропорциональности, соответствующего точке A диаграммы.

Пределом упругости называется напряжение $\sigma_{уп} = \frac{P_{уп}}{F_0}$, соответствующее точке B , при котором появляются остаточные деформации в пределах 0,001--0,03%.

Точки A и B диаграммы напряжений находятся близко друг от друга. Часто считают, что предел пропорциональности и предел упругости имеют одни и те же значения. Так, для стали Ст. 3 $\sigma_{п} \approx 2000$ кгс/см² = 196 МН/м², а $\sigma_{уп} \approx 2100$ кгс/см² ≈ 205 МН/м².

Пределом текучести называется напряжение $\sigma_{т} = \frac{P_{т}}{F_0}$, отвечающее нижнему положению площадки текучести — точке C диаграммы растяжения для материалов, имеющих таковую площадку. Для стали Ст. 3 $\sigma_{т} \approx 2400$ кгс/см² ≈ 236 МН/м².

Некоторые материалы, например ряд специальных сталей, бронза и т. д., не имеют явно выраженной площадки текучести. Тогда вводят понятие условного предела текучести σ_{02} , т. е. напряжение, при котором остаточная деформация достигает величины 0,2%, если это не оговорено специальными условиями.

Так как предел текучести зависит от диаметра образца, вводят специальный коэффициент $\gamma_{т} = \frac{\sigma_{тd}}{\sigma_{т10}}$, где $\sigma_{тd}$ — предел текучести данного образца диаметром d , $\sigma_{т10}$ — предел текучести образца диаметром 10 мм. Коэффициент $\gamma_{т}$ изменяется в широких пределах (от 1 до 0,67 при $d=500$ мм).

Временным сопротивлением для пластичного материала $\sigma_{в}$ или пределом прочности для хрупкого $\sigma_{пч}$ называется условное напряжение в точке D диаграммы напряжений ($\sigma_{в} = \frac{P_{в}}{F_0}$), отвечающее наибольшей нагрузке, предшествовавшей разрушению образца. Для стали Ст. 3 $\sigma_{в} = 4000 \div 5000$ кгс/см² = 392 \div 491 МН/м², у высокопрочных сталей, например 40ХНМА, $\sigma_{в} = 10000$ кгс/см² = 9810 МН/м². Временное сопротивление связано с твердостью по Бринеллю приближенной формулой

$$\sigma_{в} \approx 0,36H_{в}. \quad (8.16)$$

Пределом прочности $\sigma_{пч}$ называется временное сопротивление образца, разрушающегося без местного изменения площади сечения в зоне разрушения, например при растяжении, без образования шейки.

На диаграмме напряжений откладывается условное напряжение, т. е. среднее напряжение, определяемое отношением действующей силы к первоначальной площади поперечного сечения образца.

Истинное напряжение — среднее напряжение, определяемое отношением действующей силы к изменяющейся во время испытаний площади поперечного сечения образца. Диаграмма истинных напряжений представлена на рис. 8.8 пунктиром, условных — сплошной линией.

Из рис. 8.8 (участок DE') следует, что истинные напряжения, равные $\sigma_{и} = \frac{P}{F_{и}}$, по мере увеличения силы все время растут.

Пластичность характеризуется в основном двумя коэффициентами, которые определяются из результатов испытаний:

1. Остаточным относительным удлинением материала при разрыве

$$\delta = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \cdot 100\%, \quad (8.17)$$

где l_0 — первоначальная длина и l_1 — длина образца после разрыва.

Для стали Ст. 3 $\delta = 24\%$, для высокопрочной стали δ снижается до 7—10%. Так как δ , кроме того, зависит от отношения $\frac{l}{F_0}$, то обычно указывают, на каком образце проводились испытания. Так, δ_{10} означает, что у образца $\frac{l}{F_0} = 10$.

2. Остаточным относительным сужением сечения при разрыве

$$\psi = \frac{|F_0 - F_1|}{F_0} \cdot 100\%, \quad (8.18)$$

где F_0 — начальная площадь сечения, а F_1 — площадь сечения в месте образования шейки после разрыва.

Величина ψ мало зависит от размеров и формы образца и, следовательно, более полно, чем δ , характеризует пластичность материала. Значение ψ , например для стали Ст. 3, равно 50—60%.

Деформации при сжатии пластичного и хрупкого материала. При испытаниях на сжатие во избежание искривления образца его делают или кубическим или цилиндрическим; в последнем случае $h \leq 3d$. Размеры ребер кубика берутся в зависимости от материала (сталь ~ 2 см, бетон ~ 20 —30 см). Часто при испытаниях на сжатие применяют полые образцы с конической торцевой поверхностью (рис. 8.9).

Характер кривой сжатия у пластичных и хрупких материалов различен. Пластичный материал при сжатии его до предела пропорциональности ведет себя так же, как и при растяжении. Предел пропорциональности и предел упругости при сжатии и растяжении почти одинаковы. После предела упругости с увеличением нагрузки становятся заметны укорочение образца и увеличение его поперечных размеров. Цилиндрический образец приобретает бочкообразную форму, что объясняется трением на опорных поверхностях испытуемого образца, которое можно уменьшить за счет смазки. При дальнейшем увеличении нагрузки образец обращается в ле-

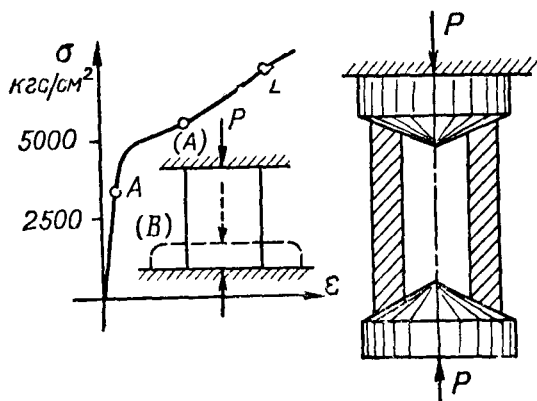


Рис. 8.9.

пешку. Напряжение, соответствующее временному сопротивлению, не наблюдается. Диаграмма напряжений имеет вид, изображенный на рис. 8.9.

Хрупкие материалы (чугун, камень, бетон и др.) при сжатии разрушаются с незначительными деформациями. Испытания показывают, что хрупкие материалы обычно сопротивляются сжатию гораздо лучше, чем растяжению. Так, например, предел прочности при сжатии чугуна равен $\sigma_{пч} = 5600 - 9000 \text{ кгс/см}^2 = 550 - 895 \text{ МН/м}^2$, при растяжении он в 4—5 раз меньше и равен $\sigma_{пч} = 1200 - 1900 \text{ кгс/см}^2 = 117 - 186 \text{ МН/м}^2$.

Модуль упругости хрупкого материала различен при растяжении и сжатии. Так, для бетона модуль упругости при растяжении в 1,5 раза больше, чем при сжатии, а предел прочности бетона на сжатие в среднем в 6—8 раз больше, чем на растяжение.

Работа внешних и внутренних сил при растяжении (сжатии). Потенциальная энергия упругих деформаций.

Рассмотрим стержень постоянного сечения, который растягивается осевой силой. По мере медленного увеличения силы в пределах пропорциональности увеличивается и удлинение, т. е. перемещение точки приложения силы. Если бы внешняя сила P была постоянна, то, как известно из физики, ее работа A^e на перемещении Δl равнялась бы $A^e = P \cdot \Delta l$ или с учетом масштаба чертежа

(рис. 8.10) площади прямоугольника $OABC$. В рассматриваемом случае, когда сила растет от нуля до конечного значения P , работа определится с учетом масштаба площадью треугольника OBC или A^e , очевидно, будет равна

$$A^e = \frac{P \cdot \Delta l}{2}, \quad (8.19)$$

где P и Δl — конечные значения внешней силы и перемещения.

Внутренние силы совершают работу A^i отрицательную и равную

$$A^i = -\frac{N \cdot \Delta l}{2} \quad (8.20)$$

или с учетом формулы (8.5) ее можно записать в виде

$$\begin{aligned} A^i &= -\frac{N}{2} \frac{Nl}{EF} = -\frac{N^2 l}{2EF} = \\ &= -\frac{(\Delta l)^2 EF}{2l}. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Величина, равная работе внутренних сил, но имеющая противоположный ей знак, называется потенциальной энергией упругих деформаций и обозначается буквой Π . Таким образом,

$$\Pi = \frac{N^2 \cdot l}{2EF} = \frac{(\Delta l)^2 EF}{2l}. \quad (8.22)$$

Потенциальная энергия упругих деформаций, отнесенная к единице объема, называемая удельной, будет равна

$$a = \frac{\Pi}{V} = \frac{\Pi}{F \cdot l} = \frac{N^2 \cdot l}{2EF \cdot Fl} = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{\sigma \varepsilon}{2}. \quad (8.23)$$

В случае ступенчатого стержня потенциальная энергия определится из равенства

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 l_i}{2E_i F_i} = \sum_{i=1}^n \frac{(\Delta l_i)^2 E_i F_i}{2l_i}, \quad (8.24)$$

где n — число участков, на которых N и EF постоянны.

Понятие о концентрации напряжений

Ранее при определении напряжений в растянутом (сжатом) стержне принималось, что нормальное напряжение σ по сечению распределялось равномерно. Опыты показали, что такое допущение справедливо, когда сечение постоянно или плавно изменяется.

При резком изменении сечения вблизи выточек, отверстий, в местах резких переходов от одного сечения к другому (рис. 8.11) наблюдается неравномерное распределение напряжений и появление значительных местных напряжений на весьма малой части сечения. Это явление называется *концентрацией напряжений*.

Обозначим наибольшее напряжение σ_k , среднее напряжение с учетом ослабления сечения выточкой отверстием σ_0 . Тогда степень

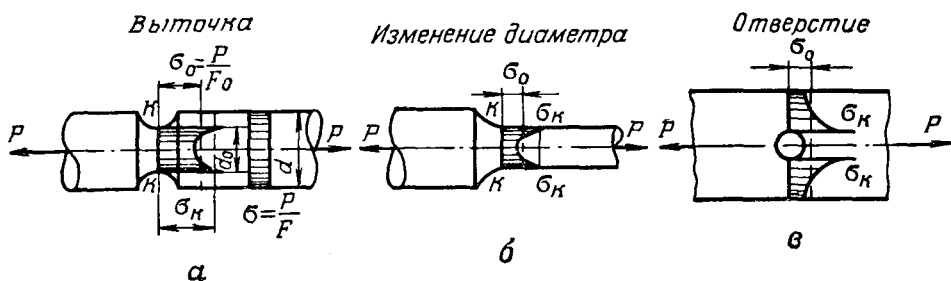


Рис. 8.11.

концентрации напряжений оценивается теоретическим коэффициентом концентрации напряжений α_s , равным

$$\alpha_s = \frac{\sigma_k}{\sigma_0}. \quad (8.25)$$

Коэффициент концентрации напряжения определяется как отношение напряжения, определенного с учетом концентрации, к номинальному напряжению в той же точке.

Коэффициент α_s в большинстве случаев определяется экспериментально и лишь в немногих случаях может быть определен и теоретически. Так, если диаметр отверстия мал по сравнению с размерами сечения, доказано теоретически, что $\alpha_s = 3$. Величина α_s зависит от формы выточки, ее глубины, радиуса.

Пластичные и хрупкие материалы ведут себя по-разному при наличии концентрации напряжений.

Для пластичных материалов, имеющих заметную по величине площадку текучести, концентрация напряжений не опасна. Допустим, местное напряжение σ_k достигнет предела текучести σ_T при некотором значении нагрузки. При дальнейшем увеличении нагрузки среднее напряжение будет увеличиваться, а в точках, где наблюдается концентрация напряжений, оно будет оставаться постоянным и равным σ_T . В результате напряжение по сечению выравнивается. Эффект концентрации напряжения при статической нагрузке пропадает.

Существенно большее влияние на прочность материалов оказывает концентрация напряжений в том случае, когда материал

хрупкий (например, чугун, закаленные стали), т. е. для материалов, не имеющих площадки текучести. В этом случае, как только σ_k станет равным пределу прочности $\sigma_{пч}$, в месте перенапряжения образуется трещина, которая затем ведет к быстрому разрушению детали. Поэтому при конструировании и изготовлении деталей следует избегать глубоких выточек, запилы, резких переходов сечений и т. д., которые вызывают концентрацию напряжений, а следовательно, преждевременное разрушение материала.

При переменных нагрузках концентрация напряжений снижает прочность и для пластичного материала.

Следует отметить, что, как показали опыты, для большинства материалов снижение прочности при наличии концентрации напряжений получается меньше, чем α_s . Поэтому введено понятие эффективного коэффициента концентрации напряжений, равного

$$K_\sigma = \frac{\sigma_{пч}}{\sigma_{пчк}}, \quad (8.26)$$

где $\sigma_{пч}$ — предел прочности детали без концентрации напряжений, а $\sigma_{пчк}$ — предел прочности детали, имеющей заданную концентрацию напряжений.

Очевидно, для пластичных материалов $K_\sigma = 1$.

В местах передачи давления одного тела на другое возникают высокие местные контактные напряжения. Задача об определении контактных напряжений решается в теории упругости при следующих допущениях:

- линейные размеры площадки текучести малы по сравнению с радиусами кривизны соприкасающихся поверхностей;
- сжимающая сила направлена по нормали к площадкам контакта и вызывает появление нормальных напряжений;
- материалы соприкасающихся тел подчиняются закону Гука.

Допускаемые контактные напряжения, значения которых даны в справочниках, могут быть больше предела прочности. Объясняется это в основном тем, что контактные напряжения быстро убывают по мере удаления от места контакта, кроме того, материал в месте контакта находится в объемном напряженном состоянии, при котором он способен выдерживать напряжения, значительно превосходящие предел прочности, соответствующий осевому напряженному состоянию.

О выборе допускаемых напряжений. Допускаемые напряжения выбираются так, чтобы обеспечить длительную безаварийную работу механизма, прибора и отдельных их частей, учитывая самые неблагоприятные условия их работы. Поэтому если обозначить предельные напряжения $\sigma_{пр}$, то

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{пр}}{n}, \quad (8.27)$$

где n — коэффициент запаса прочности, который выбирают с учетом опыта эксплуатации. За предельное напряжение принимают для пластичных материалов предел текучести, для хрупких — предел прочности.

Для удобства выбора коэффициент запаса представляют в виде произведения частных коэффициентов запаса:

$$n = n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_n, \quad (8.28)$$

где n_1 — коэффициент, учитывающий отклонение механических характеристик от принятых в расчете;

n_2 — коэффициент, учитывающий отклонение действующих нагрузок и напряжений от расчетных;

n_3 — коэффициент, учитывающий степень ответственности детали и отклонения условий работы от принятых в расчете.

В некоторых случаях количество частных коэффициентов запаса может доходить до пяти и даже десяти. В машиностроении обычно учитывают только три вышеназванных частных коэффициента запаса, при этом их значения колеблются в зависимости от материала в пределах:

- для весьма хрупких $n_1 = 4-6$; для хрупких $n_1 = 3-4$;
- для малопластичных $n_1 = 2-3$;
- для пластичных (расчет по пределу текучести) из табл. 1.

Таблица 1

σ_T/σ_B	0,4—0,55	0,55—0,7	0,7—0,9	Литые
n_1	1,2—1,5	1,4—1,8	1,7—2,2	1,6—2,5

n_2 — принимается при ответственных расчетах $1 \div 1,5$, при грубых — 2; n_3 — принимается равным $1,0 \div 1,5$.

§ 39. ПОНЯТИЕ О РАСЧЕТЕ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ НА РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

Статически неопределимой называется такая геометрически неизменяемая система, в которой реакции связи при произвольной статической нагрузке могут быть определены лишь из совместного рассмотрения уравнений равновесия и уравнений, связывающих перемещения системы.

Геометрически неизменяемой системой называется такая система соединенных между собой тел, которая не допускает относительного перемещения ее частей без деформаций.

Примеры статически неопределимых систем представлены на рис. 8.12, *г, д, е*.

Разность между числом неизвестных реакций и числом уравнений равновесия характеризует степень статической неопределимости системы. Следовательно, системы, представленные на рис. 8.12 (*г, д, е*), являются один раз статически неопределимыми. Отметим, что в указанных стержневых системах вследствие наличия шарниров все реакции направлены вдоль соответствующих стержней.

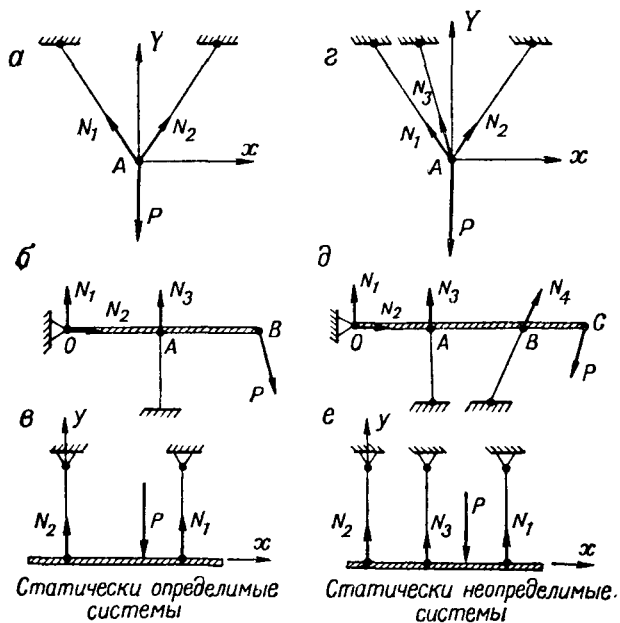


Рис. 8.12.

Рекомендуемая последовательность решения статически неопределимых систем:

- выбрать объект, равновесие которого будет рассмотрено, наметить направление и определить количество опорных реакций;
- установить степень статической неопределимости, т. е. разность между числом неизвестных и числом независимых уравнений статики;

- составить уравнения равновесия;
- изобразить систему после деформаций и план перемещений; записать уравнения совместности перемещений;
- решить полученную систему уравнений и определить неизвестные реакции.

Определить в зависимости от задания:

- напряжения при заданных сечениях стержней;
- сечения стержней при заданном допустимом напряжении и отношениях площадей;

— грузоподъемность системы при заданных площадях сечений и допускаемом напряжении.

Пример. Определить грузоподъемность системы, изображенной на рис. 8.13, если заданы допусковое напряжение $[\sigma]$, площади сечений и материал (E).

Решение. Выбираем объект равновесия — узел A системы; число неизвестных реакций равно трем; устанавливаем, что число уравнений равновесия равно двум (плоская система сил, сходящихся в одной точке); задача один раз статически неопределима.

Записываем уравнения равновесия:

$$\sum X_i = -R_1 \sin \alpha + R_2 \sin \alpha = 0,$$

откуда $R_1 = R_2$;

$$\sum Y_i = R_1 \cos \alpha + R_2 \cos \alpha + R_3 - P = 0$$

или

$$2R_1 \cos \alpha + R_3 = P. \quad (a)$$

Составляем план перемещений. Точка A под действием силы опускается и занимает новое положение A_1 . При этом все стержни удлиняются. Удлинение Δl_1 получается, если из точки B провести дугу радиусом BA до пересечения со стержнем BA_1 . Аналогично получаем Δl_2 . Учитывая, что удлинения малы по сравнению с длинами стержней, заменяем дуги перпендикулярами из A на BA_1 и DA_1 . Записываем уравнение совместности перемещений.

Из заштрихованного треугольника AA_1K следует

$$\Delta l_3 \cos \alpha = \Delta l_1$$

или, учитывая, что $N_1 = R_1$ и $N_3 = R_3$, получаем

$$\frac{R_3 l_3}{E_3 F_3} \cos \alpha = \frac{R_1 l_1}{E_1 F_1}, \quad (б)$$

где $l_3 = l_1 \cos \alpha$.

Решаем систему уравнений (а), (б) и определяем неизвестные:

$$\left. \begin{aligned} R_3 &= \frac{P}{1 + 2 \frac{E_1 F_1}{E_3 F_3} \cos^3 \alpha}; \\ R_1 = R_2 &= \frac{P \frac{E_1 F_1}{E_3 F_3} \cos^2 \alpha}{1 + 2 \frac{E_1 F_1}{E_3 F_3} \cos^3 \alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (8.29)$$

Отметим, что реакции существенно зависят от отношения жесткостей стержней. Полагаем, что жесткости стержней одинаковы, т. е.

$$E_1 F_1 = E_2 F_2 = E_3 F_3,$$

тогда

$$R_3 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha}; \quad R_1 = \frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}, \quad \text{т. е. } R_3 > R_1.$$

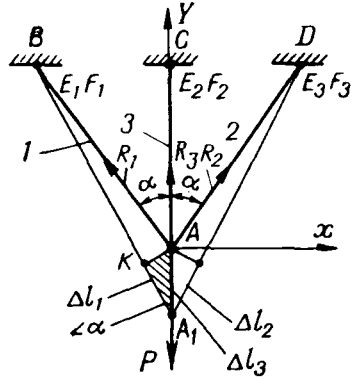


Рис. 8.13.

Определяем допускаемую нагрузку из условия прочности

$$\sigma = \frac{R_3}{F_3} = \frac{P}{(1 + 2 \cos^3 \alpha) F_3} \leq [\sigma],$$

откуда

$$[P] \leq [\sigma] F_3 (1 + 2 \cos^3 \alpha). \quad (8.20)$$

Отметим, что при таком методе расчета крайние стержни получаются недогруженными и напряжения в них ниже допускаемых, что свидетельствует о плохом использовании материала.

Температурные напряжения в статически неопределимых системах. Рассмотрим стержень постоянного сечения, оба конца которого защемлены (рис. 8.14). Требуется определить напряжение при его нагревании на $\Delta t^\circ \text{C}$. С подобной задачей встречаются, например, при эксплуатации трубопроводов, подводящих среду с высокой температурой. Если бы стержень был защемлен с одного конца, при увеличении температуры его удлинение было бы равно $\Delta l_t = \alpha \cdot l \cdot \Delta t$, где α — коэффициент линейного расширения ($\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$ для стали, $\alpha = 165 \cdot 10^{-7}$ для меди и т. д.).

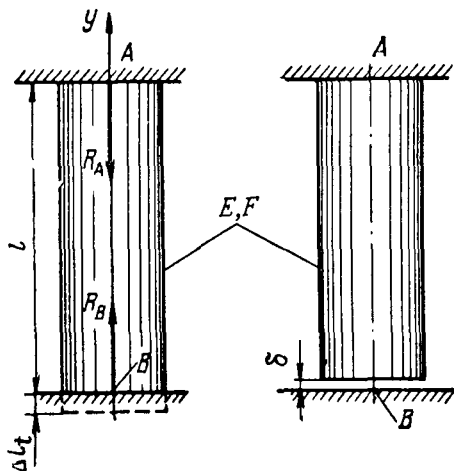


Рис. 8.14.

Второе защемление препятствует удлинению, и поэтому в стержне возникают внутренние усилия. Воспользуемся общим методом решения статически неопределимых задач:

- отбросим мысленно опоры и заменим их реакциями R_A и R_B ;
- объект равновесия — стержень, число неизвестных реакций равно двум, число уравнений равновесия одно; задача один раз статически неопределима;
- составляем уравнение равновесия в виде

$$\sum Y_i = -R_A + R_B = 0,$$

откуда $R_A = R_B = R$;

- записываем уравнение совместности перемещений

$$\Delta l_t + \Delta l_R = 0$$

или, принимая, что стержень сжат ($\Delta l_R < 0$),

$$\alpha \cdot l \cdot \Delta t - \frac{R_B \cdot l}{EF} = 0,$$

откуда $R = \alpha \cdot EF \cdot \Delta t$;

— температурные напряжения сжатия равны

$$\sigma_t = \frac{R}{F} = \alpha \cdot E \cdot \Delta t. \quad (8.31)$$

Из полученного равенства следует, что температурные напряжения не зависят от длины и площади сечения стержня, а зависят от свойств материала (α , E) и изменения температуры (Δt). Так, при $\Delta = 60^\circ \text{C}$ для стального стержня $E = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2} = 1,96 \cdot 10^5 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2}$, $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$ из формулы (8.31) следует, что

$$\sigma_t = \alpha E \Delta t = 125 \cdot 10^{-7} \cdot 1,96 \cdot 10^5 \cdot 60$$

или

$$\sigma_t = 147 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2} \approx 1500 \text{ кгс/см}^2.$$

Рассмотрим случай, когда между стеной и стержнем существует зазор δ (рис. 8.14). Тогда уравнение совместности перемещений будет иметь вид

$$\Delta l_t + \Delta l_R = \delta$$

или

$$\Delta l_t - \frac{R_B l}{EF} = \delta,$$

откуда

$$R_A = R_B = \frac{EF}{l} (\alpha l \Delta t - \delta) = EF \left(\alpha \cdot \Delta t - \frac{\delta}{l} \right).$$

Соответственно напряжение будет равно

$$\sigma_t = E \left(\alpha \Delta t - \frac{\delta}{l} \right), \quad (8.32)$$

т. е. при наличии зазора напряжение уменьшается. Так, если принять $\delta = 0,5 \text{ мм} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $l = 1 \text{ м}$, то для рассмотренного выше примера $\sigma_t = 49 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2} \approx 500 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}$.

Отметим, что для уменьшения температурных напряжений стремятся статически неопределимую систему превратить в статически определимую (например, рельсы укладывают с зазорами, хотя это нежелательно с других точек зрения, и т. д.). Часто для уменьшения температурных напряжений в статически неопределимую систему включают компенсаторы различных конструкций.

ГЛАВА 9

ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

§ 40. ОСЕВОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ. СОСТАВЛЯЮЩИЕ НАПРЯЖЕНИЯ. ЗАКОН ПАРНОСТИ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Продолжим исследование осевого напряженного состояния стержня, растягиваемого (сжимаемого) осевыми силами. Для полной оценки его прочности следует знать напряжения не только в поперечном, но и в любом сечении стержня. Для этого рассмотрим сечение nL , проведенное под некоторым углом α к поперечному nm (рис. 9.1). Угол между внешними нормальными этими сечений также равен α . За положительное направление отсчета угла принимается направление, отсчитываемое против хода часовой стрелки (рис. 9.1).

В соответствии с рисунком полное напряжение

$$p_\alpha = \frac{P}{F_\alpha} = \frac{P \cos \alpha}{F_0} = \sigma_0 \cos \alpha, \quad (9.1)$$

где F_0 — площадь поперечного сечения nm ;

$F_\alpha = \frac{F_0}{\cos \alpha}$ — площадь сечения nL .

Далее из рис. (9.1, в) следует, что

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cos \alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha; \quad (9.2)$$

$$\tau_\alpha = p_\alpha \sin \alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha, \quad (9.3)$$

т. е. σ_α и τ_α являются непрерывными функциями угла α .

Нормальные напряжения σ_α , по направлению совпадающие с направлением внешней нормали, принимаются за положительные напряжения (растяжение). За положительные касательные напряжения τ_α принимаются те, которые, будучи повернуты на 90° против хода часовой стрелки, совпадают с направлением внешней нормали (рис. 9.1).

Из равенства (9.2) следует, что при $\cos \alpha = 1$ ($\alpha = 0^\circ$) нормальные напряжения имеют максимальные значения, а касательные (9.3) равны нулю,

Напомним, что нормальные напряжения, действующие по площадкам, на которых отсутствуют касательные напряжения, называются главными напряжениями, а соответствующие площадки — главными площадками.

В рассматриваемом случае главная площадка перпендикулярна оси стержня (при $\alpha=0$, $\tau_\alpha=0$, $\sigma=\sigma_{\max}=\sigma_0$). На главной площадке нормальные напряжения имеют максимальные значения.

Из уравнения (9.3) следует, что касательные напряжения имеют максимальные значения при $\sin 2\alpha=1$ ($2\alpha=90^\circ$), т. е. дей-

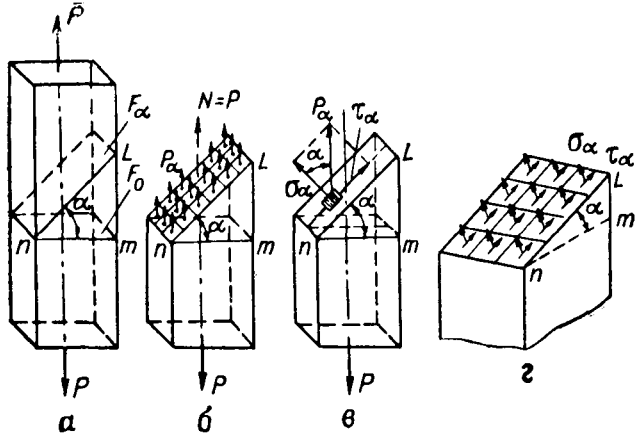


Рис. 9.1.

ствуют по площадкам, наклоненным к оси под углом $\alpha=45^\circ$, и численно равны

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_0}{2}. \quad (9.4)$$

Вопрос о том, какие из этих напряжений определяют прочность материала, будет рассмотрен в § 43.

Проведем площадку, перпендикулярную данной (рис. 9.2); она будет составлять с поперечным сечением стержня угол $\alpha + \frac{\pi}{2}$. Из формул (9.2) и (9.3) следует:

$$\sigma_{\alpha + \frac{\pi}{2}} = \sigma_0 \cos^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = \sigma_0 \sin^2 \alpha; \quad (9.5)$$

$$\tau_{\alpha + \frac{\pi}{2}} = \frac{\sigma_0}{2} \cdot \sin 2 \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{\sigma_0}{2} \cdot \sin 2\alpha. \quad (9.6)$$

Сопоставляя (9.5) с (9.2), а также (9.6) с (9.3) видно, что

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha + \sigma_{\alpha + \frac{\pi}{2}} &= \sigma_0; \\ \tau_\alpha &= -\tau_{\alpha + \frac{\pi}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$

Следовательно, сумма нормальных напряжений, возникающих на взаимно перпендикулярных площадках, не зависит от угла α и равна главному напряжению.

По взаимно перпендикулярным площадкам возникают касательные напряжения, равные по модулю, но разных знаков — закон парности касательных напряжений.

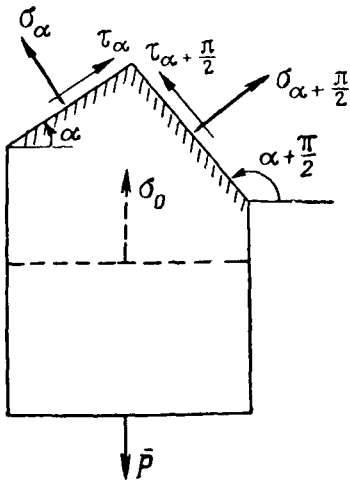


Рис. 9.2.

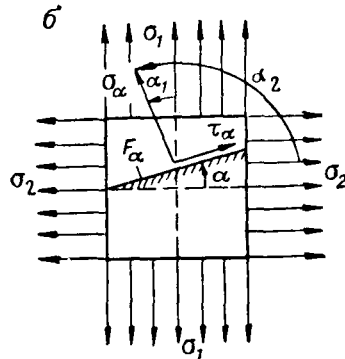
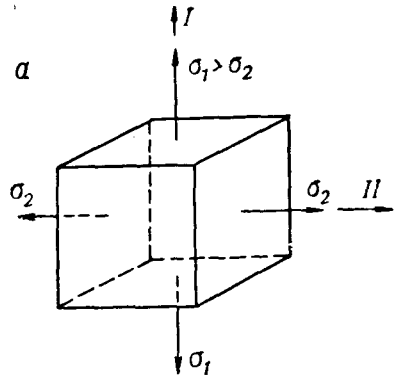


Рис. 9.3.

§ 41. ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Когда на элемент в виде кубика (рис. 9.3), условно вырезанного из тела, главные напряжения действуют по двум взаимно перпендикулярным направлениям, а в третьем направлении главное напряжение отсутствует, имеет место плоское напряженное состояние. Исследуем напряжения, возникающие по наклонной площадке при плоском напряженном состоянии (рис. 9.3).

Обозначим главные напряжения, направленные по соответствующим осям, σ_1 и σ_2 . Пользуясь принципом независимости действия сил, запишем уравнения, определяющие напряжения, действующие по площадке, наклоненной под углом α .

Нормальные напряжения

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha,$$

где $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ$.

Касательные напряжения

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \cdot \sin 2\alpha + \frac{\sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha_2 = \frac{\sigma_1}{2} \cdot \sin 2\alpha - \frac{\sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha$$

или

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha} &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha; \\ \tau_{\alpha} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (9.8)$$

Из уравнений (9.8) следует, что по площадке, образующей угол $\frac{\pi}{2}$ с рассматриваемой, соответствующие напряжения будут:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha + \frac{\pi}{2}} &= \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha; \\ \tau_{\alpha + \frac{\pi}{2}} &= -\tau_{\alpha}, \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

т. е. и при плоском напряженном состоянии также действует закон парности касательных напряжений. Складывая нормальные напряжения $\sigma_{\alpha} + \sigma_{\alpha + \frac{\pi}{2}}$, полу-

чаем

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\alpha + \frac{\pi}{2}} = \sigma_1 + \sigma_2. \quad (9.10)$$

Сумма нормальных напряжений, действующих по взаимно перпендикулярным площадкам ($\sigma_{\alpha} + \sigma_{\alpha + \frac{\pi}{2}}$), при плоском напряженном состоянии равна сумме главных напряжений ($\sigma_1 + \sigma_2$).

Решим обратную задачу. Пусть заданы нормальные и касательные напряжения по взаимно перпендикулярным граням элемента (рис. 9.4). Требуется определить величины главных напряжений и положения главных площадок. Пусть для определенности $\sigma_{\alpha} > \sigma_{\alpha + \frac{\pi}{2}}$. Отсчет угла α для определения направления σ_{α}

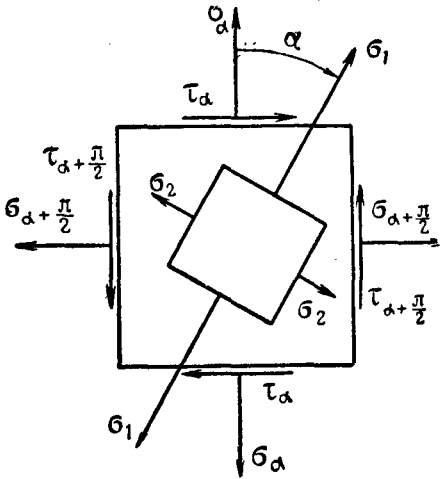


Рис. 9.4.

ранее производился от задаваемого напряжения σ_1 против хода часовой стрелки. Следовательно, при заданном σ_{α} для определения направления σ_1 отсчет α нужно будет производить от σ_{α} в противоположном направлении, то есть по ходу часовой стрелки.

Из системы уравнений (9.8) и (9.9) следует

$$\sigma_{\alpha} - \sigma_{\alpha + \frac{\pi}{2}} = \sigma_1 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - \sigma_2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha$$

или

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha - \sigma_{\alpha + \frac{\pi}{2}} &= (\sigma_1 - \sigma_2) \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} = (\sigma_1 - \sigma_2) \sqrt{1 - \left(\frac{2\tau_\alpha}{\sigma_1 - \sigma_2}\right)^2} = \\ &= 2 \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 - \tau_\alpha^2}. \end{aligned} \quad (*)$$

С другой стороны, из (9.10)

$$\sigma_2 = \sigma_\alpha + \sigma_{\alpha + \frac{\pi}{2}} - \sigma_1.$$

Тогда подкоренное выражение можно записать в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 - \tau_\alpha^2 &= \left(\frac{2\sigma_1 - \sigma_\alpha - \sigma_{\alpha + \frac{\pi}{2}}}{2}\right)^2 - \tau_\alpha^2 = \\ &= \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha + \frac{\pi}{2}}}{2}\right)^2 - \tau_\alpha^2. \end{aligned} \quad (**)$$

Возведем в квадрат обе части равенства (*) с учетом (**)

$$\left(\sigma_\alpha - \sigma_{\alpha + \frac{\pi}{2}}\right)^2 = 4 \left[\sigma_1 - \frac{\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha + \frac{\pi}{2}}}{2}\right]^2 - \tau_\alpha^2$$

или

$$\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_{\alpha + \frac{\pi}{2}}}{2}\right)^2 = \sigma_1^2 - \sigma_1 \left(\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha + \frac{\pi}{2}}\right) + \left(\frac{\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha + \frac{\pi}{2}}}{2}\right)^2 - \tau_\alpha^2.$$

После простейших алгебраических преобразований получаем следующее квадратное уравнение для определения σ_1 :

$$\sigma_1^2 - \left(\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha + \frac{\pi}{2}}\right)\sigma_1 + \sigma_\alpha \cdot \sigma_{\alpha + \frac{\pi}{2}} - \tau_\alpha^2 = 0,$$

откуда

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha + \frac{\pi}{2}}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_{\alpha + \frac{\pi}{2}}}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2}. \quad (9.11)$$

$$\text{Соответственно } \sigma_{2(3)} = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha + \frac{\pi}{2}}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_{\alpha + \frac{\pi}{2}}}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2}.$$

Угол наклона главной площадки, на которой напряжение равно σ_1 , определяется из двух равенств:

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tau_\alpha}{\sigma_1 - \sigma_2}; \quad \cos 2\alpha = \frac{\sigma_\alpha - \sigma_{\alpha + \frac{\pi}{2}}}{\sigma_1 - \sigma_2},$$

откуда с учетом направления отсчета угла α

$$\operatorname{tg} 2\alpha = - \frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_{\alpha + \frac{\pi}{2}}}. \quad (9.12)$$

Следовательно, главная площадка, на которой напряжение равно σ_1 , направлена под углом α к площадке, по которой действуют напряжения σ_α и τ_α ; при этом отсчет угла α от этой площадки производится против хода часовой стрелки в том случае, когда правая часть равенства (9.12) будет положительна.

Частные случаи:

1. $\sigma_\alpha = \sigma$; $\sigma_{\alpha + \frac{\pi}{2}} = 0$; $\tau_\alpha = \tau \neq 0$ — случай плоского поперечного изгиба. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}; \\ \sigma_3 &= \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}. \end{aligned} \right\} \quad (9.13)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = - \frac{2\tau}{\sigma}.$$

2. $\sigma_\alpha = 0$; $\sigma_{\alpha + \frac{\pi}{2}} = 0$; $\tau \neq 0$. По граням действуют только касательные напряжения — случай чистого сдвига, тогда

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \tau; \quad \sigma_3 = -\tau; \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \infty; \quad \alpha = 45^\circ. \end{aligned} \right\} \quad (9.14)$$

§ 42. ОБЪЕМНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ. ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА

При объемном напряженном состоянии (рис. 9.5) по взаимно перпендикулярным площадкам кубика действуют главные напряжения $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. На практике объемное напряженное состояние имеет место, например, у элементарного кубика в месте контакта рельса и колеса, при давлении одного шара на другой и т. д.

Определение деформаций при объемном напряженном состоянии. При наличии только одного напряжения σ_1 относительное удлинение в направлении σ_1 было бы равно $\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}$, а относительное сжатие в двух других направлениях было бы одинаково и равно $-\mu \frac{\sigma_1}{E}$.

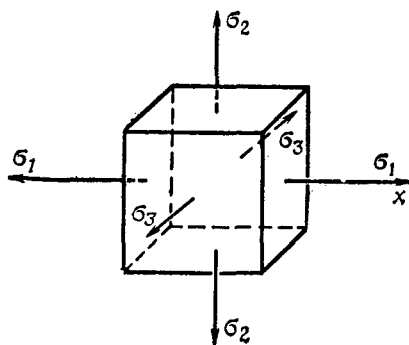


Рис. 9.5.

Поместим эти данные в первый вертикальный столбец табл. 2.

Направления	Деформации от напряжений		
	σ_1	σ_2	σ_3
Первое	$\frac{\sigma_1}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_2}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_3}{E}$
Второе	$-\mu \frac{\sigma_1}{E}$	$\frac{\sigma_2}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_3}{E}$
Третье	$-\mu \frac{\sigma_1}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_2}{E}$	$\frac{\sigma_3}{E}$

Аналогично рассуждая, заполняем 2-й и 3-й столбцы. Суммируя по строчкам, получаем выражения обобщенного закона Гука:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\mu(\sigma_2 + \sigma_3)}{E}; \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\mu(\sigma_3 + \sigma_1)}{E}; \\ \varepsilon_3 &= \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\mu(\sigma_1 + \sigma_2)}{E}. \end{aligned} \right\} \quad (9.15)$$

При $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0$ параллелепипед деформируется, но остается параллелепипедом, подобным исходному; относительные деформации будут равны

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{\sigma_0}{E} (1 - 2\mu).$$

Частный случай $\sigma_3 = 0$ — плоское напряженное состояние. Из (9.15) следует

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\mu}{E} \sigma_2; \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\mu}{E} \sigma_1. \end{aligned} \right\} \quad (9.16)$$

Решая систему (9.16), относительно напряжений получаем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2); \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1). \end{aligned} \right\} \quad (9.17)$$

Удельная потенциальная энергия. Удельную потенциальную энергию a при объемном напряженном состоянии можно определить как сумму, состоящую из трех слагаемых: $a = a_1 + a_2 + a_3$. В соответствии с (8.23)

$$a = \frac{1}{2} \sigma_1 \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \sigma_2 \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \sigma_3 \varepsilon_3. \quad (9.18)$$

Подставляя значения ϵ_1 , ϵ_2 и ϵ_3 из (9.15) в (9.18), после преобразований получаем

$$a = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}{2E}. \quad (9.19)$$

§ 43. ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

При одноосном (линейном) напряженном состоянии и условие прочности имело вид $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$, где допускаемое напряжение определяется в зависимости от напряжения, характеризующего опасное состояние материала и выбранного коэффициента запаса прочности.

Так, для хрупкого материала при статической нагрузке за опасное напряжение принимается предел прочности $\sigma_{\text{пч}}$. Поэтому

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пч}}}{[n]_{\text{пч}}}.$$

Для пластичного материала за опасное состояние принимают предел текучести $\sigma_{\text{т}}$. Тогда

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{т}}}{[n]_{\text{т}}}.$$

При знакопеременной нагрузке и симметричном цикле, при котором положительная амплитуда напряжения равна отрицательной, за опасное состояние принимают предел выносливости σ_{-1} . Пределом выносливости называется амплитуда напряжения, при которой деталь не разрушается даже после того, как число циклов будет весьма велико (10^7 или 10^8 в зависимости от материала). Тогда

$$[\sigma]_{-1} = \frac{\sigma_{-1}}{[n]_{-1}},$$

где $[n]_{\text{пч}}$, $[n]_{\text{т}}$, $[n]_{-1}$ — соответствующие коэффициенты запаса прочности*.

Все опасные напряжения ($\sigma_{\text{пч}}$, $\sigma_{\text{т}}$, σ_{-1}) при одноосном напряженном состоянии берутся из опыта. Экспериментальное исследование материалов, находящихся при плоском, а особенно объемном, напряженном состоянии, весьма затруднительно.

Поэтому, для того чтобы, используя данные, полученные при линейном напряженном состоянии на обычных испытательных машинах, решить вопрос об опасном состоянии при плоском или объемном напряженном состоянии, вводятся гипотезы — теории прочности. Каждая теория прочности, которая появлялась по мере развития науки о прочности, исходит из принятия определенного критерия, который определяет опасное состояние материала.

* При возникновении в опасной точке только касательных напряжений $\tau(\sigma=0)$ достаточно выполнить условие прочности $\tau_{\max} \leq [\tau]$.

Первая теория прочности — теория наибольших нормальных напряжений — исходит из того, что опасное состояние в материале, испытывающем сложное напряженное состояние, имеет место в том случае, когда наибольшее (по абсолютному значению) главное напряжение достигает предельно опасного значения для одноосного напряженного состояния, т. е.

$$\sigma_1 \leq [\sigma]_p \text{ или } |\sigma_3| \leq [\sigma]_{сж}, \quad (9.20)$$

где σ_1 и σ_3 — главные напряжения.

Для плоского напряженного состояния они определяются по формулам (9.13). Опыты показывают, что первая теория прочности для хрупкого материала, находящегося в плоском напряженном состоянии, удовлетворительно согласуется с опытом. Опыт также показал, что при всестороннем сжатии чугунный кубик не разрушился при давлении $20000 \text{ кгс/см}^2 = 1960 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2}$, хотя по первой теории прочности он должен был разрушиться при $\sigma = 2000 \text{ кгс/см}^2 = 196 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2}$.

Вторая теория прочности — теория наибольших относительных деформаций — исходит из предположения, что опасное состояние материала, находящегося в сложном напряженном состоянии, определяется наибольшей относительной деформацией, которая не должна превосходить допускаемую относительную деформацию для одноосного напряженного состояния. Пусть ε_1 и будет ε_{\max} . Из обобщенного закона Гука следует

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\mu}{E} (\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\varepsilon],$$

где $[\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}$ — допускаемая относительная деформация, а E и μ — средние величины, принимаемые одинаковыми как для осевого растяжения, так и для сложного напряженного состояния. После подстановки и сокращений получаем

$$\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]. \quad (9.21)$$

В левой части неравенства (9.21) стоит эквивалентное или приведенное напряжение. Формула дает удовлетворительные результаты при проверке прочности хрупкого материала.

Первая и вторая теории прочности, относящиеся к хрупкому разрушению, имеют общий недостаток: они дают результаты, отличные от опытных, полученных при исследовании прочности пластичных материалов.

В соответствии, например, с формулой (9.21) образец, растягиваемый в двух или трех направлениях, должен выдерживать большее напряжение, чем при растяжении в одном направлении. Опытные исследования этого не подтверждают.

Третья теория прочности — теория наибольших касательных напряжений — предполагает, что опасное состояние ма-

териала, находящегося в сложном напряженном состоянии, определяется максимальным касательным напряжением

$$\tau_{\max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} \leq [\tau],$$

где $[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$ — для одноосного напряженного состояния.

После подстановки и сокращения получаем

$$|\sigma_1 - \sigma_3| \leq [\sigma]. \quad (9.22)$$

Опыты показывают, что полученное условие прочности, в левой части которого стоит также приведенное напряжение, дает результаты, близкие к опытным, для пластичного материала. Однако в неравенство (9.22) не входит σ_2 , что, конечно, является недостатком третьей теории прочности, так как оно не учитывает все обстоятельства нагружения.

Четвертая энергетическая теория прочности. Согласно первой энергетической теории, предложенной Бельтрами (1885 г.), на опасное состояние материала оказывает влияние и напряжение, и деформации, т. е. величина удельной потенциальной энергии, накапливаемой в окрестности опасной точки и определяемой по формуле (9.19). Однако дополнительные исследования показали, что в условии прочности нужно учитывать не всю удельную потенциальную энергию, а только ту часть, которая соответствует изменению формы (энергия формоизменения a_ϕ), и не учитывать потенциальную энергию, идущую на изменение объема a_v . Опуская промежуточные вычисления, укажем, что

$$a_\phi = a - a_v = \frac{1 + \mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1). \quad (9.23)$$

При одноосном состоянии $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Тогда из (9.23) следует, что

$$a_\phi = \frac{1 + \mu}{3E} \sigma^2.$$

Следовательно, условие прочности по четвертой теории будет иметь вид

$$a_\phi \leq [a_\phi] = \frac{1 + \mu}{3E} [\sigma]^2. \quad (9.23, a)$$

После подстановки значения a_ϕ из формулы (9.23) в левую часть полученного неравенства (9.23, a) и преобразований получаем

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 \leq [\sigma]^2$$

или

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]. \quad (9.24)$$

Для плоского напряженного состояния при $\sigma_3 = 0$

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \leq [\sigma]. \quad (9.25)$$

Полученные равенства (9.24) и (9.25) дают результаты, удовлетворительно совпадающие с опытными для пластичных материалов, однако для материалов, неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, результаты получаются менее удовлетворительные.

Гипотезы максимальных касательных напряжений (третья теория прочности) и энергии формоизменения (четвертая теория прочности) дают близкие результаты и являются основными гипотезами предельных состояний.

Рассмотренные ранее теории прочности учитывают особенности напряженного состояния тела, но не учитывают его структурных особенностей, различной прочности материалов на растяжение и сжатие и другие факторы. Поэтому эмпирические и полумэмпирические критерии прочности являются более надежными. К ним относятся теории прочности О. Мора, П. П. Баландина, Я. Б. Фридмана и др.

Условие прочности по теории Мора будет

$$\sigma_1 - \nu\sigma_3 \leq [\sigma]_p, \quad (9.26)$$

где при $[\nu]_p = [\nu]_{\text{сж}} \nu = \frac{[\sigma]_p}{[\sigma]_{\text{сж}}}$, $[\sigma]_p$ и $[\sigma]_{\text{сж}}$ — допускаемые напряжения на растяжение и сжатие, $\sigma_1 - \nu\sigma_3 = \sigma_{\text{экв}}$ — эквивалентное напряжение.

Формула (9.26) имеет преимущество перед полученными ранее, так как в нее входят две экспериментальные величины, получаемые при испытаниях на растяжение и сжатие. При $\nu = 1$ теория Мора совпадает с третьей теорией. Однако и теория прочности Мора не учитывает, что для ряда материалов зависимость между напряжениями и деформациями нелинейная. На практике используют и теорию Баландина, которая для плоского напряженного состояния имеет вид

$$\frac{1-\nu}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{1}{2} \sqrt{(1-\nu^2)(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + 4\nu(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2)} \leq [\sigma]_p, \quad (9.27)$$

где, как и ранее,

$$\nu = \frac{[\sigma]_p}{[\sigma]_{\text{сж}}}.$$

При $\nu = 1$ формула (9.27) совпадает с четвертой теорией прочности.

ГЛАВА 10

ДЕФОРМАЦИЯ СДВИГА И КРУЧЕНИЯ

§ 44. ЧИСТЫЙ СДВИГ

Ряд деталей машин и механизмов подвергается действию внешних нагрузок, которые стремятся сдвинуть одну часть детали относительно другой, как, например, болтовые, заклепочные и сварные соединения, врубки и др. При этом в плоскостях сдвига возникают касательные напряжения. Сдвиг в чистом виде получить внешним воздействием на элемент трудно, так как он обычно сопровождается другими деформациями: растяжением или сжатием, изгибом и др.

При расчете на сдвиг делают ряд допущений, и в первую очередь принимают, что касательные напряжения по площади сдвига распределены равномерно. Так, при изучении работы одной заклепки (рис. 10.1), пользуясь методом сечения, можно записать, что

$$P - \tau \cdot F = 0,$$

где P — значение сдвигающей силы, а F — площадь сечения. Условие прочности для одной заклепки будет иметь вид

$$\tau = \frac{P}{F} \leq [\tau]_c, \quad (10.1)$$

где $[\tau]_c = (0,6 \div 0,8)[\sigma]_p$ — допускаемое напряжение на сдвиг.

При наличии нескольких заклепок предполагают, что усилия по заклепкам распределены равномерно, что более или менее справедливо лишь к моменту разрушения статической нагрузкой, когда напряжения выравниваются за счет пластических деформаций.

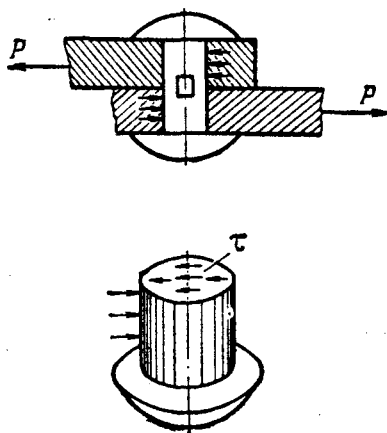


Рис. 10.1

В этом случае условие прочности будет иметь вид

$$\tau = \frac{P}{nF} = \frac{P}{n \cdot \frac{\pi d^2}{4}} \leq [\tau]_c, \quad (10.2)$$

где n — число заклепок, а d — диаметр заклепки.

В формуле (10.2) не учитываются напряжения, которые появляются вследствие изгиба под действием пары сил, растяжения вследствие реакции склепываемых листов и силы трения.

Выделяем в сечении, подвергающемся сдвигу, весьма малый параллелепипед (рис. 10.2). Под действием сдвигающего усилия он перекашивается, что является характерной особенностью сдви-

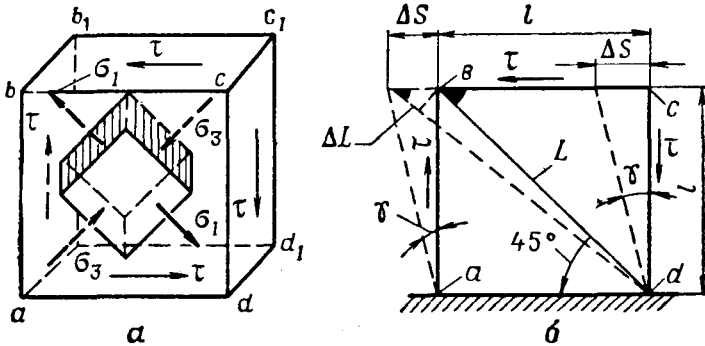


Рис. 10.2.

га. В соответствии с законом парности касательных напряжений они действуют не только по горизонтальным, но и по вертикальным (боковым) плоскостям. Рассматриваемый вид плоского напряженного состояния называется чистым сдвигом. При чистом сдвиге внутри выделенного параллелепипеда есть главные площадки, составляющие (ф. 9.14) 45° и 135° с горизонталью, по которым действуют главные напряжения: растягивающее $\sigma_1 = \tau$ и сжимающее $\sigma_3 = -\tau$ (рис. 10.2, а). Установим связь между напряжением и деформацией при чистом сдвиге. Для этого рассмотрим деформацию параллелепипеда, считая нижнюю плоскость его закрепленной. Верхняя плоскость под действием сдвигающего усилия переместится и займет новое положение. При рассмотрении деформации грани $abcd$ (рис. 10.2, б) введем следующие обозначения:

ΔS — абсолютный сдвиг;

$\frac{\Delta S}{l} = \operatorname{tg} \gamma$ — относительный сдвиг (вследствие малости угла

$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma$);

ΔL — абсолютное удлинение диагонали;

$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta S \cos 45^\circ}{l \cos 45^\circ} = \gamma \cos^2 45^\circ$ — относительное удлинение диагонали.

Определим ϵ_1 , используя обобщенный закон Гука. Из уравнения (9.15) при $\sigma_2=0$ следует, что

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\mu\sigma_3}{E}.$$

Для случая чистого сдвига $\sigma_1=\tau$ и $\sigma_3=-\tau$, следовательно,

$$\epsilon_1 = \frac{\tau(1+\mu)}{E}. \quad (10.3)$$

Учитывая, что $\epsilon_1 = \gamma \cos^2 45^\circ = \frac{\gamma}{2}$, из уравнения (10.3) следует, что

$$\tau = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma. \quad (10.4)$$

Коэффициент, стоящий перед относительным сдвигом γ , называется модулем сдвига или модулем упругости второго рода и обозначается буквой G .

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (10.5)$$

Модуль сдвига зависит от материала стержня.

Так, принимая для малоуглеродистой стали $\mu=0,3$, получаем

$$G = \frac{2 \cdot 10^6}{2(1+0,3)} = 0,77 \cdot 10^6 \approx 0,8 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}^2 = 0,75 \cdot 10^5 \text{ МН/м}^2.$$

Из формулы (10.5) видна связь между тремя упругими постоянными: коэффициентом Пуассона μ и модулями упругости при растяжении E и сдвиге G . С учетом (10.5) выражение закона Гука при сдвиге будет

$$\tau = G\gamma. \quad (10.6)$$

Из формулы (10.6) можно получить значение абсолютного сдвига. Пусть Q — сдвигающая сила и $\tau = \frac{Q}{F}$. Тогда

$$\Delta S = \frac{Q \cdot l}{GF}, \quad (10.7)$$

где GF — жесткость при сдвиге.

Полученное уравнение имеет форму, подобную уравнению, выражающему закон Гука при растяжении.

Пользуясь указанной аналогией, выражение для потенциальной энергии упругих деформаций при чистом сдвиге можно записать в виде

$$\Pi = \frac{(\Delta S)^2 GF}{2l}. \quad (10.8)$$

Соответственно удельная потенциальная энергия

$$a = \frac{\Pi}{V} = \frac{\gamma^2 G}{2} = \frac{\tau^2}{2G}. \quad (10.9)$$

§ 45. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ КРУЧЕНИИ

В практике часто приходится встречаться с кручением стержней (валов), как, например, при передаче мощности на гребной винт подводной лодки, торпеды, на лебедку брашпиля, трансмиссионные валы и т. д. В дальнейшем ограничимся рассмотрением кручения стержней, поперечное сечение которых круг или кольцо.

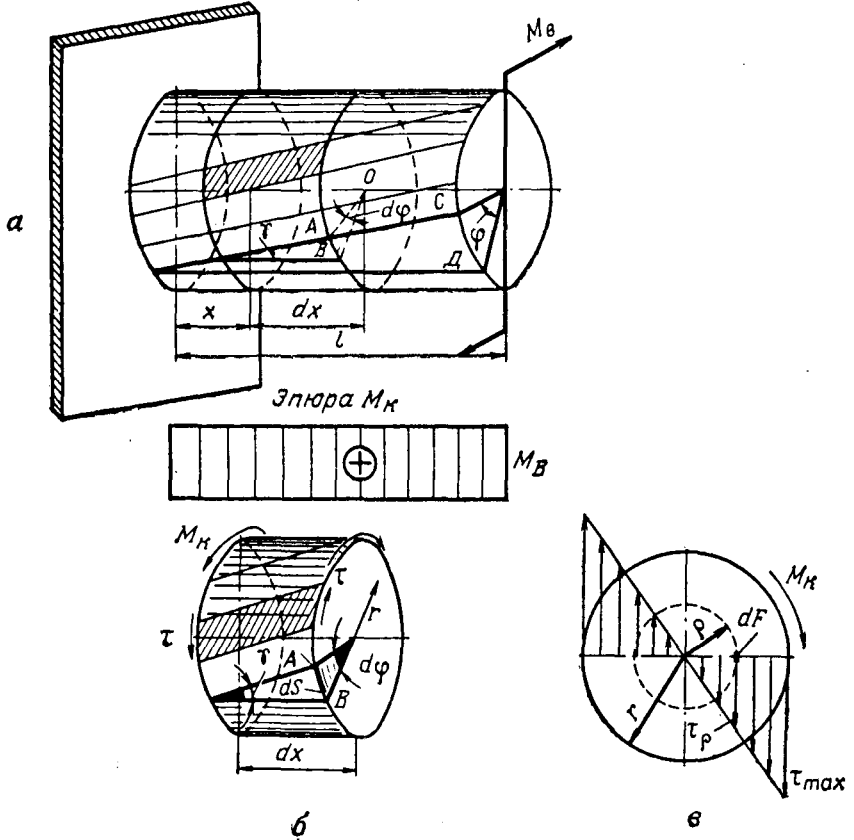


Рис. 10.3.

Рассмотрим кручение стержня круглого сечения, зашпеченного левым концом (рис. 10.3) с прямоугольной сеткой линий, нанесенных на его поверхность. Приложим на его свободном конце внешний вращающий момент (M_B).

Принимаем следующие допущения, справедливые при малых упругих деформациях:

- сечения стержня, плоские до деформации кручения, остаются плоскими и после деформации (гипотеза плоских сечений);
- расстояния между двумя любыми поперечными сечениями стержня, его общая длина и диаметр после деформации не из-

меняются; эти допущения, подтверждаемые опытом, свидетельствуют об отсутствии нормальных напряжений в сечениях;

— радиусы, проведенные в сечении, поворачиваясь после деформаций, остаются прямыми, т. е. сечения, поворачиваясь вокруг оси вала, как бы остаются жесткими круговыми пластинками.

Прямоугольная сетка, нанесенная на поверхность до нагружения, после малых упругих деформаций превратится в сетку, состоящую из параллелограммов. Это позволяет сделать вывод о появлении касательных напряжений в поперечных сечениях стержня.

В заземлении при нагружении сечение остается неподвижным. Наибольшее угловое перемещение будет иметь крайнее торцевое сечение. Обозначим его φ и назовем абсолютным углом закручивания.

Для определения крутящего момента, действующего в любом сечении стержня, строим эпюру крутящего момента M_k . Выделим в рассматриваемом сечении (рис. 10.3) элементарную площадку dF , лежащую на расстоянии ρ от центра сечения. Обозначим касательное напряжение на этой площадке τ_ρ . Тогда элементарное внутреннее усилие будет равно $\tau_\rho dF$. Элементарный крутящий момент от усилия $\tau_\rho dF$, в свою очередь, будет равен произведению усилия на плечо, т. е. $dM_k = \rho \tau_\rho dF$.

Крутящий момент, действующий в данном сечении, определится суммированием элементарных моментов

$$M_k = \int_F \rho \tau_\rho dF. \quad (10.10)$$

Установим связь между двумя переменными ρ и τ_ρ , стоящими под знаком интеграла. Для этого рассмотрим деформацию элементарного цилиндра (рис. 10.3, б) длиной dx . Из построений следует, что

$$dS = \gamma dx = r \cdot d\varphi,$$

где по закону Гука $\gamma = \frac{\tau}{G}$. Следовательно, $\frac{\tau}{G} \cdot dx = r d\varphi$ или

$$\tau = rG \cdot \frac{d\varphi}{dx}. \quad (10.11)$$

При

$$r=0, \tau=0, r=\rho, \tau_\rho = \rho G \cdot \frac{d\varphi}{dx}; \tau_{\max} = r \cdot G \cdot \frac{d\varphi}{dx}. \quad (10.12)$$

Из сопоставления последних равенств в формуле (10.12) следует, что

$$\tau_\rho = \tau_{\max} \frac{\rho}{r}, \quad (10.13)$$

т. е. касательные напряжения по сечению распределены по линейному закону; они равны нулю на оси вала и максимальны на его поверхности. Подставляя τ_ρ из (10.13) в (10.10), получаем

$$M_k = \int_F \rho \tau_{\max} \cdot \frac{\rho}{r} dF = \frac{\tau_{\max}}{r} \int_F \rho^2 dF.$$

Полученный интеграл вида $\int_F \rho^2 dF = J_p$, т. е. является полярным моментом инерции сечения. Следовательно,

$$M_k = \frac{\tau_{\max}}{r} J_p, \quad (10.14)$$

откуда

$$\tau_{\max} = \frac{M_k \cdot r}{J_p} = \frac{M_k}{W_p}, \quad (10.15)$$

где $W_p = \frac{J_p}{r}$ — полярный момент сопротивления.

В любой точке сечения, расположенной на расстоянии ρ от центра круга:

$$\tau_\rho = \frac{M_k \cdot \rho}{J_p}. \quad (10.16)$$

§ 46. ПОДБОР ДИАМЕТРА ВАЛА ИЗ УСЛОВИЯ ПРОЧНОСТИ

При расчете вала на кручение по допускаемым напряжениям условием прочности будет неравенство вида $\tau_{\max} \leq [\tau]_k$ или

$$\frac{M_k}{W_p} \leq [\tau]_k. \quad (10.17)$$

Полярный момент сопротивления поперечного сечения пустотелого вала ($\alpha = \frac{d_1}{d}$) будет (§ 21, ф. 5.32)

$$W_p = \frac{\pi r^3}{2} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi d^3}{16} (1 - \alpha^4).$$

Формула (10.17) позволяет в зависимости от задаваемых величин определить размеры сечения, проверить прочность или найти $[M_k]$.

Из условия прочности (10.17) следует, что

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_k}{\pi [\tau]_k (1 - \alpha^4)}} = 1,72 \sqrt[3]{\frac{M_k}{[\tau]_k (1 - \alpha^4)}}. \quad (10.18)$$

Величина α обычно колеблется от 0,3 до 0,7. Так, например, для промежуточного вала валопровода корабля $\alpha = 0,5 \div 0,65$, для гребного $\alpha = 0,35$ и т. п. Величина допускаемого напряжения на кручение $[\tau]_k \approx (0,5 \div 0,6) [\sigma]$.

В частном случае, когда вал сплошной ($\alpha=0$), диаметр вала определяется по формуле

$$d \geq 1,72 \sqrt[3]{\frac{M_k}{[\tau]_k}}. \quad (10.19)$$

Для тонкостенной трубы, у которой толщина стенки δ значительно меньше радиуса трубы, момент сопротивления (см. ф. 5.34) равен $W_p = 2\pi r_{cp}^2 \delta = \frac{\pi d_{cp}^2 \delta}{2}$. Следовательно, условие прочности на кручение будет иметь вид

$$\frac{M_k}{2\pi r_{cp}^2 \delta} \leq [\tau]_k, \quad (10.20)$$

откуда при $r_{cp} \approx r$

$$r \geq \sqrt{\frac{M_k}{2\pi \delta [\tau]_k}} \approx 0,4 \sqrt{\frac{M_k}{\delta [\tau]_k}}$$

или

$$d \geq \sqrt{\frac{2M_k}{\pi \delta [\tau]_k}} \approx 0,8 \sqrt{\frac{M_k}{\delta [\tau]_k}}. \quad (10.21)$$

Пример. Мощность силовой корабельной установки $N=10000$ кВт. Определить диаметр промежуточного вала валопровода, через который мощность передается от двигателя на винт. Вал полый ($\alpha=0,5$), его частота вращения равна 400 оборотам в минуту и допускаемое напряжение на кручение $[\tau]_k = = 50 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2} = 50 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$.

Решение. Определяем вращающий момент (равный в данном примере крутящему) по формуле

$$M_k = M_b = 9550 \cdot \frac{N}{n} = 9550 \cdot \frac{10000}{400} = 23,8 \cdot 10^4 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Определяем наружный диаметр вала по формуле (10.18):

$$d \geq 1,72 \sqrt[3]{\frac{M_k}{[\tau]_k (1-\alpha^4)}} = 1,72 \sqrt[3]{\frac{23,8 \cdot 10^4}{50 \cdot 10^6 (1-0,5^4)}} = 0,294 \text{ м} = 29,4 \text{ см}.$$

Внутренний диаметр вала равен $d_1 = \alpha d = 0,5 \cdot 29,4 \text{ см} = 14,7 \text{ см}$. Округляем: $d=30 \text{ см}$; $d_1=15 \text{ см}$.

§ 47. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ КРУЧЕНИИ

Определим деформацию, т. е. угол закручивания, при кручении круглого стержня. Для этого перепишем уравнение (10.11) в виде

$$\tau_{\max} = r \cdot G \frac{d\varphi}{dx},$$

откуда

$$d\varphi = \frac{\tau_{\max}}{rG} \cdot dx,$$

Подставив значение τ_{\max} из формулы (10.15), находим, что

$$d\varphi = \frac{M_K \cdot r}{I_p} \cdot \frac{dx}{rG} = \frac{M_K dx}{GI_p}.$$

Если M_K и GI_p по длине стержня (вала) x изменяются непрерывно, угол закручивания стержня будет равен

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{M_K dx}{GI_p}. \quad (10.22)$$

Если M_K и GI_p на рассматриваемом участке стержня длиной x постоянны, то

$$\varphi(x) = \frac{M_K x}{GI_p}, \quad (10.23)$$

т. е. является линейной функцией от x . В конце участка длиной, равной l :

$$\varphi(l) = \frac{M_K \cdot l}{GI_p}. \quad (10.24)$$

При наличии нескольких участков, на каждом из которых M_K и GI_p постоянны, полный угол закручивания всего стержня (вала) определится суммированием

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \left(\frac{M_K l}{GI_p} \right)_i. \quad (10.25)$$

В полученных уравнениях GI_p — жесткость поперечного сечения при кручении. Полярный момент инерции I_p характеризует влияние размеров и формы сечения стержня на его способность деформироваться при кручении.

Физической характеристикой стержня при его кручении является коэффициент, равный $C = \frac{M_K}{\varphi} = \frac{GI_p}{l}$, который называется жесткостью при кручении.

Уравнение (10.24) имеет структуру формулы, определяющей деформацию стержня при его растяжении осевыми силами, и выражает закон Гука при кручении.

Пользуясь этой аналогией, запишем выражение для потенциальной энергии упругих деформаций при кручении круглого стержня постоянного сечения в виде

$$W = \frac{\varphi^2 GI_p}{2l} = \frac{M_K^2 l}{2GI_p}. \quad (10.26)$$

Кроме условия прочности необходимо соблюдать условие жесткости, которое записывается в виде

$$\varphi_* \leq [\varphi], \quad (10.27)$$

где φ_* — относительный угол закручивания, т. е. угол закручивания вала единичной длины:

$$\varphi_* = \frac{M_K}{GI_p}. \quad (10.28)$$

Обычно допускаемые углы закручивания задаются в градусах на погонный метр (100 см). Поэтому условие жесткости удобно записать в виде

$$\frac{M_K \cdot 100}{GI_p} \cdot \frac{180}{\pi} \leq [\varphi^\circ]. \quad (10.29)$$

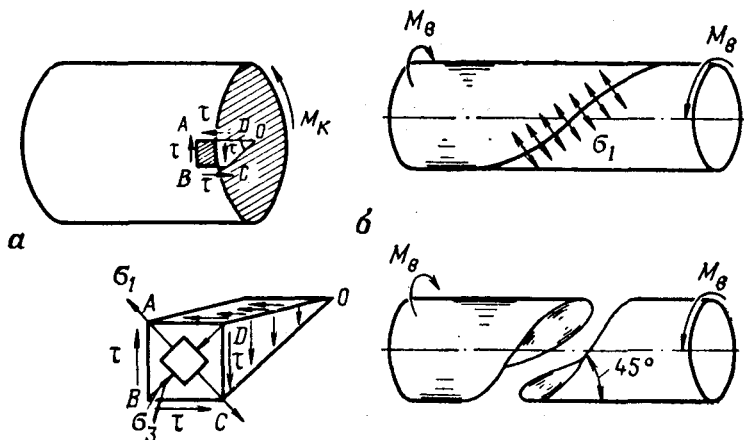


Рис. 10.4.

Подбор диаметра сечения исходя из условия жесткости $\varphi_* \leq [\varphi]$, учитывая, что $I_p = \frac{\pi d^4}{32} (1 - \alpha^4)$, производится по формуле

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 M_K \cdot 100 \cdot 180}{\pi^2 (1 - \alpha^4) [\varphi^\circ] G}} = 15,5 \sqrt[4]{\frac{M_K}{(1 - \alpha^4) [\varphi^\circ] G}}. \quad (10.30)$$

По результатам опытов установлены следующие допускаемые углы закручивания: нормальные условия работы $[\varphi^\circ] = (0,3 \div 0,5)$ град/пог. м, при знакопеременных нагрузках $[\varphi^\circ] = 0,25$ град/пог. м, ударных $[\varphi^\circ] = 0,15$ град/пог. м.

В заключение отметим, что диаграмма кручения образца из пластичного материала будет иметь на начальном участке характер, подобный диаграмме растяжения. При статических испытаниях на кручение, так же как и при растяжении, на диаграмме напряжений характерные точки называются пределом пропорциональности, пределом упругости и пределом текучести.

На рис. 10.4 представлен участок чугунного вала, к которому приложены вращающие моменты. При чистом кручении в соответствии с формулой (9.14) наибольшие нормальные (главные) напряжения σ_1 по модулю равны касательным и действуют по глав-

ным площадкам, составляющим 45 или 135° к оси вала (рис. 10.4, б). Разрушение вала из хрупкого материала произойдет по площадке, по которой действуют главные напряжения σ_1 (растяжение), так как допускаемые напряжения на растяжение для хрупкого материала значительно ниже, чем на сжатие. Характер излома при чистом кручении представлен на рис. 10.4, в.

§ 48. НЕКОТОРЫЕ СООБРАЖЕНИЯ О РАЦИОНАЛЬНЫХ ФОРМАХ СЕЧЕНИЙ ПРИ КРУЧЕНИИ

Очевидно, наиболее рациональным сечением с точки зрения прочности при кручении будет такое, которое при тех же W_p и l , что и у других, имеет наименьшую площадь сечения, а следовательно, и наименьший вес стержня. Для равной прочности сплошного и трубчатого сечения необходимо соблюдать условие, чтобы

$$(W_p)_{\text{спл}} = (W_p)_{\text{тр}} \quad \text{или} \quad \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi d_T^3(1 - \alpha^4)}{16},$$

откуда наружный диаметр трубчатого сечения будет

$$d_T = \frac{d}{\sqrt[3]{1 - \alpha^4}}. \quad (10.31)$$

Отношение соответствующих площадей трубчатого и сплошного сечения с использованием уравнения (10.31) будет равно

$$\frac{F_{\text{тр}}}{F_{\text{спл}}} = \frac{\frac{\pi d_T^2}{4}(1 - \alpha^2)}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{d_T^2}{d^2}(1 - \alpha^2) = \frac{1 - \alpha^2}{\sqrt[3]{(1 - \alpha^4)^2}}.$$

Их веса относятся при равных длинах, как и площади поперечных сечений, т. е.

$$\frac{Q_{\text{тр}}}{Q_{\text{спл}}} = \frac{1 - \alpha^2}{(1 - \alpha^4)^{\frac{2}{3}}}. \quad (10.32)$$

Ниже (табл. 3) приведены результаты расчетов по полученному уравнению (10.32), из которых видно, что применение трубчатых тонкостенных сечений дает весьма заметную экономию материала.

Таблица 3

$\alpha = \frac{d_1}{d}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Отношение весов	0,99	0,96	0,92	0,85	0,79	0,70	0,61	0,51	0,39

Следует учесть, что, если вес вала мал по сравнению с весами других деталей и стоимость изготовления его полым велика, валы изготавливаются сплошными.

§ 49. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ В ВИНТОВЫХ ПРУЖИНАХ С МАЛЫМ ШАГОМ

Пружины нашли широкое распространение в технике. Поэтому для правильной эксплуатации техники нужно уметь определять наибольшие напряжения и удлинение (укорочение) пружин под действием приложенных нагрузок. Ограничимся исследованием пружин с малым шагом. Шагом пружины называется расстояние между соответственными точками двух смежных витков.

а) Определение напряжений в винтовых пружинах

Вводим обозначения (рис. 10.5): R — средний радиус пружины; r — радиус проволоки пружины; h — шаг пружины.

Пружина имеет малый шаг. Поэтому можно условно принять, что длина витка пружины $l = 2\pi R$, а сечение витка плоскостью, проходящей через ось пружины, будет круг.

Для определения внутренних силовых факторов, действующих в сечении, применим метод сечений. Для равновесия (рис. 10.5) отсеченной части необходимо, чтобы в поперечном сечении были приложены поперечная сила $Q = P$ и крутящий момент $M_K = P \cdot R$, равный по величине моменту силы P относительно центра тяжести сечения.

Касательные напряжения от крутящего момента, предполагая, что они распределены в сечении по линейному закону, как и при кручении прямого стержня, будут равны

$$\tau_K = \frac{M_K}{W_p} = \frac{PR}{\frac{\pi r^3}{2}} = \frac{2PR}{\pi r^3} = \frac{8PD}{\pi d^3}. \quad (10.33)$$

Касательные напряжения, соответствующие деформации сдвига, предполагая, что они равномерно распределены по сечению, определяются по формуле

$$\tau_c = \frac{Q}{F} = \frac{P}{\pi \cdot r^2} = \frac{4P}{\pi d^2}; \quad (10.34)$$

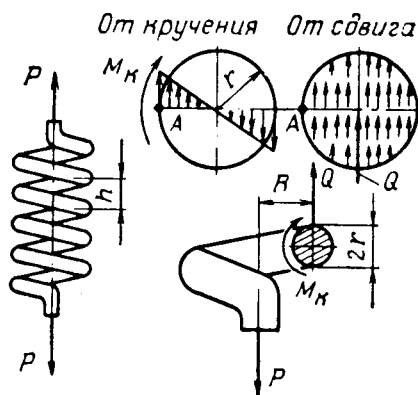


Рис. 10.5.

Из рисунка следует, что в точке A сечения эти напряжения складываются. Следовательно, наибольшее напряжение будет равно

$$\tau_{\max} = \tau_k + \tau_c = \frac{8PD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{r}{2R}\right). \quad (10.35)$$

Последнее равенство можно записать в виде

$$\tau_{\max} = K \frac{8PD}{\pi d^3}, \quad (10.36)$$

в котором поправочный коэффициент K зависит от отношения $\frac{r}{R}$. При выводе уравнения (10.35) не учитывалась кривизна витка и ее влияние на распределение касательных напряжения и их величину. Значение коэффициента K с учетом кривизны дано в табл. 4.

Таблица 4

$\frac{R}{r}$	3	4	5	6	7	8	9	10
K	1,58	1,40	1,31	1,25	1,21	1,18	1,16	1,14

Условие прочности

$$\tau_{\max} = K \frac{8PD}{\pi d^3} \leq [\tau]. \quad (10.37)$$

Допускаемое напряжение $[\tau]$, например, для рессорной стали равно $380 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2} \approx 40 \frac{\text{кгс}}{\text{мм}^2}$ и определяется при статической нагрузке. Для переменной нагрузки они снижаются обычно на $1/3 \div 2/3$; последняя цифра относится, например, к клапанным пружинам, работающим, кроме того, в условиях повышенных температур.

б) Определение деформаций пружин с малым шагом

Деформация (осадка) пружины λ может быть определена из условия, что работа A^e приложенной силы P на перемещении λ численно равна потенциальной энергии, накапливаемой пружиной при ее упругом кручении. Потенциальной энергией от других видов деформаций пренебрегаем. Тогда, учитывая, что

$$A^e = \frac{P\lambda}{2} \text{ и } \Pi = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_k^2 l}{GI_p} = \frac{1}{2} \frac{(PR)^2 l}{GI_p}, \quad (10.38)$$

где $l = 2\pi Rn$ — длина пружины, а n — число витков, получаем

$$\frac{P\lambda}{2} = \frac{1}{2} \frac{(PR)^2 l}{GI_p},$$

откуда

$$\lambda = \frac{4PR^3 n}{Gr^4} = \frac{8PD^3 n}{Gd^4}. \quad (10.39)$$

ГЛАВА 11

ДЕФОРМАЦИЯ ИЗГИБА

§ 50. НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ

Как было установлено в главе 7, при плоском поперечном изгибе в сечениях балки возникают поперечная сила Q и изгибающий момент $M_{из}$, обусловленные (рис. 11.1) наличием касательных τ и нормальных σ напряжений.

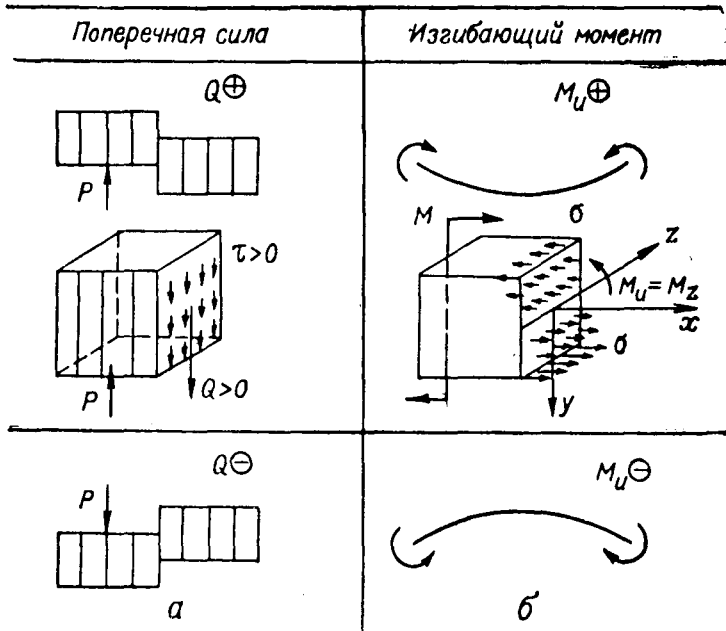


Рис. 11.1.

Рассмотрим эпюры $Q(x)$ и $M(x)$ для балки, представленной на рис. 11.2, *a*. На участке CD балки поперечная сила $Q=0$, а изгибающий момент $M_{из}=\text{const}$. Участок CD испытывает, как говорят, чистый изгиб.

Чистым изгибом (или просто изгибом) называется такое напряженное состояние стержня (балки), при котором в его поперечных сечениях действуют внутренние силы, перпендикулярные сечениям, причем главный вектор их равен нулю, а главный момент отличен от нуля.

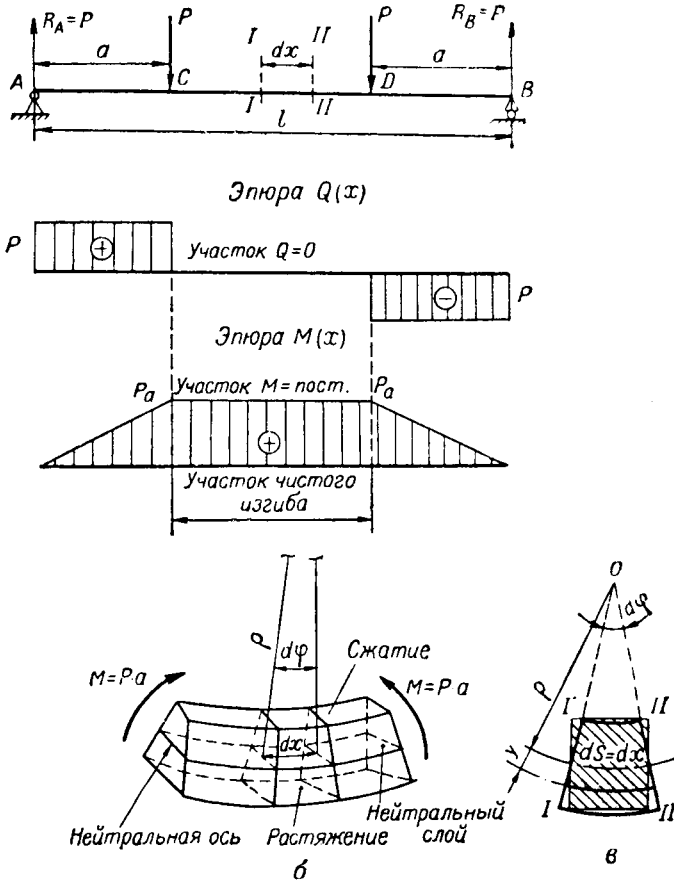


Рис. 11.2.

В результате изгиба верхние волокна балки сожмутся, нижние растянутся (рис. 11.2, б). В слое, разделяющем эти области, продольные волокна не изменяют свою длину. Такой слой называется нейтральным.

Нейтральной осью (иногда нулевой линией) называется линия пересечения нейтрального слоя с поперечным сечением. В основе определения нормальных напряжений в сечениях балки при чистом изгибе лежат следующие допущения.

По гипотезе плоских сечений (И. Бернулли*) при чистом изгибе плоские сечения, перпендикулярные оси балки до деформации, остаются и после деформации плоскими и перпендикулярными изогнутой оси (рис. 11.2, в).

Отметим, что при наличии поперечной силы Q сечения не остаются плоскими, а искривляются. Однако искривления двух смежных сечений (например, $I-I$ и $II-II$, рис. 11.2, в) происходит так, что расстояния между соответствующими точками сечений почти не изменяются; в этом случае искривление практически не влияет на величину нормальных напряжений.

Продольные волокна не дают друг на друга, а испытывают простое растяжение или сжатие.

Для точек, равноудаленных от нейтральной оси, по всей ширине симметричного сечения нормальные напряжения одинаковы.

Материал исследуемой балки, деформируясь, подчиняется закону Гука и работает одинаково на растяжение и сжатие.

Балка деформируется в условиях плоского поперечного изгиба без коробления, что обеспечивается выбором геометрической формы и размеров балки; так, для прямоугольника $\frac{h}{l}$ должно быть невелико ($\leq 0,2$).

Выделим из балки постоянного сечения на участке CD элемент балки длиной dx . При изгибе он деформируется (рис. 11.2, в). Обозначим радиус кривизны нейтрального слоя ρ , при этом длина волокна нейтрального слоя, равная $dx = \rho d\varphi$, не изменяется по сравнению с начальной. Волокно, отстоящее от нейтрального слоя на расстояние y , будет иметь длину $(\rho + y)d\varphi$. Относительное удлинение рассматриваемого волокна будет

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y) d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}.$$

Соответствующее нормальное напряжение в этом волокне будет

$$\sigma = \varepsilon E = \frac{y}{\rho} E. \quad (11.1)$$

Из равенства (11.1) следует, что нормальные напряжения по высоте сечения распределены по линейному закону. Они равны нулю на нейтральной оси ($y=0$) и максимальны в наиболее удаленных точках от оси z , т. е. при $y=y_{\max}$. Эпюра распределения нормальных напряжений по высоте балки прямоугольного сечения представлена на рис. 11.3. Однако определять напряжения по уравнению (11.1) невозможно, так как неизвестен радиус кривизны ρ . Для его определения воспользуемся тем обстоятельством, что

* Видный швейцарский математик, член семьи Бернулли, давшей 11 известных математиков и механиков (1667—1748 гг.).

изгибающий момент создается нормальными напряжениями. Тогда

$$M_n = \int_F \sigma y dF, \quad (11.2)$$

где σdF — элементарное внутреннее усилие;
 $\sigma dF \cdot y$ — момент относительно оси z , создаваемый элементарным внутренним усилием.

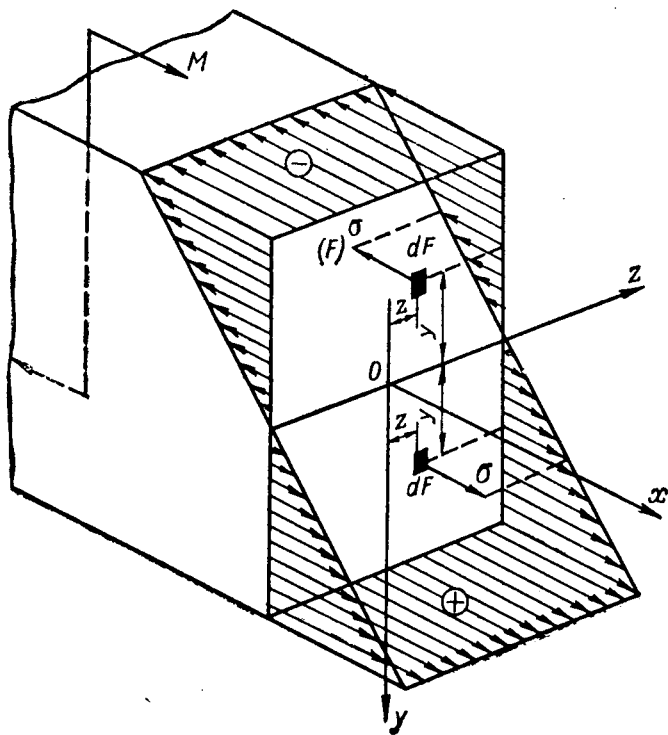


Рис. 11.3.

Подставляем значение σ из (11.1) в уравнение (11.2). Учтем, что E и $\rho = \text{const}$. Тогда

$$\frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF = M_n.$$

Интеграл вида $\int_F y^2 dF = I_z$ является осевым моментом инерции сечения относительно оси z .

Следовательно, $\frac{E}{\rho} I_z = M_n$

или

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_n}{EI_z}. \quad (11.3)$$

Произведение EI_z называется жесткостью при изгибе. Сопоставляя формулы (11.1) и (11.3), получаем

$$\sigma = \frac{M_n \cdot y}{I_z}. \quad (11.4)$$

Максимальные напряжения

$$\sigma_{\max} = \frac{M_n \cdot y_{\max}}{I_z}.$$

Величина $\frac{I_z}{y_{\max}} = W_z$ называется моментом сопротивления сечения относительно оси z . Поэтому

$$\sigma_{\max} = \frac{M_n}{W_z}. \quad (11.5)$$

Наибольшие нормальные напряжения следует определять в том сечении, где действует наибольший изгибающий момент M_{\max} , величина которого известна из построенной эпюры $M(x)$.

§ 51. УСЛОВИЕ ПРОЧНОСТИ ПО НОРМАЛЬНЫМ НАПРЯЖЕНИЯМ

Условие прочности по нормальным напряжениям при изгибе будет иметь вид

$$\frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]_н, \quad (11.6)$$

откуда

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]_н}. \quad (11.7)$$

Для прямоугольного сечения момент сопротивления относительно центральной оси z равен $W_z = \frac{bh^2}{6}$, где b — ширина, а h — высота сечения.

Задаваясь отношением ширины к высоте, из (11.7) можно определить размеры сечения. Так, если $\frac{b}{h} = K$, тогда $W_z = \frac{bh^2}{6} = = K \frac{h^3}{6}$. Подставляя в (11.7), получаем

$$h \geq \sqrt[3]{\frac{6M_{\max}}{K[\sigma]_н}}. \quad (11.8)$$

Если материал балки работает на растяжение и сжатие по-разному, проверку прочности необходимо производить по двум условиям, а именно:

$$\frac{M_{\max}}{W_z^{(1)}} \leq [\sigma]_{\text{сж}}; \quad \frac{M_{\max}}{W_z^{(2)}} \leq [\sigma]_{\text{р}}. \quad (11.9)$$

Так, для несимметричного сечения, представленного на рис. 11.4,

$$\frac{M_{\max} y_{\max}^{(1)}}{I_z} \leq [\sigma]_{\text{р}} \quad \text{и} \quad \left| \frac{M_{\max} y_{\max}^{(2)}}{I_z} \right| \leq [\sigma]_{\text{сж}}, \quad (11.10)$$

где $y_{\max}^{(1)}$ и $y_{\max}^{(2)}$ — расстояния от нейтральной оси z до наиболее удаленных точек сечения.

Формула (11.6) называется проверочной, так как она предполагает, что сечение задано. Вторая формула (11.7) называется проектировочной; при ее использовании предполагается, что размеры сечения не заданы, а их нужно определить. В этом случае после определения необходимого значения W_z , если форма сечения принимается стандартного профиля (двутавр, швеллер и др.), используют сортамент.

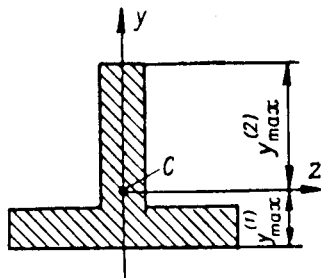


Рис. 11.4.

Пример. Для транспортировки изделия вдоль помещения с помощью блока устанавливается двутавровая балка. Определить ее сечение, если вес изделия $G=6 \text{ тс} \approx 59 \text{ кН}$ приложен в точке, в которой сила тяжести передается через блок на балку. Расстояние между опорами $l=8 \text{ м}$, допускаемое напряжение принять равным $[\sigma]_{\text{и}} = 1400 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2} \approx 137 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2}$. Весом балки пренебречь.

Решение. Наибольший изгибающий момент возникает тогда, когда изделие будет расположено посредине балки. Он будет равен

$$M_{\max} = \frac{G \cdot l}{4} = \frac{6 \cdot 8}{4} = 12 \text{ тс} \cdot \text{м} = 12 \cdot 10^5 \text{ кгс} \cdot \text{см} = 117,6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Из условия прочности (11.7) следует

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]_{\text{и}}} = \frac{12 \cdot 10^5}{1400} = 858 \text{ см}^3.$$

В соответствии с ГОСТ 8939—56 принимаем двутавр № 40, который имеет $W_z=947 \text{ см}^3$; $I_z=18930 \text{ см}^4$.

Наибольшие напряжения при установке такого двутавра будут равны

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{12 \cdot 10^5}{947} = 1280 \text{ кгс/см}^2.$$

что составляет $\frac{\sigma_{\max}}{[\sigma]_{\text{и}}} \cdot 100 = \frac{1280}{1400} \cdot 100 = 91\%$ от допускаемого.

Формула (11.6) позволяет определять допускаемую нагрузку при заданных размерах балки. В этом случае вначале определяют

$$[M_{\text{н}}] = W_z [\sigma]_{\text{н}},$$

а затем по допускаемому моменту определяют допускаемую нагрузку. Так, в предыдущем примере при установке двутавра № 40 находим, что $[M_{\text{н}}] = 947 \cdot 1400 = 13,3 \cdot 10^5$ кгс·см.

Затем, учитывая, что $[M_{\text{н}}] = \frac{[G] \cdot l}{4}$, определяем допускаемый вес изделия. Он будет равен $[G] = \frac{4[M_{\text{н}}]}{l} = \frac{4 \cdot 13,3 \cdot 10^5}{8 \cdot 10^2} = 6650$ кгс $\approx 65,2$ кН.

§ 52. КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ (ФОРМУЛА Д. И. ЖУРАВСКОГО)

При плоском поперечном изгибе в сечениях балки возникают изгибающие моменты и поперечные силы. Если изгибающие моменты обусловлены наличием нормальных напряжений, то попереч-

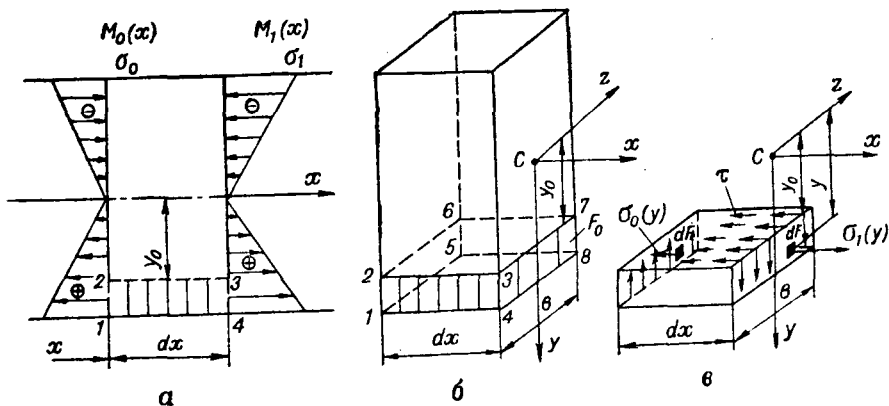


Рис. 11.5.

ные силы — наличием касательных напряжений. Формулу, определяющую касательные напряжения, получил Д. И. Журавский, изучая изгиб балки прямоугольного сечения.

Рассмотрим два смежных сечения балки постоянного прямоугольного сечения (рис. 11.5), расстояние между которыми будет dx . В левом сечении действует изгибающий момент $M_0(x)$, в правом $M_0(x) + dM(x) = M_1(x)$. Соответственно нормальные напряжения в левом и правом сечениях в точках, имеющих координату y , будут:

$$\sigma_0 = \frac{M_0 \cdot y}{I_z}; \quad \sigma_1 = \frac{M_1 \cdot y}{I_z}. \quad (11.11)$$

Эпюры нормальных напряжений даны на рис. 11.5, а. Выделим на расстоянии y_0 от нейтрального слоя параллелепипед (рис. 11.5, б

и а) и рассмотрим условия его равновесия. На левую боковую грань 1—2—6—5 площадью F_0 действуют нормальные напряжения $\sigma_0(y)$ и касательные τ , на правую 4—3—7—8 площадь F_0 — нормальные напряжения $\sigma_1(y)$ и касательные τ , равные по величине τ_1 , $\tau_1 = \tau$, одинаковые во всех точках по ширине сечения.

В силу закона о парности касательных напряжений по горизонтальной площадке 2—3—7—6 действуют касательные напряжения, по величине равные τ . Нормальные напряжения на горизонтальной площадке отсутствуют, так как было принято, что продольные волокна друг на друга не давят. Запишем уравнение равновесия выделенного параллелепипеда

$$\sum X_i = \int_{F_0} \sigma_1 dF - \int_{F_0} \sigma_0 dF - \tau b dx = 0 \quad (11.12)$$

или, подставляя значения σ_0 и σ_1 из (11.11) в (11.12), получаем

$$\frac{M_1}{I_z} \int_{F_0} y dF - \frac{M_0}{I_z} \int_{F_0} y dF = \tau \cdot b \cdot dx.$$

Интеграл, полученный в левой части равенства, является статическим моментом площади F_0 относительно оси z . Обозначим его

$$\int_{F_0} y dF = S_z^0,$$

тогда

$$\frac{M_1 - M_0}{I_z} S_z^0 = \tau \cdot b \cdot dx.$$

Учитывая, что $M_1 - M_0 = dM$ и $\frac{dM}{dx} = Q$, получим величину касательных напряжений в продольных волокнах, которые равны по модулю τ в соответствующих точках поперечного сечения,

$$\tau = \frac{Q \cdot S_z^0}{b \cdot I_z}. \quad (11.13)$$

Из формулы (11.13) следует, что касательные напряжения прямо пропорциональны поперечной силе Q и статическому моменту S_z^0 отсеченной части сечения, лежащего вне рассматриваемого слоя в направлении (рис. 11.6) от y до края сечения, и обратно пропорциональны ширине сечения и моменту инерции всего сечения. При постоянной ширине сечения b наибольшее касательное напряжение в данном сечении будет в тех точках, для которых S_z^0 наибольшее, т. е. в точках, лежащих на оси z , для которых нормальное напряжение равно нулю.

Пример. Построить эпюру распределения касательных напряжений по высоте прямоугольного сечения (рис. 11.6), для которого известны Q , размеры сечения и $I_z = \frac{bh^3}{12}$.

Решение. Определяем статический момент S_z^0 . Выделяем слой на расстоянии y от оси z . Статический момент заштрихованной площадки $S_z^0 = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot y_c$, где $y_c = \frac{h}{2} - \frac{h}{2} - y$ или $y_c = \frac{h}{2} + y$ — расстояние от центра тяжести этой площадки до оси z . Следовательно,

$$S_z^0 = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

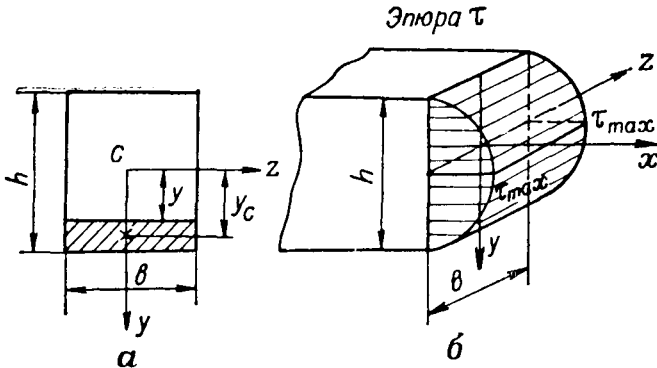


Рис. 11.6.

Подставляя все известные величины в формулу (11.13), после простейших преобразований получаем

$$\tau = \frac{6Q}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (11.14)$$

Из равенства (11.14) следует, что по высоте сечения касательные напряжения изменяются по параболическому закону. Определяем значения τ в трех точках:

$$\text{при } y = 0; \tau = \tau_{\max} = \frac{6Q}{bh^3} \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F};$$

$$\text{при } y = \pm \frac{h}{4}; \tau = \frac{9}{8} \cdot \frac{Q}{F};$$

$$\text{при } y = \pm \frac{h}{2}; \tau = 0.$$

По полученным данным строим эпюру τ по высоте сечения. Из эпюры (рис. 11.6) следует, что

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F}. \quad (11.15)$$

Пример. Определить наибольшее касательное напряжение в балке круглого сечения, предполагая, что для такой формы сечения формула Д. И. Журавского применима.

Решение. Определяем статический момент полусечения круга (рис. 11.7) $S_z^0 = F_0 \cdot y_c = \frac{\pi r^2}{2} \cdot \frac{4r}{3\pi} = \frac{2}{3} r^3 = \frac{d^3}{12}$, где $y_c = \frac{4r}{3\pi}$ — координата центра тяжести половины круга.

Вычисляем максимальное касательное напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{QS_z^c}{b \cdot I_z} = \frac{Q \cdot \frac{d^3}{12}}{d \cdot \frac{\pi d^4}{64}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{F}, \quad (11.16)$$

где

$$I_z = \frac{\pi d^4}{64}; \quad F = \frac{\pi d^2}{4}.$$

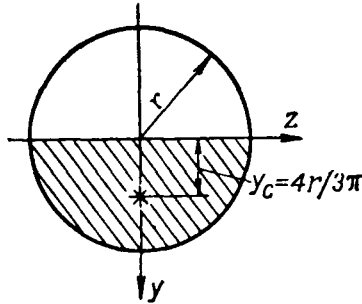


Рис. 11.7.

Пример. Установить характер распределения касательных напряжений по высоте двутавра (рис. 11.8). Для построения эпюры определить, пользуясь сим-

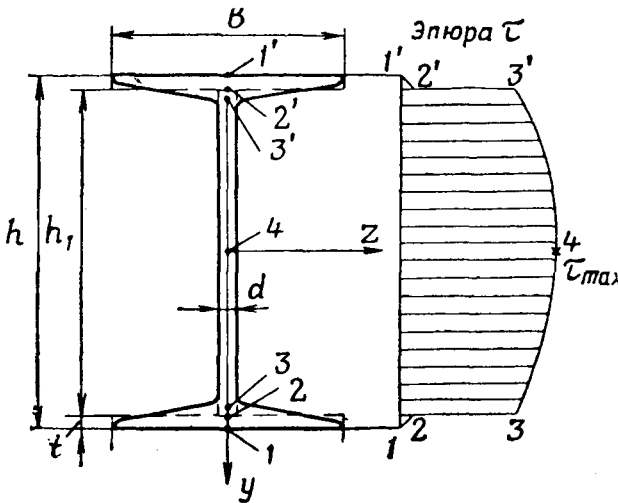


Рис. 11.8.

метрией, напряжения в четырех точках нижней половины сечения, учитывая, что точки 2 и 3 располагаются на границе между полкой и стенкой.

Момент инерции сечения взять из сортамента.

Решение. Определяем τ в четырех точках полусечения:

Точка 1:

$$S_z^0 = 0; \tau_1 = 0.$$

Точка 2:

$$S_z^0 = bt \left(\frac{h_1}{2} + \frac{t}{2} \right); \tau_2 = \frac{Qt \left(\frac{h_1}{2} + \frac{t}{2} \right)}{I_z}. \quad (11.17)$$

Точка 3:

$$S_z^0 = bt \left(\frac{h_1}{2} + \frac{t}{2} \right); \tau_3 = \frac{Q \cdot bt \left(\frac{h_1}{2} + \frac{t}{2} \right)}{d I_z} = \tau_2 \cdot \frac{b}{d}. \quad (11.18)$$

Точка 4:

$$S_z^0 = bt \left(\frac{h_1}{2} + \frac{t}{2} \right) + \frac{d \cdot h_1^2}{8}; \tau_4 = \frac{Q \left[bt \left(h_1 + t \right) + \frac{d \cdot h_1^2}{4} \right]}{2d \cdot I_z}. \quad (11.19)$$

Вид эпюры τ по высоте сечения представлен на рис. 11.8.

Примечание. Значение статического момента полусечения двутавра относительно центральной оси S_z^0 можно найти в сортаменте (ГОСТ 8239—56), что позволяет определить τ_{\max} с наименьшей затратой времени.

Указанные касательные напряжения получены для точек, лежащих на оси y двутавра. В уголках при переходе от стенки к полке имеет место концентрация напряжений, которая в приближенном расчете не учитывается.

В заключение отметим, что проверка прочности при изгибе должна производиться не только по нормальным, но и по касательным напряжениям, т. е. соблюдаться условия:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \text{ и } \tau_{\max} \leq [\tau]. \quad (11.20)$$

§ 53. ГЛАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ. ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ ПО ГЛАВНЫМ НАПРЯЖЕНИЯМ

При плоском поперечном изгибе балки каждый элемент балки находится в плоском напряженном состоянии (рис. 11.9), при котором $\sigma_\alpha \neq 0$; $\sigma_{\alpha + \frac{\pi}{2}} = 0$; $|\tau_\alpha| = |\tau_{\alpha + \frac{\pi}{2}}| = \tau$.

Главные напряжения определяются по формуле (9.13)

$$\sigma_{\max}^{\min} = \sigma_{1;3} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}, \quad (11.21)$$

где знак «+» берется при определении $\sigma_{\max} = \sigma_1$, а знак «-» при определении $\sigma_{\min} = \sigma_3$. Угол наклона главных площадок определяется по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma}. \quad (11.22)$$

Если отсчет угла в дальнейшем производить от направления главных площадок, то под углом 45° к ним располагаются площадки, по которым действуют максимальные касательные напряжения, равные по величине

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}. \quad (11.23)$$

Имея значения $\sigma_1, \sigma_2=0, \sigma_3$, можно составить условия прочности по всем теориям (см. § 43).

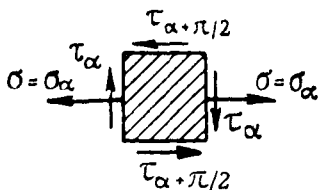
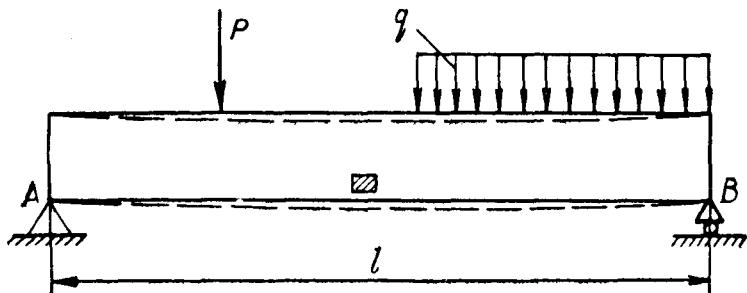


Рис. 11.9.

По первой теории прочности $\sigma_1 \leq [\sigma]$ или с учетом (11.21)

$$\frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2} \leq [\sigma]. \quad (11.24)$$

По второй теории прочности (9.21) $\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$. После подстановки значений σ_1, σ_2 и σ_3

$$\frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2} - \mu \frac{\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2} \leq [\sigma]$$

или

$$\frac{1-\mu}{2} \sigma + \frac{1+\mu}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma],$$

где μ — коэффициент Пуассона.

Если принять для стали $\mu=0,3$, тогда последнее неравенство будет иметь вид

$$0,35\sigma + 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \quad (11.25)$$

где в левой части стоит приведенное напряжение.

В соответствии с третьей теорией прочности (9.21)

$$[\sigma_1 - \sigma_3] \leq [\sigma],$$

подставляя из (11.21) значения σ_1 и σ_3 , после сокращений получаем

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (11.26)$$

Четвертая, энергетическая, теория прочности имела вид

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma].$$

При $\sigma_2 = 0$ формула упрощается

$$\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3 = (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + \sigma_1\sigma_3 \leq [\sigma]^2.$$

Подставляя значения σ_1 и σ_3 из (11.21), после простейших преобразований получаем

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (11.27)$$

Примечание. При проверке прочности допускается, чтобы приведенное напряжение превосходило допускаемое на 3–5%.

Потенциальная энергия при изгибе. При чистом изгибе изгибающий момент $M_x = \text{const} = M$. Можно показать, что потенциальная энергия упругих деформаций балки при чистом изгибе определяется по формуле

$$\Pi = \frac{M^2 l}{2EI}, \quad (11.28)$$

где l — длина балки.

При плоском поперечном изгибе в сечениях возникают и поперечная сила, и изгибающий момент, переменные по длине балки. С известным приближением и вполне достаточной для практики точностью потенциальной энергией от сдвига можно пренебречь и определить потенциальную энергию при изгибе по приближенной формуле

$$\Pi = \int_i \frac{[M(x)]^2 dx}{2EI}. \quad (11.29)$$

§ 54. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ОСИ ИЗОГНУТОЙ БАЛКИ

Под действием нагрузок, приложенных в главной плоскости балки, происходит плоский изгиб. Балка деформируется: ее сечения перемещаются и поворачиваются вокруг своих нейтральных осей z , перпендикулярных главной плоскости.

Прогибом или линейным перемещением $y(x)$ данного сечения балки называется перемещение точки на оси прямого

стержня — центра тяжести сечения — в направлении, перпендикулярном оси балки в недеформированном состоянии.

Углом поворота или угловым перемещением $\varphi(x)$ данного сечения балки называется угол, на который поворачивается данное сечение по отношению к его положению до деформации.

Определить перемещения — это значит найти прогиб и угол поворота любого сечения балки в функции координаты x , что необходимо для оценки жесткости балки. Так, в зависимости от назначения наибольший допускаемый прогиб стальных балок обычно находится в пределах $[y] = \frac{l}{1000} \div \frac{l}{250}$, где l — длина пролета балки.

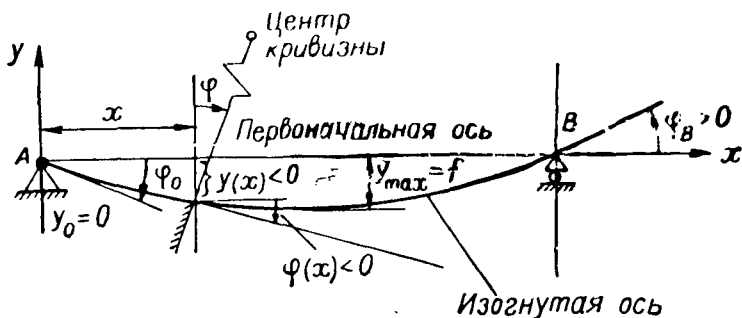


Рис. 11.10.

Выбираем прямоугольную систему координат (рис. 11.10). За положительный прогиб принимаем такой, который совпадает с направлением оси y . За положительное направление угла поворота принимаем такое, при котором отсчет φ производится от положительного направления оси x против хода часовой стрелки.

Из рис. 11.9 следует, что вследствие малости углов поворота сечений (φ_{\max} обычно не более $1^\circ = 0,017$ рад).

$$y' = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi \approx \varphi. \quad (11.30)$$

В дальнейшем влиянием поперечной силы на величину перемещений будем пренебрегать, что, как показывают подробные исследования, вполне допустимо. Кривизна связана с изгибающим моментом $M(x)$ уравнением (11.3):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI}.$$

С другой стороны, из аналитической геометрии известно, что кривизна плоской кривой определяется уравнением

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{y''}{[1 + y'^2]^{3/2}}. \quad (11.31)$$

Для балок величиной y' , а тем более ее квадратом по сравнению с единицей в уравнении (11.31) можно пренебречь. Так, при $\varphi = 0,017$ рад ошибка при отбрасывании величины y'^2 может быть оценена в 0,3%. Поэтому в дальнейшем кривизну будем определять по формуле

$$\frac{1}{\rho} = \pm y'' = \pm \frac{d^2y}{dx^2}. \quad (11.32)$$

Из сопоставления формулы (11.31) с (11.32) приближенное дифференциальное уравнение оси изогнутой балки будет

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{M(x)}{EI}. \quad (11.33)$$

Когда ось y направлена вверх, в уравнении (11.33) оставляем знак «+». В этом случае, когда балка прогнется выпуклостью вниз ($y < 0$), и кривизна (левая часть уравнения), и изгибающий момент (правая часть) положительны, т. е. имеют одинаковый знак.

При выборе положительного направления оси y вниз кривизна изменяет знак и становится отрицательной, а знак изгибающего момента не изменяется. В этом случае в формуле (11.33) перед правой частью должен быть поставлен отрицательный знак.

Для определения перемещений необходимо интегрировать дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}. \quad (11.34)$$

Отметим, что при постоянной жесткости балки EI можно записать следующие дифференциальные зависимости, учитывая, что $y = f(x)$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \varphi(x); & \frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{Q(x)}{EI}; \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{M(x)}{EI}; & \frac{d^4y}{dx^4} &= \frac{q(x)}{EI}. \end{aligned} \right\} \quad (11.35)$$

Из дифференциального уравнения (11.34) путем интегрирования можно определить $\varphi(x)$ и $y(x)$ любого сечения балки. Постоянные интегрирования определяются из граничных условий. Рассмотрим последовательность определения прогибов и углов поворота на примерах.

Пример. Определить перемещения поперечных сечений изделия под действием собственного веса, если оно установлено на двух опорах (рис. 11.11). Принять сечение постоянным по длине и интенсивность нагрузки $q = \text{const}$.

Решение. Задачу рекомендуется решать в такой последовательности.

Выбрать начало и направление оси прямоугольной системы координат. Намечать направление реакций опор, составить уравнения равновесия, решить их и определить величину и направление реакций. В рассматриваемой задаче

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2} \text{ в силу симметрии.}$$

Составить уравнение, определяющее изгибающий момент:

$$M(x) = R_A x - \frac{qx^2}{2}.$$

Записать дифференциальное уравнение оси изогнутой балки и проинтегрировать его два раза:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{R_A x - \frac{qx^2}{2}}{EI}.$$

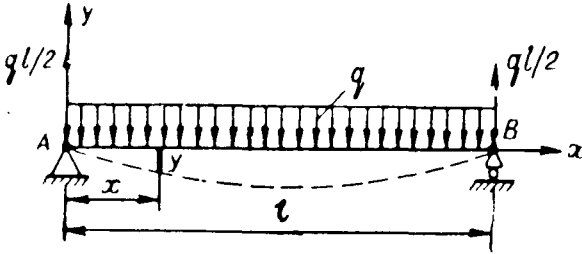


Рис. 11.11.

В результате интегрирования получаем угол поворота сечения и прогиб

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{EI} \left[\frac{R_A x^2}{2!} - \frac{qx^3}{3!} \right] + C_1; \\ y(x) &= \frac{1}{EI} \left[\frac{R_A x^3}{3!} - \frac{qx^4}{4!} \right] + C_1 x + C_2, \end{aligned} \right\} (*)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, для определения которых нужно иметь не менее двух граничных условий. Установить граничные условия. В рассматриваемом примере:

при $x=0$; $y(0)=0$ — прогиб на левой опоре;

при $x=l$; $y(l)=0$ — прогиб на правой опоре.

Дополнительное условие при симметричной нагрузке:

при $x = \frac{l}{2}$; $\varphi\left(\frac{l}{2}\right) = 0$ — угол поворота сечения посредине пролета.

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 используем первое и второе условия:

$$\text{при } x=0; \frac{1}{EI} \left[\frac{R_A \cdot 0}{3!} - \frac{q \cdot 0}{4!} \right] + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0, \text{ откуда } C_2 = 0;$$

$$\text{при } x=l; \frac{1}{EI} \left[\frac{R_A \cdot l^3}{3!} - \frac{ql^4}{4!} \right] + C_1 \cdot l = 0, \text{ откуда } C_1 = -\frac{ql^3}{24EI}.$$

Подставить значение произвольных постоянных в систему (*):

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= -\frac{ql^3}{24EI} + \frac{1}{EI} \left[\frac{qlx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} \right]; \\ y(x) &= -\frac{ql^3}{24EI} x + \frac{1}{EI} \left[\frac{qlx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} \right]. \end{aligned} \right\} (11.36)$$

При $x=l/2$ $y=y_{\max}$ и из второй формулы системы (11.36) находим

$$y_{\max} = -\frac{5ql^4}{384EI}. \quad (11.37)$$

Отметим, что при $x=0$ из (11.36) получим, что $C_1=\varphi(0)$ и $C_2=y(0)$. Таким образом, физический смысл произвольных постоянных: C_1 соответствует углу поворота в начале отсчета координаты $x-\varphi(0)=\varphi_0$, а C_2 соответствует прогибу в начале отсчета $y(0)=y_0$.

Пример. Определить средний диаметр перископа подводной лодки и перемещения (угол поворота, прогиб) его свободного конца (рис. 11.12, а), считая

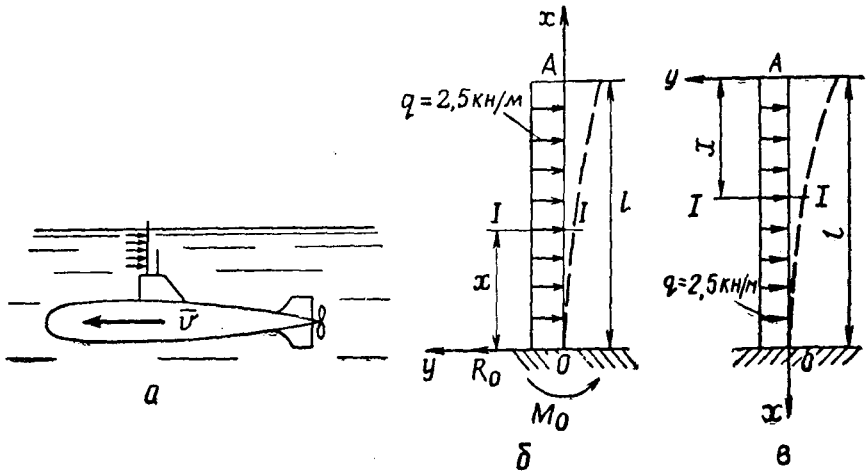


Рис. 11.12.

перископ тонкостенной трубой постоянного сечения с толщиной стенки $\delta=0,4$ см, если принять, что при определенной скорости хода $v=\text{const}$, интенсивность нагрузки от давления воды $q=2,5\frac{\text{кН}}{\text{м}}=\text{const}$ по всей длине перископа. Допускаемое напряжение принять равным $[\sigma]_{\text{н}}=100\frac{\text{МН}}{\text{м}^2}$, $l=4\text{ м}$.

Решение. Рассматриваем перископ как балку с одним зашцементированным концом — консоль, на которую действует равномерно распределенная нагрузка ($q=\text{const}$). Выбираем начало координат в точке O — зашцементировании (рис. 11.12, б). Определяем из условий равновесия опорную реакцию и опорный момент:

$$\sum Y_i = R_0 - ql = 0; \quad R_0 = ql;$$

$$\sum m_{oi} = M_0 + R_0 \cdot 0 - \frac{ql^2}{2} = 0; \quad M_0 = \frac{ql^2}{2}.$$

Записываем выражение для изгибающего момента в сечении x

$$M(x) = M_0 + R_0x - \frac{qx^2}{2}.$$

Интегрируем два раза дифференциальное уравнение (11.34), обозначая постоянные интегрирования φ_0 и y_0 :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_0 + R_0x - \frac{qx^2}{2}}{EI};$$

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_0 + \frac{M_0 x + R_0 \frac{x^2}{2} - \frac{q x^3}{6}}{EI};$$

$$y = y_0 + \varphi_0 \cdot x + \frac{M_0 \frac{x^2}{2} + R_0 \frac{x^3}{6} - \frac{q x^4}{24}}{EI}.$$

Определяем постоянные из граничных условий, а именно: в защемлении угол поворота и прогиб равны нулю, т. е. при $x=0$ $\varphi_0=0$; $y_0=0$.

Записываем формулы, определяющие угол поворота и прогиб любого сечения. После подстановки значений R_0 и M_0 и преобразований:

$$\varphi(x) = -\frac{q l^3}{6EI} \left[-3 \frac{x^2}{l^2} + 3 \frac{x}{l} + \frac{x^3}{l^3} \right];$$

$$y(x) = -\frac{q l^4}{24EI} \left[-4 \frac{x^3}{l^3} + 6 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^4}{l^4} \right].$$

На свободном конце при $x=l$

$$\varphi_{\max} = -\frac{q l^3}{6EI}; \quad y_{\max} = -\frac{q l^4}{8EI}.$$

Начало координат можно выбрать и на свободном конце консоли (рис. 11.12, θ). Тогда опорные реакции определять не нужно; изгибающий момент в сечении $I-I$ (координата x отсчитывается от свободного конца консоли — точки A) будет равен $M(x) = -\frac{q x^2}{2}$.

Подставляем значение $M(x)$ в дифференциальное уравнение (11.34) и интегрируем его дважды при граничных условиях $x=l$; $\varphi(l)=0$ и $y(l)=0$.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{q x^2}{2EI}; \quad \frac{dy}{dx} = \varphi(x) = -\frac{q x^3}{6EI} + C_1; \quad y(x) = -\frac{q x^4}{24EI} + C_1 x + C_2.$$

Постоянные интегрирования определяются из уравнений:

$$\varphi(l) = -\frac{q l^3}{6EI} + C_1 = 0, \text{ откуда } C_1 = \varphi_A = \frac{q l^3}{6EI} \text{ — угол поворота сечения } A;$$

$$y(l) = -\frac{q l^4}{24EI} + \frac{q l^4}{6EI} + C_2 = 0, \text{ откуда } C_2 = y_A = -\frac{q l^4}{8EI} \text{ — прогиб сечения } A.$$

При изменении направления оси x изменяется знак φ (см. знак угла поворота сечения A).

После подстановки значений C_1 и C_2 и преобразований получаем следующие уравнения для определения угла поворота и прогиба любого сечения:

$$\varphi(x) = \frac{q l^3}{6EI} \left(1 - \frac{x^3}{l^3} \right);$$

$$y(x) = -\frac{q l^4}{8EI} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{x}{l} + \frac{x^4}{3l^4} \right).$$

Вычисляем средний диаметр перископа у основания из условия прочности

$$W = \frac{\pi d^2 \delta}{4} \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]_n} = \frac{q l^3}{2} = \frac{2,5 \cdot 4^3}{100 \cdot 10^3} = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3,$$

откуда

$$d = \sqrt[3]{\frac{4W}{\pi \delta}} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 0,2 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,004}} = 0,252 \text{ м} = 25,2 \text{ см.}$$

Вычисляем наибольшие значения угла поворота и прогиба конца перископа,

если $I = W \frac{d}{2} = 200 \cdot \frac{25,2}{2} = 2520 \text{ см}^4 = 2,52 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4 = \text{const}$ по всей длине:

$$|\varphi_{\max}| = \frac{q l^3}{6EI} = \frac{2,5 \cdot 10^3 \cdot 4^3}{6 \cdot 1,96 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2,52 \cdot 10^{-5}} = 5,33 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

$$|y_{\max}| = \frac{q l^4}{8EI} = \frac{2,5 \cdot 10^3 \cdot 4^4}{8 \cdot 1,96 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2,52 \cdot 10^{-5}} \approx 1,62 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 1,62 \text{ см.}$$

Отметим, что в рассмотренном примере

$$\frac{y_{\max}}{l} = \frac{1,62}{400} = \frac{1}{247}.$$

§ 55. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В сложных условиях, когда балка нагружена различного рода нагрузками, образующими несколько участков, рекомендуется применять универсальные уравнения, вывод которых дан ниже.

Рассмотрим балку, к которой приложены сосредоточенные силы, величина которых P_i , пары сил (моменты) M_i и распределенные нагрузки постоянной интенсивности q_i (рис. 11.13). Если распределенная нагрузка не доходит до конца балки, ее следует довести до конца, приложив для компенсации нагрузку такой же интенсивности, но направленную в противоположную сторону.

Запишем с помощью единичной функции (см. стр. 95) изгибающий момент для сечения любого участка, в том числе для последнего

$$M(x) = \sum M_i (x - a_i)^\circ I_{a_i; x} + \sum P_i (x - b_i) I_{b_i; x} + \\ + \sum \frac{q_i (x - d_{i1})^2}{2} I_{d_{i1}; x} - \sum \frac{q_i (x - d_{i2})^2}{2} I_{d_{i2}; x}.$$

Единичные функции указывают, на каких участках действуют изгибающие моменты. Так, запись $P_i (x - b_i) I_{b_i; x}$ говорит о том, что при $x < b_i$, $P_i (x - b_i) \cdot 0 = 0$; при $x > b_i$, $P_i (x - b_i) \cdot 1 \neq 0$, т. е. момент, создаваемый силой P_i при $x > b_i$, существует. Подставим вы-

ражение момента $M(x)$ в дифференциальное уравнение упругой линии и проинтегрируем его два раза, не раскрывая скобок:

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \frac{1}{EI} \left[\sum \frac{M_i (x - a_i) l_{a_i; x}}{1!} + \sum \frac{P_i (x - b_i)^2 l_{b_i; x}}{2!} + \right. \\ \left. + \sum \frac{q_i (x - d_{i1})^3 l_{d_{i1}; x}}{3!} - \sum \frac{q_i (x - d_{i2})^3 l_{d_{i2}; x}}{3!} \right];$$

$$y(x) = y_0 + \varphi_0 x + \frac{1}{EI} \left[\sum \frac{M_i (x - a_i)^2 l_{a_i; x}}{2!} + \sum \frac{P_i (x - b_i)^3 l_{b_i; x}}{3!} + \right. \\ \left. + \sum \frac{q_i (x - d_{i1})^4 l_{d_{i1}; x}}{4!} - \sum \frac{q_i (x - d_{i2})^4 l_{d_{i2}; x}}{4!} \right],$$

где φ_0 и y_0 — угол поворота и прогиб сечения в начале отсчета координаты x , т. е. начальные параметры.

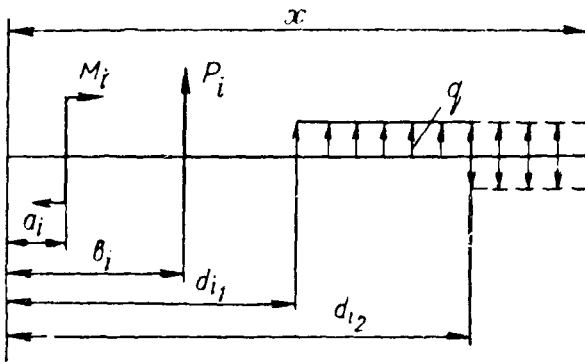


Рис. 11.13.

Обозначим:

$(x - a_i) l_{a_i; x} = m_i$ — расстояние от места приложения пары сил (момента) до сечения, имеющего координату x ;

$(x - b_i) l_{b_i; x} = p_i$ — расстояние от точки приложения силы до рассматриваемого сечения;

$(x - d_{i1}) l_{d_{i1}; x} = K_{нач\ i}$ } расстояния от начала и соответствующего
 $(x - d_{i2}) l_{d_{i2}; x} = K_{кон\ i}$ } конца равномерно распределенной нагрузки до рассматриваемого сечения.

Подставляя принятые обозначения, получаем уравнения, определяющие угол поворота $\varphi(x)$ и прогиб $y(x)$ любого сечения:

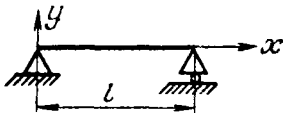
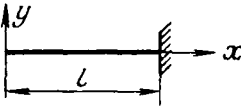
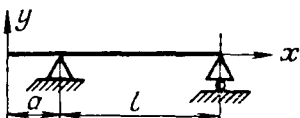
$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi_0 + \frac{1}{EI} \left[\sum \frac{M_i m_i}{1!} + \sum \frac{P_i p_i^2}{2!} + \right. \\ &\quad \left. + \sum \frac{q_i (K_{\text{нач}}^3 - K_{\text{кон}}^3)_i}{3!} \right]; \\ y(x) &= y_0 + \varphi_0 \cdot x + \frac{1}{EI} \left[\sum \frac{M_i m_i^2}{2!} + \sum \frac{P_i p_i^3}{3!} + \right. \\ &\quad \left. + \sum \frac{q_i (K_{\text{нач}}^4 - K_{\text{кон}}^4)_i}{4!} \right]. \end{aligned} \right\} (11.38)$$

Полученные уравнения называются универсальными; они позволяют определять перемещения балок без проведения предварительного интегрирования.

Реакции и опорный момент включаются в число сосредоточенных сил и соответственно моментов.

При определении знаков слагаемых нужно учитывать принятые ранее правила знаков для изгибающего момента. Начальные параметры φ_0 и y_0 определяются из граничных условий. Некоторые из них приведены в табл. 5.

Таблица 5

	$x=0; y_0=0$ $x=l; y(l)=0$
	$x=l; \varphi(l)=0$ $x=l; y(l)=0$
	$x=\alpha; y(\alpha)=0$ $x=\alpha+l; y(\alpha+l)=0$

Пример. Определить с помощью универсальных уравнений угол поворота опорного сечения A и прогиб сечения C (рис. 11.14), если $E = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{МН}}{\text{М}^2}$; $M = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $l = 4 \text{ м}$; $q = 20 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$; $I_z = 0,346 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$.

Решение. Составляем уравнения равновесия в виде $M_B = \sum m_{iB} = 0$, $M_A = \sum m_{iA} = 0$ и определяем опорные реакции (рис. 11.14). Они получаются равными:

$$R_A = -\frac{M}{l} + \frac{3}{8} ql = -\frac{40}{4} + \frac{3}{8} \cdot 20 \cdot 4 = 20 \text{ кН};$$

$$R_B = \frac{M}{l} + \frac{1}{8} ql = \frac{40}{4} + \frac{1}{8} \cdot 20 \cdot 4 = 20 \text{ кН}.$$

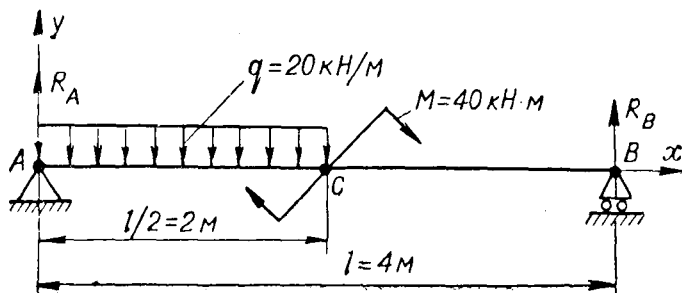


Рис. 11.14.

Производим проверку, используя третье уравнение равновесия:

$$\sum Y_i = R_A + R_B - \frac{ql}{2} = 20 + 20 - \frac{20 \cdot 4}{2} \equiv 0.$$

Записываем универсальные уравнения для сечения на втором участке, учитывая, что

$$m_i = \left(x - \frac{l}{2}\right) I_{l; x} = (x - 2) I_{2; x}; \quad p_i = x; \quad K_{\text{нач}} = x; \\ K_{\text{кон}} = (x - 2) I_{2; x};$$

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \frac{1}{EI_z} \left\{ \frac{M(x-2) I_{2; x}}{1!} + \frac{R_A x^2}{2!} - \frac{q [x^3 - (x-2)^3 I_{2; x}]}{3!} \right\};$$

$$y(x) = y_0 + \varphi_0 x + \frac{1}{EI_z} \left\{ \frac{M(x-2)^2 I_{2; x}}{2!} + \frac{R_A x^3}{3!} - \frac{q [x^4 - (x-2)^4 I_{2; x}]}{4!} \right\}.$$

Граничные условия:

$$x = 0; \quad y(0) = y_0 = 0; \\ x = l; \quad y(l) = 0.$$

Используем второе граничное условие

$$y(l) = \varphi_0 \cdot l + \frac{1}{EI_z} \left\{ \frac{M(l-2)^2}{2!} + \frac{R_A l^3}{3!} - \frac{q [l^4 - (l-2)^4]}{4!} \right\} = 0.$$

После подстановки значения R_A и преобразований находим

$$\varphi_0 = \varphi_A = -\frac{1}{EI_z} \left(-\frac{Ml}{24} + \frac{9}{384} ql^3 \right).$$

Подставляя числовые значения

$$\varphi_0 = \varphi_A = -\frac{1}{EI_z} \left(-\frac{40 \cdot 4}{24} + \frac{9}{384} 20 \cdot 4^3 \right) = -\frac{70}{3EI_z} \text{ кН} \cdot \text{м}^2 = -\frac{7}{3EI_z} \text{ тс} \cdot \text{м}^2.$$

Угол поворота и прогиб любого сечения определяются по уравнениям:

$$\varphi(x) = -\frac{70}{3EI_z} + \frac{1}{EI_z} \left\{ \frac{40(x-2)}{1!} I_{2;x} + \frac{20 \cdot x^2}{2!} - \frac{20 [x^3 - (x-2)^3 I_{2;x}]}{3!} \right\};$$

$$y(x) = -\frac{70}{3EI_z} x + \frac{1}{EI_z} \left\{ \frac{40(x-2)^2}{2!} I_{2;x} + \frac{20 \cdot x^3}{3!} - \frac{20 [x^4 - (x-2)^4 I_{2;x}]}{4!} \right\}.$$

В частности, для сечения $C(x_c=2 \text{ м})$ прогиб будет равен

$$\begin{aligned} y_c = y\left(\frac{l}{2}\right) = y(2) &= -\frac{70 \cdot 2}{3EI_z} + \frac{20 \cdot 2^3}{6EI_z} - \frac{20 \cdot 2^4}{24EI_z} = \\ &= -\frac{100 \text{ кН} \cdot \text{м}^2}{3EI_z} \approx -\frac{10 \text{ тс} \cdot \text{м}^2}{3EI_z}. \end{aligned}$$

Подставляя числовые значения, получаем:

$$\varphi_0 = -\frac{70 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = -0,33 \cdot 10^{-2} \text{ рад } (\approx -0,58^\circ);$$

$$y_0 = -\frac{100 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = -0,49 \cdot 10^{-2} \text{ м} = -0,49 \text{ см}.$$

§ 56. ПОНЯТИЕ О ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКОМ СПОСОБЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Обычно при расчете на прочность для определения наибольшего изгибающего момента строят эпюру $M(x)$. В основе графоаналитического способа лежит использование эпюры $M(x)$ для определения перемещений.

Запишем приближенное дифференциальное уравнение оси изогнутой балки (11.34)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI},$$

где $M(x)$ — изгибающий момент, задан в виде эпюры графически (рис. 11.15).

Интегрируем приближенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x) = \varphi_0 + \int_0^x \frac{M(t) dt}{EI}. \quad (11.39)$$

Выделяем на эпюре $M(x)$ полоску шириной dt . Тогда

$$\int_0^x M(t) dt = F(x),$$

где $F(x)$ — площадь эпюры $M(x)$, ограниченная ординатой сечения, угол поворота которого определяется. Следовательно, при $EI = \text{const}$

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \frac{F(x)}{EI}. \quad (11.40)$$

Интегрируем равенство (11.39), получаем

$$y(x) = y_0 + \varphi_0 x + \frac{1}{EI} \int_0^x dx \int_0^x M(t) dt.$$

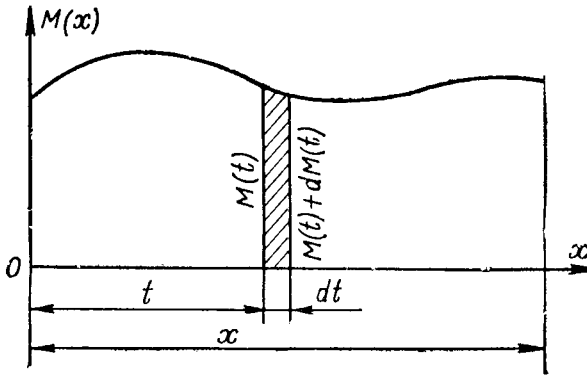


Рис. 11.15.

Можно показать, что

$$\int_0^x dx \int_0^x M(t) dt = \int_0^x (x-t) M(t) dt.$$

В соответствии с рис. 11.15

$$\int_0^x (x-t) M(t) dt = S(x),$$

где $S(x)$ — статический момент площади эпюры $F(x)$, лежащей слева от рассматриваемого сечения, относительно центра тяжести сечения, прогиб которого определяется. Следовательно,

$$y(x) = y_0 + \varphi_0 x + \frac{S(x)}{EI}. \quad (11.41)$$

Формулы (11.40) и (11.41) позволяют определить угол поворота и прогиб любого сечения балки. Для пользования этими уравнениями необходимо иметь эпюру $M(x)$, знак которой нужно учитывать при определении $\varphi(x)$ и $y(x)$.

Пример. Определить графоаналитическим путем (рис. 11.16) угол поворота опорных сечений и прогиб посредине пролета двухопорной балки AB , к которой на правой опоре приложена пара сил, момент которой M .

Решение. Строим эпюру $M(x)$.

Записываем граничные условия $y(0) = y_0 = 0$; $y(l) = 0$.

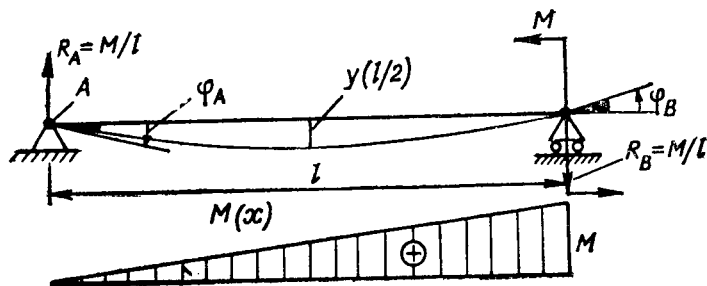


Рис. 11.16.

Подставляем в (11.41) $y(l) = \varphi_0 \cdot l + \frac{S(l)}{EI} = 0$,

откуда

$$\varphi_0 = -\frac{S(l)}{l \cdot EI} = -\frac{1}{lEI} \left(\frac{1}{2} Ml \cdot \frac{l}{3} \right) = -\frac{Ml}{6EI} = \varphi_A.$$

Определяем из формулы (11.40) угол поворота сечения B

$$\varphi_B = \varphi_0 + \frac{F(l)}{EI} = -\frac{Ml}{6EI} + \frac{\frac{1}{2} Ml}{EI} = \frac{Ml}{3EI}.$$

Вычисляем из равенства (11.41) прогиб при $x = \frac{l}{2}$

$$\begin{aligned} y\left(\frac{l}{2}\right) &= \varphi_0 \cdot \frac{l}{2} + \frac{S\left(\frac{l}{2}\right)}{EI} = -\frac{Ml}{6EI} \cdot \frac{l}{2} + \\ &+ \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{M}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2}}{EI} = -\frac{Ml^2}{16EI}. \end{aligned}$$

В результате получено:

$$\varphi_A = -\frac{Ml}{6EI}; \quad \varphi_B = \frac{Ml}{3EI}; \quad y\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{Ml^2}{16EI}, \quad (11.42)$$

что совпадает с точным решением.

При сложном очертании эпюры $M(x)$ можно (рис. 11.17) вос-

пользоваться следующими приближенными формулами для определения площади и статического момента*:

$$\left. \begin{aligned} F(l_i) &= \frac{l_i}{6} \left[M(0) + 4M\left(\frac{l_i}{2}\right) + M(l_i) \right]; \\ S(l_i) &= \frac{l_i^2}{6} \left[M(0) + 2M\left(\frac{l_i}{2}\right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (11.43)$$

где l_i — длина участка, на котором $M(x)$ изменяется по определенному одинаковому закону.

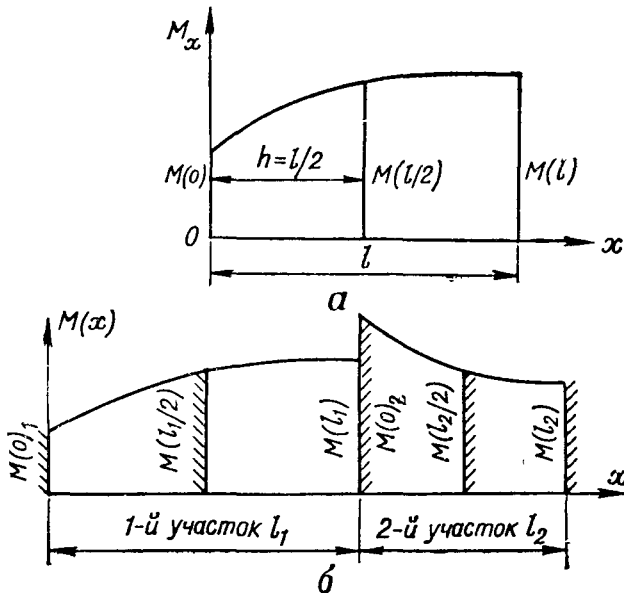


Рис. 11.17.

Для определения статического момента относительно оси, параллельной данной, можно воспользоваться равенством (5.19).

$$S(l+a) = S(l) + aF, \quad (11.44)$$

где a — расстояние между осями.

Пример. Определить угол поворота и прогиб сечения B консоли (рис. 11.18) графоаналитическим способом.

Решение. Строим эпюру изгибающего момента $M(x)$.

Записываем граничные условия:

$$x = 0; \varphi_0 = 0; y_0 = 0.$$

* Формулы точны, если эпюра $M(x)$ ограничена кривыми не выше третьего порядка.

Для сечения $x=l$, используя (11.40) и (11.41), получаем:

$$\begin{aligned}\varphi(l) = \varphi_B &= \frac{F(l)}{EI} = \frac{l}{6EI} \left[M(0) + 4M\left(\frac{l}{2}\right) + M(l) \right] = \\ &= \frac{l}{6EI} \left[-\frac{ql^2}{2} - 4\frac{ql^2}{8} + 0 \right] = -\frac{ql^3}{6EI};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y(l) = y_B &= \frac{S(l)}{EI} = \frac{l^2}{6EI} \left[M(0) + 2M\left(\frac{l}{2}\right) \right] = \\ &= \frac{l^2}{6EI} \left[-\frac{ql^2}{2} - 2\frac{ql^2}{8} \right] = -\frac{ql^4}{8EI}.\end{aligned}$$

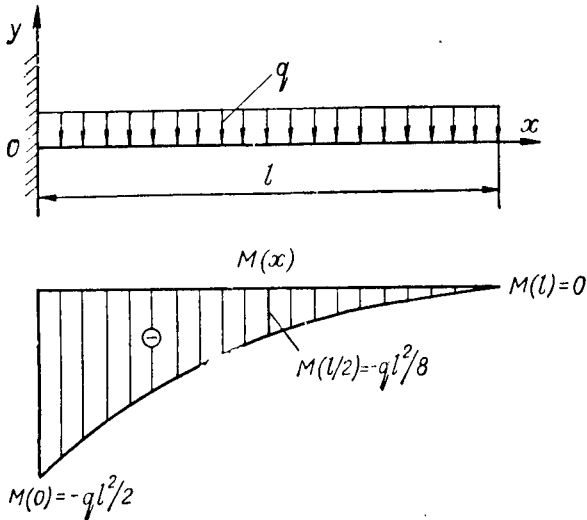


Рис. 11.18.

§ 57. ПОНЯТИЕ О СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛКАХ

Часто по условиям эксплуатации необходимо число опорных устройств делать больше двух, например у валопровода, соединяющего силовую установку с гребным винтом, у коленчатого вала многоцилиндрового двигателя и т. д.

Установка дополнительных опор позволяет уменьшить деформации и напряжения, но требует большей точности монтажа. Системы, у которых с точки зрения равновесия имеются «лишние» связи, называются статически неопределимыми.

Разность между числом связей и числом уравнений равновесия характеризует статическую неопределимость системы. Для возможности определения реакций связей, а затем построения эпюр $Q(x)$ и $M(x)$ необходимо иметь кроме уравнений равновесия дополнительные уравнения, которые получаются из рассмотрения условий совместности перемещений тех сечений, где приложены лишние связи.

Рассмотрим балки, у которых число опор больше двух. Такие балки называются неразрезными или многопролетными. Ось неразрезной балки обладает свойством деформироваться так, что углы поворота балки слева и справа от каждой опоры будут численно равны между собой.

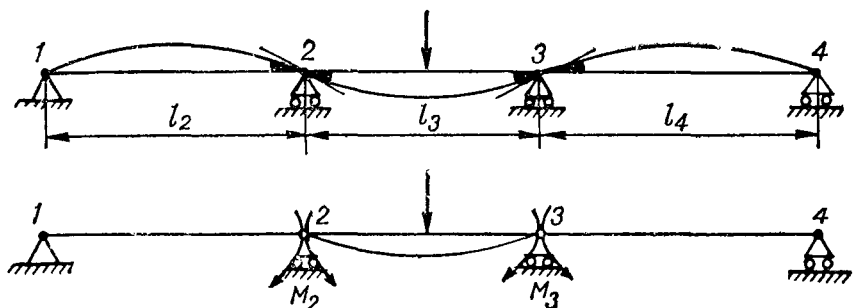


Рис. 11.19.

Мысленно разрежем балку над «лишними» опорами и соединим части ее между собой шарнирами. Этим мы нарушим связь между пролетами (рис. 11.19). Для восстановления связи прикла-

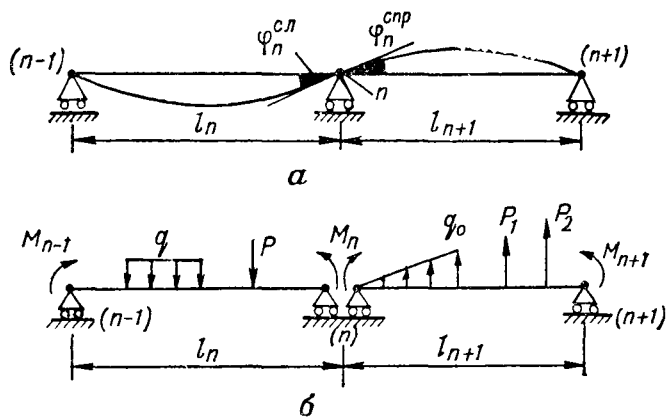


Рис. 11.20.

дываем изгибающие опорные моменты, которые являются пока неизвестными. Они определяются из тех условий, что под действием приложенных нагрузок и искомых опорных моментов углы поворота сечений слева и справа от каждой опоры должны быть равны. Обозначим длины пролетов по номеру правой опоры. Выделим два смежных пролета: l_n — слева от опоры n и l_{n+1} — справа от нее (рис. 11.20, а). Каждый пролет (отдельная двухопорная балка) находится под действием момента на левой опоре, момента на правой опоре и пролетной нагрузки (рис. 11.20, б).

$$\text{Для неразрезной балки } \varphi_n^{cл} = \varphi_n^{cпр}. \quad (11.45)$$

С учетом равенств 11.42, считая опорные моменты положительными, получим:

Угол поворота $\varphi_n^{cл}$ слева от опоры n балки l_n (рис. 11.20, б)

$$\varphi_n^{cл} = \frac{M_{n-1}l_n}{6EI} + \frac{M_n l_n}{3EI} + \varphi_n^{cл*}. \quad (*)$$

Угол поворота справа от опоры n балки l_{n+1}

$$\varphi_n^{cпр} = -\frac{M_n l_{n+1}}{3EI} - \frac{M_{n+1} l_{n+1}}{6EI} + \varphi_n^{cпр*}, \quad (**)$$

где $\varphi_n^{cл*}$ — угол поворота разрезной балки слева от опоры n от нагрузки, приложенной в пролете l_n ; соответственно $\varphi_n^{cпр*}$ — угол поворота справа от опоры n от нагрузки в пролете l_{n+1} (приняты положительными). После подстановки в (11.45) значений φ_n и φ_{n+1} и простейших преобразований получаем

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6EI [\varphi_n^{cл} - \varphi_n^{cпр}]. \quad (11.46)$$

Углы $\varphi_n^{cл}$ и $\varphi_n^{cпр}$ определяются аналитическим или графоаналитическим способом или могут быть взяты из справочных таблиц. У консольных балок моменты над крайними опорами равны изгибающим моментам от нагрузок, приложенных к консольным частям балок. При защемлении конца неразрезной балки вводят условно дополнительный фиктивный пролет и опору. После составления уравнений трех моментов длина фиктивного пролета принимается равной нулю.

Решая полученную систему уравнений (11.46), определяют опорные моменты, равные изгибающим в сечениях над опорами. Записывая выражения изгибающего момента последовательно в сечениях над каждой из опор, можно определить опорные реакции, после чего построить эпюры $Q(x)$ и $M(x)$.

Пример. Записать уравнения трех моментов, определить неизвестные опорные моменты, определить реакции опор и построить эпюру $M(x)$ методом сложения для балки с нагрузками, представленными на рис. 11.21.

Решение. Определяем, что балка трижды статически неопределима: «лишние» опоры 2 и 3 и защемление, т. е. неизвестные M_2, M_3, M_4 .

Составляем уравнение трех моментов для опоры $n=2$

$$M_1 l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3 l_3 = -6EI (\varphi_2^{cл} - \varphi_2^{cпр}),$$

$$\text{где } M_1 = -Pl_1 = -10 \cdot 1 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad \varphi_2^{cл} = \frac{Ml_2}{3EI} = \frac{30 \cdot 2}{3EI} = \frac{20}{EI}$$

(пару M относим к пролету l_2)

$$\varphi_2^{cпр} = -\frac{Pl_3^2}{16EI} = -\frac{40 \cdot 2^2}{16EI} = -\frac{10}{EI}.$$

После подстановки числовых значений получаем

$$-10 \cdot 2 + 2M_2(2 + 2) + M_3 \cdot 2 = -6EI \left(\frac{20}{EI} + \frac{10}{EI} \right)$$

или

$$4M_2 + M_3 = -80.$$

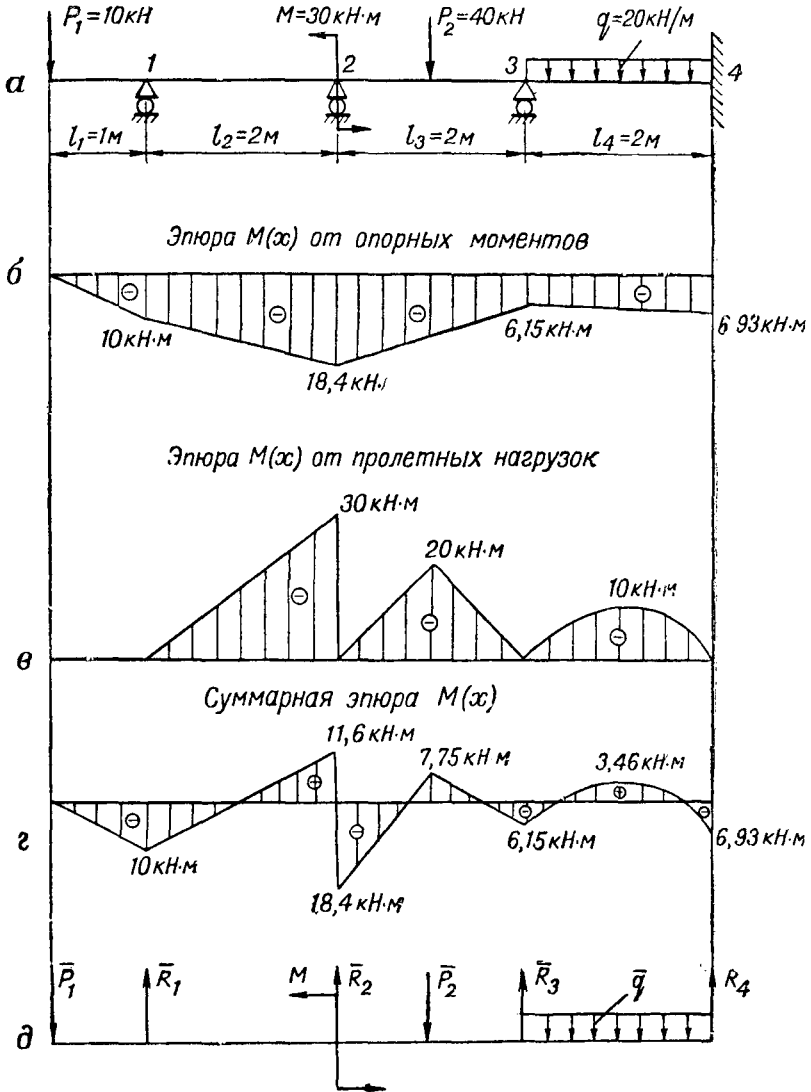


Рис. 11.21.

Аналогично составляем уравнения

для $n = 3$: $M_2 l_3 + 2M_3(l_3 + l_4) + M_4 l_4 = -6EI \left[\frac{P_2 l_3^2}{16EI} - \left(-\frac{q l_4^3}{24EI} \right) \right];$

для $n = 4$: $M_3 l_4 + 2M_4(l_4 + l_6) + M_6 l_6 = -6EI \left[\frac{q l_4^3}{24EI} - 0 \right],$ где $l_6 = 0.$

После подстановки и сокращений получаем систему:

$$\left. \begin{aligned} 4M_2 + M_3 &= -80; \\ M_2 + 4M_3 + M_4 &= -50; \\ M_3 + 2M_4 &= -20. \end{aligned} \right\}$$

Решая систему трех уравнений, определяем неизвестные моменты:

$$M_2 = -18,4 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_3 = -6,15 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_4 = -6,93 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Опорные реакции могут быть определены из уравнений, определяющих изгибающие моменты над опорами. Так, например (рис. 11.21),

$$M_2 = -P_1(l_1 + l_2) + R_1 l_2 - M, \text{ откуда } R_1 = 20,8 \text{ кН};$$

$$M_3 = -P_1(l_1 + l_2 + l_3) + R_1(l_2 + l_3) - M + R_2 l_3 - P_2 \frac{l_3}{2} \text{ и т. д.}$$

После подстановки определяем, что $R_2 = 15,3 \text{ кН}$. Аналогично находим $R_3 = 33,5 \text{ кН}$; $R_4 = 20,4 \text{ кН}$.

При определении перемещений сечений неразрезной балки для определения φ_0 и y_0 граничных условий будет всегда больше двух. «Лишние» граничные условия могут быть использованы для проверки значений опорных моментов M_2 , M_3 и M_4 .

Эпюра $M(x)$ построена методом сложения эпюр (рис. 11.21, *г*) от приложенных нагрузок (рис. 11.21, *в*), рассматривая каждый пролет как самостоятельную разрезную двухопорную балку, и от найденных опорных моментов M_2 , M_3 и M_4 (рис. 11.21, *б*).

СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

§ 58. ВИДЫ СЛОЖНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

При простых деформациях под действием приложенных внешних нагрузок в поперечных сечениях стержня возникали при осевом центральном растяжении продольная сила, при кручении крутящий момент, при чистом изгибе изгибающий момент и т. д.

Однако уже при исследовании плоского поперечного изгиба было установлено, что в сечениях стержня одновременно возникают поперечная сила и изгибающий момент, при деформации пружины — поперечная сила и крутящий момент и т. д. На практике более часто встречаются случаи, когда в поперечных сечениях стержней от внешних нагрузок возникают одновременно внутренние силы и внутренние моменты. Так, например, в сечениях стержня с ломаной осью, представленного на рис. 12.1, от сил \bar{P}_1 и \bar{P}_2 , приложенных в сечении A , возникают на участке l_1 поперечные силы и изгибающие моменты, действующие во взаимно перпендикулярных плоскостях, на участке l_2 — крутящий момент от силы \bar{P}_1 , изгибающие моменты от \bar{P}_1 и \bar{P}_2 , поперечная сила от \bar{P}_1 и продольная сила \bar{P}_2 . Соответствующие эпюры представлены на рис. 12.1.

Рассмотренные напряженные состояния, когда в поперечных сечениях одновременно возникает несколько внутренних силовых факторов (сил, моментов), которые необходимо учитывать при определении напряжений и перемещений, называются сложными деформациями или сложным сопротивлением.

При определении напряжений и перемещений, учитывая, что деформации малы, пользуются принципом независимости действия сил. Для этого вначале рекомендуется строить эпюры внутренних сил и моментов, которые позволяют определить опасные сечения, как это представлено на рис. 12.1. Затем отдельно от каждого внутреннего усилия определяют напряжения в различных точках наиболее опасного сечения, используя полученные ранее формулы. Это позволяет определить наиболее опасную точку (иногда таких точек может быть несколько) сечения, для которой и составляют условие прочности.

Косой изгиб (рис. 12.2, а) имеет место, когда внешние нагрузки, приложенные перпендикулярно оси стержня, не лежат ни в одной из главных плоскостей инерции. Общий метод решения задач

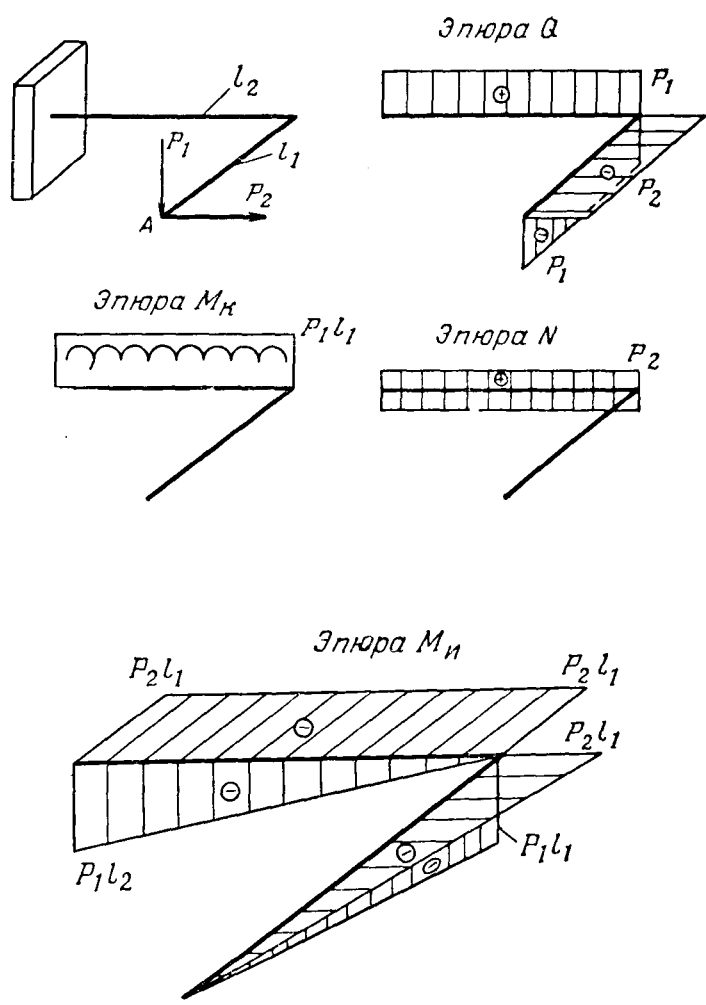
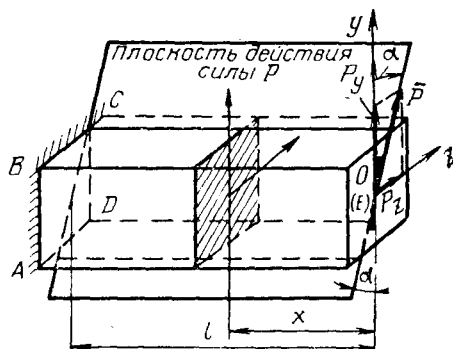


Рис. 12.1.

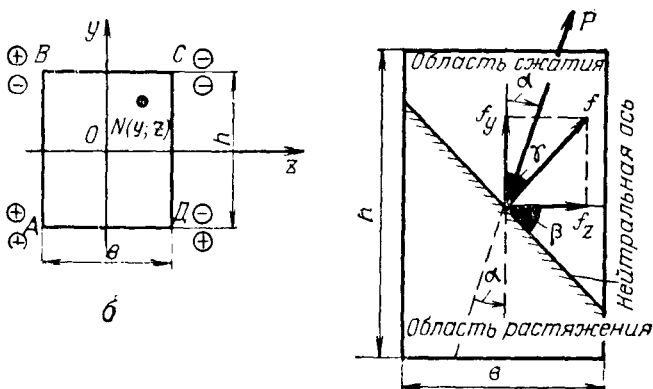
на косой изгиб заключается в том, что рассматривают составляющие внешних нагрузок, действующие в главной плоскости и в плоскости, ей перпендикулярной. Нормальные напряжения в точках сечения вычисляют как алгебраическую сумму напряжений, вызываемых нагрузками, действующими в одной и другой главных плоскостях. Так, из рис. 12.2, б следует, что наибольшие нормальные напряжения будут в точках A (растяжение) и C (сжатие) се-

чения, т. е. там, где они суммируются. Напряжения в любой точке $N(y, z)$ опорного сечения $ABCD$ равны

$$\sigma_N = -\frac{M_y \cdot z}{J_y} - \frac{M_z \cdot y}{J_z} = -M_{\max} \left(\frac{z \sin \alpha}{J_y} + \frac{y \cos \alpha}{J_z} \right), \quad (12.1)$$



а



б

Рис. 12.2.

где

$$M_y = P \cdot l \cdot \sin \alpha = M_{\max} \sin \alpha;$$

$$M_z = P \cdot l \cdot \cos \alpha = M_{\max} \cos \alpha.$$

Учитывая, что точка A имеет координаты $y_A = -\frac{h}{2}$; $z_A = -\frac{b}{2}$,

имеем:

$$\sigma_A = -M_{\max} \left(\frac{-b/2 \sin \alpha}{J_y} - \frac{h/2 \cos \alpha}{J_z} \right)$$

или

$$\sigma_A = \sigma_{\max} = M_{\max} \left(\frac{\sin \alpha}{W_y} + \frac{\cos \alpha}{W_z} \right). \quad (12.2)$$

Для определения перемещения центра тяжести торцевого сечения пользуются равенством

$$f = \sqrt{(f_z)^2 + (f_y)^2}, \quad (12.3)$$

где

$$f_z = \frac{P_z l^3}{3EI_z} \quad \text{и} \quad f_y = \frac{P_y l^3}{3EI_y}$$

f_z и f_y — перемещения центра тяжести сечения E вдоль соответствующих осей координат.

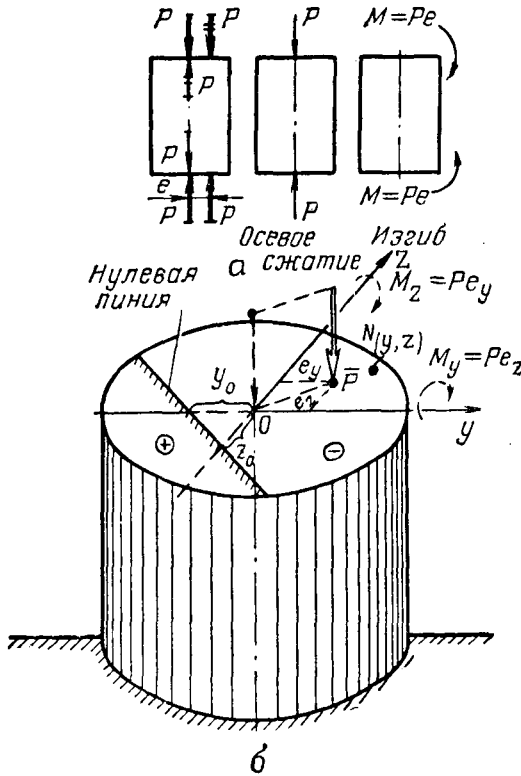


Рис. 12.3.

Можно показать, что нейтральная ось (нулевая линия) в сечении (рис. 12.2, в) всегда перпендикулярна направлению вектора полного перемещения f , т. е. $\angle \beta = \angle \gamma$, и перпендикулярна плоскости действия нагрузки только тогда, когда $I_y = I_z$, т. е. когда равны осевые моменты инерции сечения.

Внецентренное сжатие (растяжение) имеет место, когда короткий стержень сжимается продольной силой, действующей вдоль оси, параллельной центральной (рис. 12.3, а).

Если перенести точку приложения силы на центральную ось, то для сохранения равновесия необходимо приложить присоединенную пару, момент которой $M = Pe$. Так, из рис. 12.3, б следует, что при приведении силы P к центру O получаем осевое сжатие, и от двух присоединенных пар с моментами $M_y = Pe_z$, $M_z = Pe_y$ — изгиб в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

Суммарное нормальное напряжение в точке N сечения, имеющей координаты y и z , будет равно

$$\sigma = \sigma_{сж} + \sigma_{и} = -\frac{P}{F} - \frac{P \cdot e_z \cdot z}{I_y} - \frac{P \cdot e_y \cdot y}{I_z}$$

или

$$\sigma = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{e_z \cdot z}{i_y^2} + \frac{e_y \cdot y}{i_z^2} \right), \quad (12.4)$$

где

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}} \text{ и } i_z = \sqrt{\frac{I_z}{F}}$$

— радиусы инерции сечения соответственно относительно осей координат y и z .

Аналогичные равенства могут быть получены при внецентренном растяжении.

Остановимся более подробно на исследовании совместного действия кручения и изгиба — напряженного состояния, весьма часто встречающегося на практике.

§ 59. СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ

Пример, когда вал подвергается совместному действию изгиба и кручения, представлен на рис. 12.4, а. На вал действует вращающий момент $M_B = T \cdot R$ и силы G_2 — вес поднимаемого груза, G_1 — вес шкива, $3T$ — суммарное натяжение ремней и момент $G_2 r$ на барабане. Эпюры $M(x)$ и M_K представлены на рис. 12.4, в и 12.4, г.

Эпюры нормальных и касательных напряжений даны на рис. 12.4, д.

Касательными напряжениями τ_c от поперечных сил пренебрегаем, так как наибольшие касательные напряжения от сдвига будут в точках горизонтального диаметра, в которых нормальные напряжения равны нулю (рис. 12.4, е).

Вырежем из вала элемент, находящийся на поверхности в опасной точке; он находится в плоском напряженном состоянии (рис. 12.4, ж).

В дальнейшем используем теории прочности, учитывая, что для круглого вала

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{и}}{W_z}; \quad \tau_{\max} = \frac{M_K}{W_p}; \quad W_p = 2W_z = 2W_y. \quad (12.5)$$

1-я теория прочности. Условие прочности записывается в виде (формула 11.24).

$$\sigma_1 \leq [\sigma] \text{ или } \frac{1}{2} [\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}] \leq [\sigma].$$

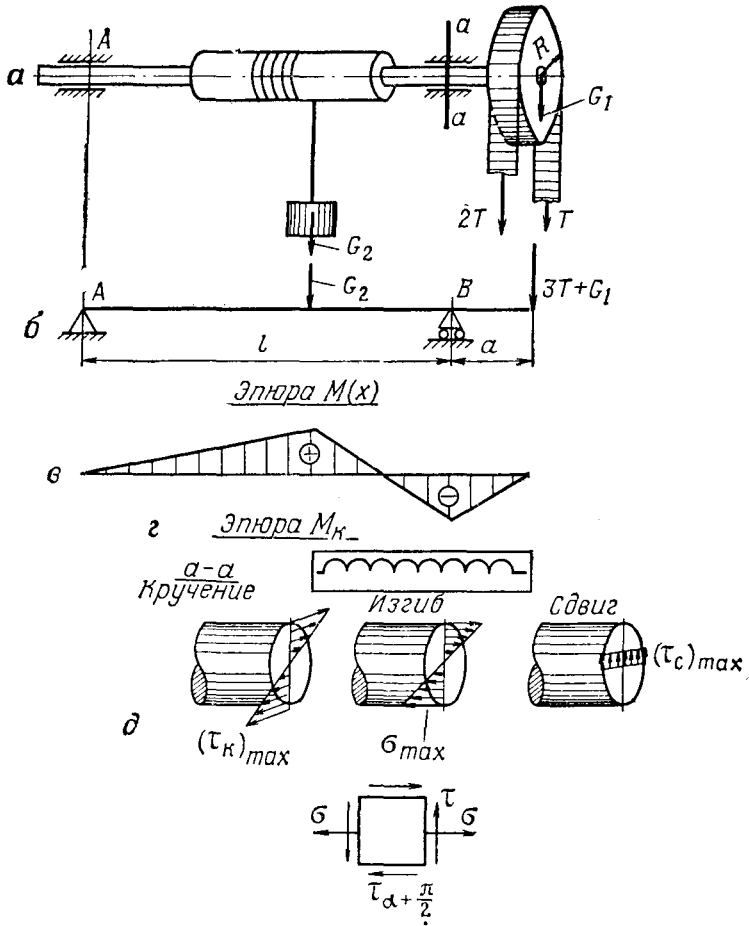


Рис. 12.4.

Учитывая равенство (12.5):

$$\frac{1}{2} \left[\frac{M_n}{W_z} + \sqrt{\left(\frac{M_n}{W_z} \right)^2 + 4 \left(\frac{M_k}{2W_z} \right)^2} \right] \leq [\sigma]$$

или

$$\frac{M_n + \sqrt{M_n^2 + M_k^2}}{2W_z} \leq [\sigma].$$

Обозначим

$$\frac{M_n + \sqrt{M_n^2 + M_k^2}}{2} = M_{расч} \quad (12.6)$$

и будем его называть расчетным моментом по 1-й теории прочности.

2-я теория прочности исходит из условия, что $\epsilon_{\max} < [\epsilon]$. После преобразования при $\mu=0,3$ было получено (11.25)

$$0,35\sigma + 0,65\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

или, учитывая равенство (12.5)

$$\frac{0,35M_{\text{н}} + 0,65\sqrt{M_{\text{н}}^2 + M_{\text{к}}^2}}{W_2} \leq [\sigma].$$

Обозначим

$$0,35M_{\text{н}} + 0,65\sqrt{M_{\text{н}}^2 + M_{\text{к}}^2} = M_{\text{расч}}^{\text{II}} \quad (12.7)$$

3-я теория прочности исходит из условия, что $\tau_{\max} < [\tau]$ или по уравнению (11.26)

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma].$$

После подстановки значений σ и τ из равенства (12.5) полу-

чим
$$\frac{\sqrt{M_{\text{н}}^2 + M_{\text{к}}^2}}{W_2} \leq [\sigma].$$

Обозначим

$$\sqrt{M_{\text{н}}^2 + M_{\text{к}}^2} = M_{\text{расч}}^{\text{III}} \quad (12.8)$$

Для материалов, у которых $[\sigma]_{\text{сж}} \neq [\sigma]_{\text{р}}$, условие прочности по теории Мора можно записать в виде (9.26).

$$\sigma_1 - \nu\sigma_3 \leq [\sigma]_{\text{р}},$$

где $\nu = \frac{[\sigma]_{\text{р}}}{[\sigma]_{\text{сж}}}$.

При $\nu=1$ приходим к 3-й теории прочности.

Подставляя значения σ_1 и σ_3 , получим

$$\frac{1}{2} [\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}] - \frac{\nu}{2} [\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}] \leq [\sigma]_{\text{р}},$$

Учитывая равенства (12.5), после преобразований

$$\frac{(1-\nu)M_{\text{н}} + (1+\nu)\sqrt{M_{\text{н}}^2 + M_{\text{к}}^2}}{2W_2} \leq [\sigma]_{\text{р}}$$

обозначим

$$\frac{(1-\nu)M_{\text{н}} + (1+\nu)\sqrt{M_{\text{н}}^2 + M_{\text{к}}^2}}{2} = M_{\text{расч}}^0 \quad (12.9)$$

4-я теория прочности исходит из условия, что $a_{\phi} \leq [a_{\phi}]$ или по уравнению (11.27)

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].$$

После подстановки значений σ и τ получим

$$\frac{\sqrt{M_{\text{н}}^2 + 0,75M_{\text{к}}^2}}{W_z} \leq [\sigma].$$

Обозначим

$$\sqrt{M_{\text{н}}^2 + 0,75M_{\text{к}}^2} = M_{\text{расч}}^{\text{IV}} \quad (12.10)$$

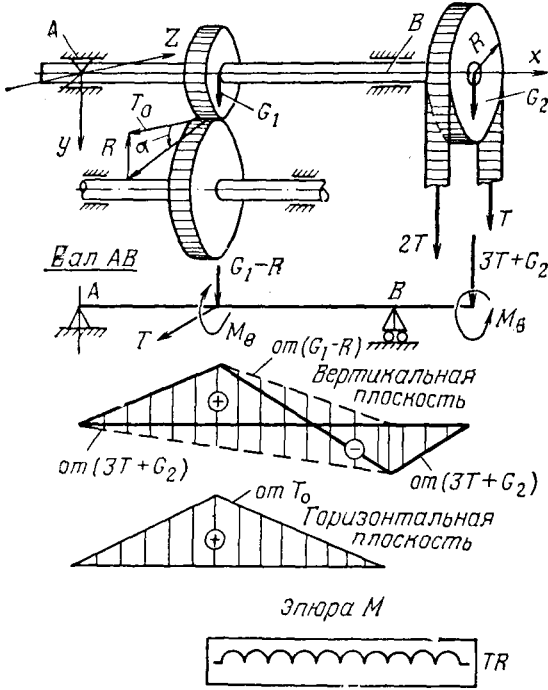


Рис. 12.5.

Условие прочности для любой теории прочности имеет вид

$$\frac{M_{\text{расч}}^{(i)}}{W_z} \leq [\sigma],$$

откуда

$$W_z \geq \frac{M_{\text{расч}}^{(i)}}{[\sigma]}, \quad (12.11)$$

где $M_{\text{расч}}^{(i)}$ — расчетный момент, зависящий от принятой теории прочности и определяемый по одной из формул (12.6) — (12.10).

Подставляя значение $W_z = \frac{\pi d^3 (1 - \alpha^4)}{32}$ для круглого полого сечения, при $\alpha = \frac{d_1}{d}$ получаем

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{\text{расч}}^{(i)}}{\pi (1 - \alpha^4) [\sigma]}} = 2,16 \sqrt[3]{\frac{M_{\text{расч}}^{(i)}}{(1 - \alpha^4) [\sigma]}}. \quad (12.12)$$

Из полученного условия следует, что при определении диаметра необходимо учитывать характеристики материала вала, а далее исходя из этого выбрать теорию прочности, которая определяет опасное состояние материала, и допускаемое напряжение. Затем найти расчетный момент и по формуле (12.12) диаметр вала. Полученный диаметр округляют до ближайшего стандартного значения.

Примечание. Если нагрузки лежат в разных плоскостях, их проектируют (рис. 12.5) на вертикальную и горизонтальную плоскости и строят эпюры изгибающего момента в каждой плоскости отдельно. Суммарный изгибающий момент в каждом сечении круглого вала определяется по равенству

$$M_{\text{и}} = \sqrt{(M_{\text{и}}^{\text{Г}})^2 + (M_{\text{и}}^{\text{В}})^2}. \quad (12.13)$$

§ 60. СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ ИЗГИБА, КРУЧЕНИЯ И РАСТЯЖЕНИЯ (СЖАТИЯ)

Рассмотрим вал, который одновременно испытывает изгиб, кручение и растяжение (сжатие). Наибольшее нормальное напряжение определяется по равенству

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_{\text{и}}}{W_z}.$$

Соответственно максимальное касательное напряжение по формуле

$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_{\text{к}}}{W_p}.$$

Условие прочности по 3-й теории будет

$$\sqrt{\left(\frac{N}{F} + \frac{M_{\text{и}}}{W_z}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{\text{к}}}{W_p}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (12.14)$$

Соответственно по 4-й теории прочности

$$\sqrt{\left(\frac{N}{F} + \frac{M_{\text{и}}}{W_z}\right)^2 + 3\left(\frac{M_{\text{к}}}{W_p}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (12.15)$$

Подбор размеров сечения по формулам (12.14) и (12.15) производится методом последовательного приближения.

§ 61. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ЗАПАСА ПРОЧНОСТИ

Если размеры сечения и нагрузки заданы, обычно производят проверочный расчет, для чего определяют коэффициент запаса прочности или коэффициент безопасности, например, для пластичного материала по формуле

$$n = \frac{\sigma_{\text{т}}}{\sigma_{\text{нр}}}, \quad (12.16)$$

где σ_T — предел текучести;

$\sigma_{пр}$ — приведенное (эквивалентное) напряжение, величина которого зависит от выбранной теории прочности.

Так, при использовании 3-й теории прочности $\sigma_{пр} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$

и

$$n = \frac{\sigma_T}{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sigma_T}\right)^2 + 4\left(\frac{\tau}{\sigma_T}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sigma_T}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{0,5\sigma_T}\right)^2}}.$$

Принимая, что $0,5\sigma_T = \tau_T$, определяем, что

$$n = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sigma_T}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_T}\right)^2}}.$$

Обозначим:

$\frac{\sigma_T}{\sigma} = n_\sigma$ — коэффициент запаса прочности по нормальным напряжениям;

$\frac{\tau_T}{\tau} = n_\tau$ — коэффициент запаса прочности по касательным напряжениям.

Тогда

$$n = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_\sigma}\right)^2 + \left(\frac{1}{n_\tau}\right)^2}} = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}}. \quad (12.17)$$

Аналогично можно определить коэффициент запаса прочности при использовании, например, 4-й теории прочности. Если принять, что $\tau_T = 0,58\sigma_T$, можно воспользоваться равенством (12.17).

ГЛАВА 13

ПОНЯТИЕ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧКАХ

Наряду с призматическими телами в военно-морской технике широко распространены тела, у которых два размера значительно превышают третий (толщину) и которые называются оболочками и пластинами.

К оболочкам могут быть отнесены, например, корпуса подводных лодок, торпед, мин, ракет и других видов техники, которые представляют собой комбинации цилиндрических, конических, шаровых и других типов оболочек. Ниже даны понятия о прочности тонкостенных оболочек.

§ 62. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ГЕОМЕТРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

Оболочками называются тела, ограниченные двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с другими размерами тела.

Срединной поверхностью оболочки называют геометрическое место точек, равноудаленных от наружной и внутренней криволинейных поверхностей.

Толщина стенки δ равна длине отрезка перпендикуляра к срединной поверхности, расположенного между наружной и внутренней криволинейными поверхностями, ограничивающими оболочку.

Различают оболочки постоянной толщины ($\delta = \text{const}$) и оболочки переменной толщины ($\delta = \text{var}$), тонкие и толстые.

К тонким оболочкам часто относят такие, у которых отношение $\frac{R}{\delta} \geq 20$, где R — наименьший радиус оболочки.

Оболочкой вращения (рис. 13.1) называется такая, у которой срединная поверхность образуется вращением кривой, называемой образующей, вокруг оси, лежащей в ее плоскости.

Точки пересечения образующей с осью оболочки называются полюсами. Проведем плоскость, проходящую через ось оболочки. Пересечение плоскости с срединной поверхностью образует кри-

вую, которая называется меридианом; она совпадает с образующей.

Плоскости, перпендикулярные оси, пересекают поверхность по кругам, которые называются параллелями. Радиус кривизны меридиана называется первым главным радиусом кривизны поверхности в данной точке.

Радиус кривизны кривой, полученной от пересечения поверхности плоскостью, перпендикулярной меридиану, называется вторым главным радиусом кривизны поверхности в данной точке.

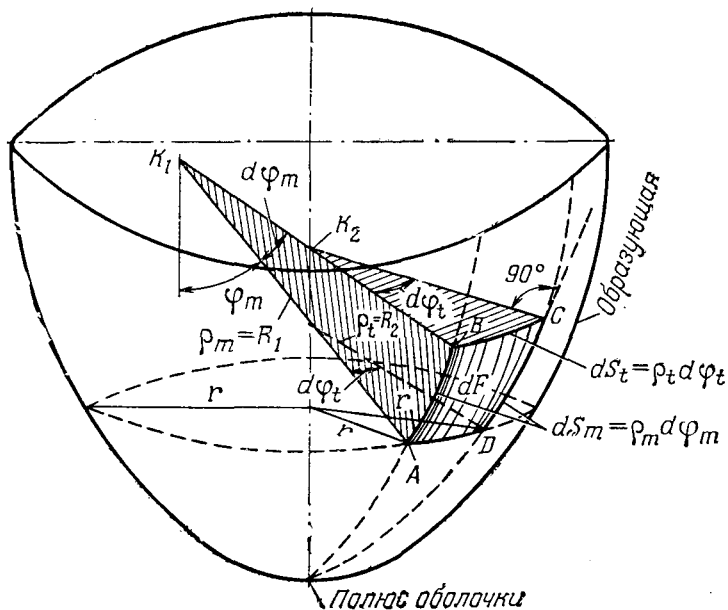


Рис. 13.1.

Начала радиусов кривизны K_1 и K_2 называются центрами кривизны; при этом центр кривизны K_2 лежит на оси оболочки.

Угол φ_m (рис. 13.1) будем называть широтой рассматриваемой точки. Угол между двумя соседними вторыми радиусами кривизны обозначим φ_t .

Нормальные сечения образуются пересечением поверхности оболочки плоскостью, проходящей через нормаль к поверхности в данной точке.

Если на оболочке есть точка, в которой $\rho_m = \rho_t = \rho$ (или $R_1 = R_2 = R$), она называется точкой округления, как, например, точка сферической поверхности, полюсы эллипсоида вращения и т. д. Обозначим через r радиус параллельного круга, тогда $r = \rho_t \sin \varphi_m$.

§ 63. ОСНОВНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ

При рассмотрении тонких оболочек вращения, у которых толщина значительно меньше радиуса, обычно делают следующие допущения.

Прямые, перпендикулярные срединной поверхности оболочки, до деформации остаются прямолинейными и нормальными к деформированной срединной поверхности и не изменяют своей длины.

Нормальными напряжениями сжатия (растяжения), действующими на площадках, параллельных срединной поверхности в направлении радиусов кривизны оболочки, можно пренебречь.

Внешние нагрузки (например, давление), действующие на оболочку, распределены по ее поверхности симметрично относительно оси оболочки.

В силу симметрии нагрузки нормальные силы и моменты, действующие на AB и CD (рис. 13.1), равны между собой. По этой причине на указанных площадках не может быть и поперечных сил.

Нормальными напряжениями от изгиба σ_n можно пренебречь по сравнению с напряжениями от растяжения σ_p , т. е. считать, что $\sigma_n \ll \sigma_p$. Отметим, что в местах резких переходов, жесткого защемления, приложения сосредоточенных сил появляются напряжения изгиба, пренебрегать которыми уже нельзя. Для определения этих напряжений применяют методы, которые изложены в специальных курсах. Зона, в которой необходимо учитывать напряжения изгиба, невелика; на небольшом удалении от этих мест расчет можно проводить по безмоментной теории (принимая $M_n = 0$).

§ 64. УРАВНЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ ЭЛЕМЕНТА ОБОЛОЧКИ

Рассмотрим уравнение равновесия элемента $ABCD$ (рис. 13.2) оболочки вращения постоянной толщины, находящейся под внутренним давлением p . С учетом принятых выше допущений на выделенный элемент оболочки действуют следующие силы, величины которых равны:

$$\left. \begin{aligned} T &= \sigma_t dF_m = \sigma_t \delta dS_m; \\ N &= \sigma_m dF_t = \sigma_m \delta dS_t; \\ P &= pdS_m dS_t. \end{aligned} \right\} \quad (13.1)$$

Проектируем все силы на внешнюю нормаль к поверхности (ось z)

$$\sum Z_i = -2T \sin \frac{d\varphi_t}{2} - 2N \sin \frac{d\varphi_m}{2} + pdS_m dS_t = 0.$$

Вследствие малости углов полагаем, что

$$\sin \frac{d\varphi_t}{2} = \frac{d\varphi_t}{2} = \frac{dS_t}{2\rho_t}; \quad \sin \frac{d\varphi_m}{2} = \frac{d\varphi_m}{2} = \frac{dS_m}{2\rho_m}. \quad (13.2)$$

Тогда уравнение равновесия можно записать в виде

$$-2T \frac{dS_t}{2\rho_t} - 2N \frac{dS_m}{2\rho_m} + p dS_m dS_t = 0.$$

После подстановки значений сил из (13.1) и сокращений получаем уравнение Лапласа

$$\frac{\sigma_t}{\rho_t} + \frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{p}{\delta}. \quad (13.3)$$

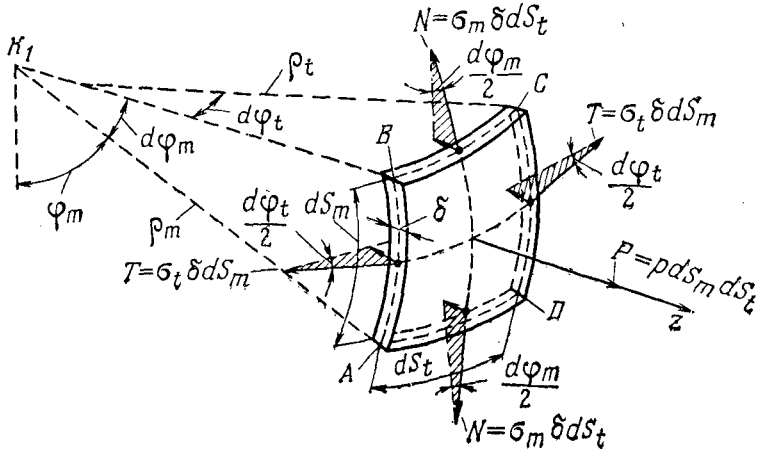


Рис. 13.2.

Третье главное радиальное напряжение, вызываемое давлением между слоями оболочки, весьма мало по сравнению с σ_t и σ_m и им обычно пренебрегают. Напряженное состояние оболочки тогда принимают плоским (двухосным).

В уравнение (13.3) входят две неизвестные величины: σ_m и σ_t . Поэтому решить его можно только для частных случаев.

Цилиндрическая оболочка, находящаяся под внутренним давлением, например бронзовая втулка, насаженная на вал с натягом (рис. 13.3).

Главные радиусы кривизны $\rho_t = R$; $\rho_m = \infty$. Тогда

$$\sigma_t = \frac{pR}{\delta} = \frac{pD}{2\delta}. \quad (13.4)$$

Отметим, что, если цилиндрическая оболочка закрыта с торцов, в ней кроме σ_t возникает осевое напряжение (рис. 13.3), равное

$$\sigma_m = \frac{p}{F} = \frac{p\pi R_1^2}{2\pi R_{cp}\delta} = \frac{pR_1^2}{2R_{cp}\delta},$$

где $2R_1$ и $2R_{cp}$ — внутренний и средний диаметры соответственно. Полагая для тонкостенных оболочек $R_1 = R_{cp} = R$, получаем, что осевое — меридиональное напряжение σ_m определяется по формуле

$$\sigma_m = \frac{pR}{2\delta} = \frac{pD}{4\delta}. \quad (13.5)$$

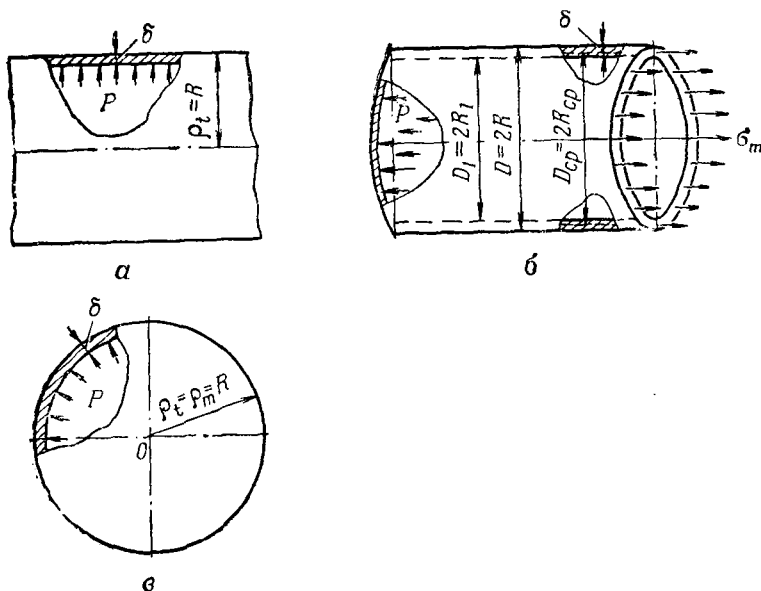


Рис. 13.3.

Сферическая оболочка, находящаяся под внутренним давлением (рис. 13.3, б). Для сферической оболочки $p_m = p_t = R$ и $\sigma_m = \sigma_t = \sigma$ получаем из (13.3)

$$\sigma = \frac{pR}{2\delta} = \frac{pD}{4\delta}. \quad (13.6)$$

Задаваясь диаметром при заданном давлении, можем определить толщину оболочки из условия прочности $\sigma \leq [\sigma]$. Так, например, в случае сферической оболочки

$$\frac{pD}{4\delta} \leq [\sigma],$$

откуда

$$\delta \geq \frac{pD}{4[\sigma]}.$$

Если принять

$$[\sigma] = 120 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2}; \quad p = 1,2 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2}; \quad d = 0,8 \text{ м},$$

то

$$\delta \geq \frac{pD}{4[\sigma]} = \frac{1,2 \cdot 0,8}{4 \cdot 120} = 0,002 \text{ м} = 0,2 \text{ см.}$$

Аналогичную задачу можно решить и для цилиндрической оболочки, используя условие

$$\delta \geq \frac{pD}{2[\sigma]}.$$

Для определения неизвестных σ_m и σ_t одного уравнения (13.3) недостаточно. Дополнительное уравнение составляют на основании условия равновесия зоны.

§ 65. УРАВНЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ ЗОНЫ

Зоной мы будем называть часть оболочки, мысленно отсекаемую конической поверхностью, нормальной к меридиану. Для определения внутренних сил воспользуемся методом сечений. Рас-

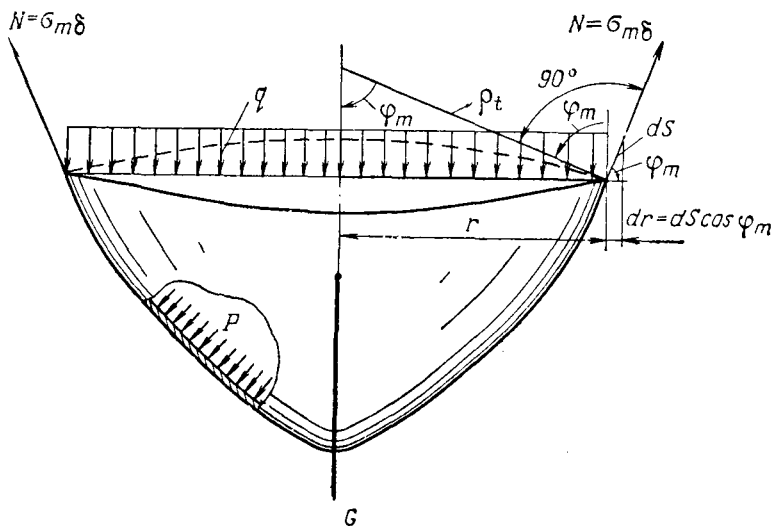


Рис. 13.4.

смотрим оболочку, имеющую полюс и заполненную жидкостью (рис. 13.4). Отбросим мысленно верхнюю часть оболочки, заменив ее действие на нижнюю силой, величина которой $\sigma_m \cdot \delta \cdot 2\pi r$, где σ_m — меридиональное напряжение.

На нижнюю часть оболочки кроме вышеуказанной силы действуют:

— сила тяжести, равная весу жидкости, заполняющей нижнюю часть оболочки;

— сила, создаваемая давлением жидкости, заполняющей верхнюю отбрасываемую часть оболочки, равная $p \cdot \pi r^2$.

Уравнение равновесия зоны оставшейся части оболочки будет иметь вид

$$\sum Y_i = \sigma_m \cdot 2\pi r \cdot \delta \cdot \sin \varphi_m - G_1 - p\pi r^2 = 0.$$

Из этого уравнения следует, что

$$\sigma_m = \frac{G_1 + p\pi r^2}{2\pi r \delta \sin \varphi_m}. \quad (13.7)$$

Второе главное напряжение определяется из формулы Лапласа (13.3). Пусть оболочка заполнена газом, весом которого можно пренебречь ($G_1 = 0$). Тогда из формулы (13.7) следует

$$\sigma_m = \frac{p \cdot \pi r^2}{2\pi r \delta \sin \varphi_m} = \frac{p \cdot r}{2\delta \sin \varphi_m}$$

или, учитывая, что $\frac{r}{\sin \varphi_m} = \rho_t$,

$$\sigma_m = \frac{p \cdot \rho_t}{2\delta}. \quad (13.8)$$

Запишем формулу Лапласа (13.3)

$$\frac{\sigma_t}{\rho_t} + \frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{p}{\delta},$$

откуда с учетом (13.8)

$$\sigma_t = \frac{p\rho_t}{\delta} - \frac{\sigma_m \cdot \rho_t}{\rho_m} = \sigma_m \left(2 - \frac{\rho_t}{\rho_m} \right). \quad (13.9)$$

Пример. Определить нормальные напряжения в конической оболочке, находящейся под внутренним давлением p (рис. 13.5).

Решение.

Воспользуемся формулой (13.8), учитывая из рис. 13.5, что $\rho_t = x \operatorname{tg} \alpha$, а $\rho_m = \infty$.

Тогда

$$\sigma_m = \frac{p\rho_t}{2\delta} = \frac{px \operatorname{tg} \alpha}{2\delta}.$$

Другое главное напряжение определяется из формулы (13.9)

$$\sigma_t = 2\sigma_m = \frac{px \operatorname{tg} \alpha}{\delta}.$$

Элемент конической оболочки находится в плоском напряженном состоянии. По обобщенному закону Гука

$$\epsilon_m = \frac{\sigma_m - \mu\sigma_t}{E} = \frac{p \cdot x \operatorname{tg} \alpha (1 - 2\mu)}{2\delta E}.$$

Соответственно

$$\epsilon_t = \frac{\sigma_t - \mu\sigma_m}{E} = \frac{p \cdot x \operatorname{tg} \alpha (2 - \mu)}{2\delta E}.$$

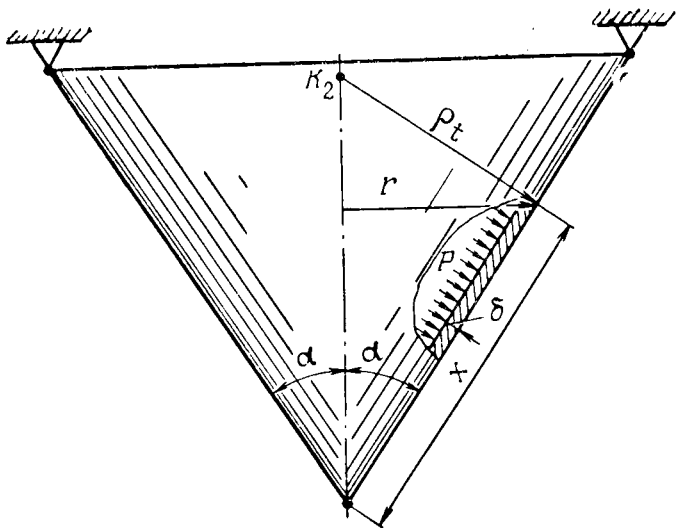


Рис. 13.5.

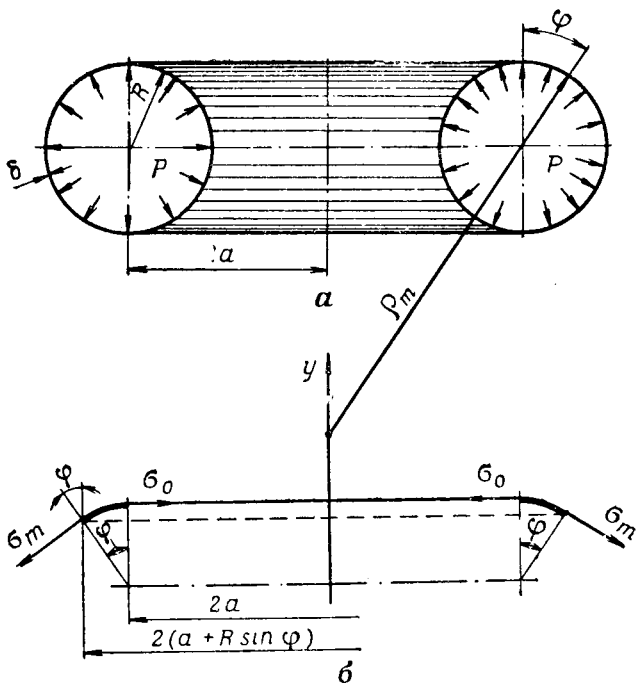


Рис. 13.6.

Удлинение образующей

$$\Delta S_m = \int \epsilon_m dx = \frac{1-2\mu}{2\delta E} p \operatorname{tg} \alpha \int_0^x x dx = \frac{1-2\mu}{2\delta E} p \operatorname{tg} \alpha \frac{x^2}{2}.$$

Пример. Определить напряжения в гонкостенной торообразной оболочке (рис. 13.6), нагруженной внутренним давлением $p = \text{const}$.

Решение. Составляем уравнения равновесия отсеченной части торообразной оболочки (рис. 13.6, б), выделенной сечениями, нормальными к поверхности:

$$\sum Y_i = -\sigma_m \delta \cdot 2\pi (a + R \sin \varphi) \sin \varphi + p [(a + R \sin \varphi)^2 - a^2] \pi = 0,$$

где $2\pi (a + R \sin \varphi) \delta$ — кольцевая площадка, по которой действуют нормальные напряжения;

$\pi [(a + R \sin \varphi)^2 - a^2]$ — проекция площади отсеченной части торообразной оболочки, которая может быть преобразована следующим образом:

$$\pi [a^2 + 2aR \sin \varphi + R^2 \sin^2 \varphi - a^2] = \pi R \sin \varphi [2a + R \sin \varphi].$$

Из уравнения равновесия следует, что

$$\sigma_m = \frac{p \cdot \pi R \sin \varphi [2a + R \sin \varphi]}{2\pi (a + R \sin \varphi) \sin \varphi \cdot \delta}$$

или

$$\sigma_m = \frac{pR}{2\delta} \frac{2a + R \sin \varphi}{a + R \sin \varphi}. \quad (13.10)$$

Заметим, что

$$|\sigma_{\max}| = \sigma_m \Big|_{\varphi = \frac{3\pi}{2}} = \frac{pR}{2\delta} \frac{2a - R}{a - R}. \quad (13.11)$$

Нормальное напряжение σ_t определяем из формулы Лапласа

$$\frac{\sigma_t}{\rho_t} + \frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{p}{\delta},$$

в которой для рассматриваемого случая

$$\rho_m = R; \quad \rho_t = \frac{a + R \sin \varphi}{\sin \varphi}.$$

После подстановки значений σ_m , ρ_m и ρ_t в формулу Лапласа (13.3) получаем

$$\sigma_t = \left(\frac{p}{\delta} - \frac{\sigma_m}{\rho_m} \right) \rho_t = \left(\frac{p}{\delta} - \frac{pR}{2\delta} \frac{2a + R \sin \varphi}{a + R \sin \varphi} \frac{1}{R} \right) \frac{a + R \sin \varphi}{\sin \varphi}$$

или

$$\sigma_t = \frac{p}{\delta} \left(\frac{a + R \sin \varphi}{\sin \varphi} - \frac{2a + R \sin \varphi}{2 \sin \varphi} \right) = \frac{pR}{2\delta}.$$

Следовательно,

$$\sigma_t = \frac{pR}{2\delta} = \text{const}. \quad (13.12)$$

Частные случаи:

$a=0$; торовая оболочка переходит в сферу

$$\sigma_m = \sigma_t = \frac{pR}{2\delta}.$$

$a=\infty$; торовая оболочка переходит в цилиндр:

$$\sigma_m = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{pR}{2\delta} \frac{2a - R}{a - R} = \frac{pR}{\delta}; \quad \sigma_t = \frac{pR}{2\delta}.$$

$a=R$; внутренняя часть торовой оболочки переходит в жгут;

$$\sigma_m = \infty; \quad \sigma_t = \frac{pR}{2\delta}.$$

УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

§ 66. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ

При расчете на сжатие коротких стержней достаточно большого сечения и малой длины $\frac{l}{d} \approx 2 \div 3$; условие прочности имеет вид

$$\frac{N}{F} \leq [\sigma]_{сж.}$$

При достаточно большой длине и малой площади сечения стержня можно наблюдать, как при определенном значении сжи-

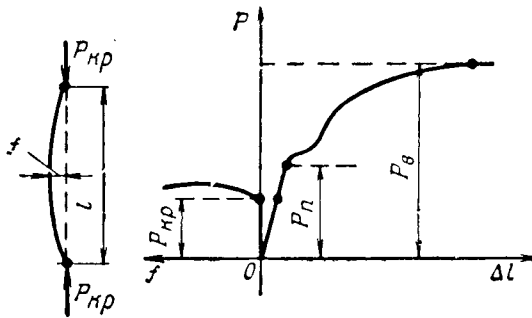


Рис. 14.1.

мающей силы стержень теряет свою первоначальную прямолинейную форму и выпучивается. Происходит так называемый продольный изгиб (рис. 14.1).

Если P меньше определенного значения, равного $P_{кр}$, стержень сохраняет свою прямолинейную форму равновесия; если $P > P_{кр}$, форма равновесия становится криволинейной. При значении $P = P_{кр}$ прямолинейная форма равновесия становится неустойчивой и легко может перейти в криволинейную. Сила $P_{кр}$ называется критической силой. Когда величина силы становится равной $P_{кр}$, условия нормальной работы нарушаются и поэтому полагают, что критическая сила соответствует нагрузке, которая условно может быть названа разрушающей.

Под устойчивостью понимают свойство системы самостоятельно восстанавливать начальное состояние равновесия, из которого она была выведена в результате сообщения ей некоторого отклонения. Система, не обладающая этим свойством, называется неустойчивой.

Понятие устойчивого и неустойчивого равновесия можно уяснить себе, наблюдая равновесие шарика во впадине (устойчивое) и на гребне (неустойчивое положение равновесия).

Явление потери устойчивости можно наблюдать при нагружении сжимающей (радиальной) нагрузкой тонких колец, при этом круглое сечение становится эллиптическим и сплющивается при сжатии продольными или поперечными или одновременно продольно-поперечными нагрузками тонкостенных цилиндрических оболочек и т. д. (рис. 14.2).

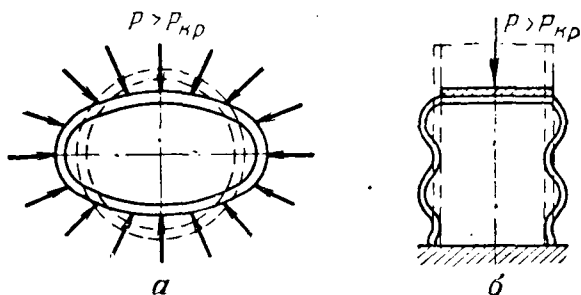


Рис. 14.2.

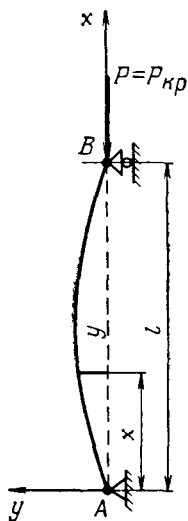


Рис. 14.3.

Вообще потеря устойчивости чаще всего проявляется в тонкостенных конструкциях, что следует иметь в виду при их эксплуатации.

При изучении устойчивости система принимается идеальной. Так, при сжатии стержня осевой силой принимают, что материал стержня однороден, ось прямолинейна, сила приложена центрально.

Рассмотрим стержень, сжатый продольной силой P (рис. 14.3). Весом его будем пренебрегать. Стержень деформируется в направлении наименьшей жесткости. Приближенное дифференциальное уравнение оси изогнутого стержня будет иметь вид

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI_{\min}}, \quad (14.1)$$

где $M(x) = -P \cdot y$ — изгибающий момент в сечении с координатой x ;

I_{\min} — наименьший осевой момент инерции сечения стержня. Условия закрепления точек A и B по осям y и z приняты одинаковыми.

Подставляя в (14.1) значение изгибающего момента, получаем

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P \cdot y}{EI_{\min}}. \quad (14.2)$$

Обозначим

$$\frac{P}{EI_{\min}} = k^2. \quad (14.3)$$

Тогда дифференциальное уравнение упругой линии будет иметь вид

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0. \quad (14.4)$$

Решением уравнения (14.4) будет

$$y = A \cos kx + B \sin kx. \quad (14.5)$$

Постоянные интегрирования A и B определяются из граничных условий, которые для рассматриваемого стержня будут иметь вид:

$$\text{при } x=0 \quad y(0) = 0 \text{ и}$$

$$\text{при } x=l \quad y(l) = 0.$$

Из первого граничного условия следует $y(0) = A \cdot 1 + B \cdot 0 = 0$, т. е. $A=0$, и, следовательно,

$$y = B \sin kx, \quad (14.6)$$

т. е. форма кривой — синусоида.

Подставляя второе граничное условие, получаем $0 = B \sin kl$. Но $B \neq 0$, ибо при $B=0$ стержень сохраняет прямолинейную форму равновесия; нет потери устойчивости ($y=0$). Следовательно, $\sin kl=0$, т. е. $kl = \pi n$, где $n=1, 2 \dots$, откуда получаем, что

$$k = \frac{n\pi}{l}. \quad (14.7)$$

Из сопоставления равенств (14.3) и (14.7) следует

$$k = \frac{n\pi}{l} = \sqrt{\frac{P_{\text{кр}}}{EI_{\min}}}. \quad (14.8)$$

Из уравнения (14.8) определяем критическую силу

$$P_{\text{кр}} = \frac{n^2\pi^2 EI_{\min}}{l^2}, \quad (14.9)$$

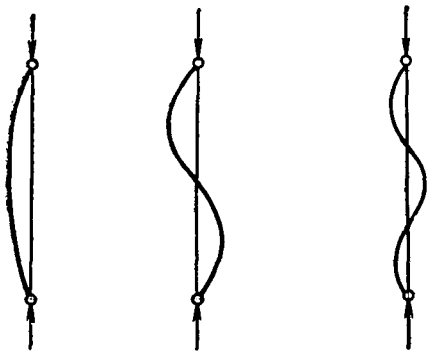
а из уравнений (14.6) и (14.8) прогиб

$$y = B \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (14.10)$$

Коэффициент B находится из условия, что при $x = \frac{l}{2}$ $y = y_{\max} = f$, откуда $B \sin \frac{n\pi}{l} \cdot \frac{l}{2} = f$, т. е. $B = f$.

Однако найти величину f из имеющихся граничных условий нельзя. Отметим, что приближенное дифференциальное уравнение упругой линии (14.1) справедливо лишь при малых прогибах.

На рис. 14.4 показана форма упругой линии в зависимости от n : при $n=1$ она изменяется по полуволне синусоиды, при $n=2$ — по волне синусоиды и т. д. Кроме того, на рис. 14.4 приведены соответствующие значения критической силы, определенные из (14.9).



$$P_{кр}^{(1)} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l^2}; \quad P_{кр}^{(2)} = \frac{4\pi^2 EJ_{\min}}{l^2} = 4P_{кр}^{(1)}; \quad P_{кр}^{(3)} = \frac{9\pi^2 EJ_{\min}}{l^2} = 9P_{кр}^{(1)}$$

Рис. 14.4.

Равенство, определяющее наименьшее значение критической силы $P_{кр}^{(1)}$ при $n=1$, носит название первой критической или Эйлеровой силы

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2}. \quad (14.11)$$

Из формулы (14.11) следует, что критическая сила зависит от длины стержня l , его механических свойств, характеризуемых модулем упругости, и минимального момента инерции сечения I_{\min} . Очевидно, при выборе сечений стержней, работающих на продольный изгиб, следует стремиться к тому, чтобы оба осевых момента инерции I_y и I_z сечения были равны друг другу (например, сечение имело бы форму круга, квадрата и т. д.).

§ 67. КРИТИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Согласно определению критические напряжения (для $n=1$)

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2 F}. \quad (14.12)$$

Отношение минимального момента инерции к площади сечения равно квадрату радиуса инерции сечения, т. е.

$$\frac{I_{\min}}{F} = i_{\min}^2.$$

Тогда формулу (14.12) можно записать в виде

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{l^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{i_{\min}}\right)^2}.$$

Отношение длины стержня к минимальному радиусу инерции сечения называется гибкостью стержня и обозначается λ

$$\lambda = \frac{l}{i_{\min}}, \quad (14.13)$$

тогда

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (14.14)$$

Таким образом, критическое напряжение обратно пропорционально квадрату гибкости и прямо пропорционально модулю упругости E .

§ 68. ВЛИЯНИЕ ЗАКРЕПЛЕНИЯ КОНЦОВ СТЕРЖНЯ НА ВЕЛИЧИНУ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ И КРИТИЧЕСКОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Величина критической силы в уравнении (14.11) была определена для случая, когда стержень был шарнирно закреплен, что нашло отражение в граничных условиях. Этот способ закрепления концов принято называть основным.

Концы стержня могут быть, кроме того, например, либо защемлены с двух концов, либо один конец защемлен, а второй свободен, и, наконец, стержень может быть шарнирно оперт с одного и защемлен с другого конца. Для каждого случая граничные условия будут свои и, следовательно, значения $P_{\text{кр}}$ и $\sigma_{\text{кр}}$ будут различными.

Однако, не повторяя вычислений, связанных с определением постоянных интегрирования A и B для различных случаев закрепления концов стержня, можно получить соответствующие уравнения, определяющие $P_{\text{кр}}$ и $\sigma_{\text{кр}}$, в результате следующих рассуждений.

Рассмотрим стержень с одним защемленным и другим свободным концом.

Из рис. 14.5, *a* следует, что одна половина стержня, например верхняя, находится в тех же условиях, что и стержень, защемленный с одного конца. Обозначим длину этой половины буквой l . Величина критической силы для стойки с одним защемленным, а

другим свободным концом будет такая же, как и для стержня шарнирно опертого, но длиной $2l$, т. е.

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(2l)^2}. \quad (14.15)$$

Из рис. 14.5, б следует, что средняя часть стержня при двух зашеченных концах его будет находиться в таких же условиях, что и стержень с шарнирно опертыми концами. В местах перегиба

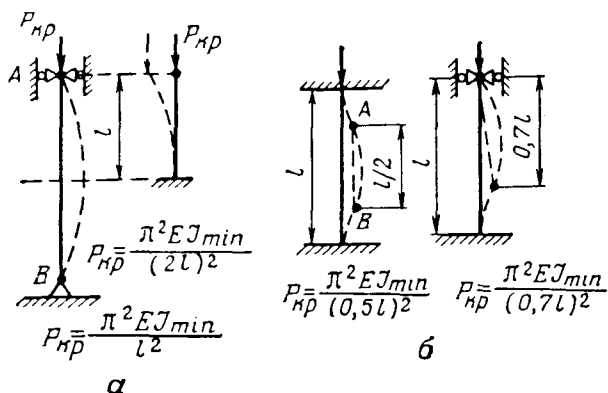


Рис. 14.5.

кривой (точках A и B) изгибающие моменты равны нулю. Тогда для стержня с зашеченными концами

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(0,5l)^2}. \quad (14.16)$$

Аналогичные рассуждения приводят к тому, что приближенно для стержня с одним зашеченным, а другим шарнирно опертым концом

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(0,7l)^2}. \quad (14.17)$$

Формулу Эйлера для всех рассмотренных случаев закрепления концов можно записать в обобщенном виде

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}, \quad (14.18)$$

где μl — приведенная длина, а μ — коэффициент Ясинского (введен в 1892 г.), или коэффициент приведения длины.

На расчетных схемах шарниры в соответствующих точках предполагались шаровыми. В действительности шарнирные опоры большей частью делаются цилиндрическими, т. е. шарнирными, только в одной плоскости. В другой плоскости они являются условно зашеченными.

Концы сжатого стержня часто присоединяются сваркой, клепкой и т. д. к другим элементам конструкции, которые не являются абсолютно жесткими. В таких соединениях нельзя считать концы стержня защемленными и допускается на 10—20% уменьшать коэффициент приведения длины стержня.

Для стержней с различными сечениями по длине и различными нагрузками, например равномерно распределенной по длине, критическая сила определяется по формуле, подобной формуле Эйлера, но путем введения в нее дополнительных коэффициентов.

Пример. Пользуясь формулой Эйлера, определить отношение критических усилий для стоек, имеющих равные площади сечений, одна из которых круглого сплошного сечения, а другая трубчатая ($\alpha \approx 0,8$).

Решение. Обозначим:

$$P_{кр}^{сп} = \frac{\pi^2 EI^{сп}}{(\mu l)^2}; \quad P_{кр}^{тр} = \frac{\pi^2 EI^{тр}}{(\mu l)^2},$$

где $P_{кр}^{сп}$ и $P_{кр}^{тр}$ — критическая сила для сплошной и трубчатой стойки соответственно. Следовательно, отношение критических сил равно

$$\frac{P_{кр}^{сп}}{P_{кр}^{тр}} = \frac{d^4}{d_T^4 (1 - \alpha^4)}, \quad (14.19)$$

где $I^{сп}$ и $I^{тр}$ — моменты инерции сплошного и трубчатого сечения, соответственно равные:

$$I^{сп} = \frac{\pi d^4}{64}; \quad I^{тр} = \frac{\pi d_T^4 (1 - \alpha^4)}{64}.$$

Запишем условие равенства площадей сечений стоек сплошного и трубчатого сечений

$$\frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi d_T^2 (1 - \alpha^2)}{4} \quad \text{или} \quad d^2 = d_T^2 (1 - \alpha^2). \quad (14.20)$$

Находим из равенств (14.19) и (14.20), что

$$\frac{P_{кр}^{сп}}{P_{кр}^{тр}} = \frac{d_T^4 (1 - \alpha^2)^2}{d_T^4 (1 - \alpha^4)} = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2}.$$

Подставляя численные значения, получим

$$\frac{P_{кр}^{сп}}{P_{кр}^{тр}} = \frac{1 - 0,8^2}{1 + 0,8^2} \approx 0,22.$$

Результат свидетельствует о преимуществе трубчатых сечений перед сплошными не только при изгибе или кручении, но и при продольном изгибе.

§ 69. ПРЕДЕЛЫ ПРИМЕНИМОСТИ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА. КРИТИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ ЗА ПРЕДЕЛОМ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ

Формула Эйлера применима до напряжения, соответствующего пределу пропорциональности, до которого справедлив закон Гука,

т. е. при условии, что $\bar{\sigma}_{кр} \leq \sigma_{п}$. При $\sigma = \sigma_{п}$ гибкость λ достигает своего предельного значения $\lambda_{пред}$. Из равенства (14.4) следует, что

$$\frac{\pi^2 E}{\lambda_{пред}^2} = \sigma_{п}, \quad (14.21)$$

откуда определяется предельное значение гибкости

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{п}}}. \quad (14.22)$$

Так, например, для мягкой стали Ст. 3 предел пропорциональности равен $\sigma_{п} \approx 2000$ кгс/см² = 196 МН/м² и $E \approx 2 \cdot 10^6$ кгс/см² $\approx 1,96 \cdot 10^5$ МН/м². Поэтому для этой стали по формуле (14.22)

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 1,96 \cdot 10^5}{196}} \approx 100.$$

Предельное значение гибкости для стержня из дюралюминия, у которого $\sigma_{п} \approx 174 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2} = 1770 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}$ и $E = 0,69 \cdot 10^5 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2} \approx 0,7 \cdot 10^6 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}$, будет

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 0,69 \cdot 10^5}{174}} \approx 62,5.$$

Критические напряжения для малых гибкостей ($\lambda < \lambda_{пред}$), т. е. за пределом пропорциональности, определяются на основании результатов многочисленных экспериментов. Условно разделим стержни с малой гибкостью на две группы: первая группа — стержни с малой гибкостью (так, для стали Ст. 3 с гибкостью до $\lambda \leq 40$ — короткие стержни), вторая группа — с большей гибкостью (для стали $\lambda > 40$).

Первая группа на устойчивость не рассчитывается, так как подобные стержни выходят из строя вследствие появления либо текучести (пластичные материалы), либо достижения предела прочности (хрупкие материалы).

Вторая группа рассчитывается на устойчивость. Многочисленные эксперименты по исследованию продольного изгиба были проведены проф. Ф. Ясинским. На основании серии опытных исследований им предложено определять критические напряжения по формуле

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda, \quad (14.23)$$

где a и b — коэффициенты, зависящие от материала*. Так, для стали Ст. 3 $a = 330 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2}$ и $b = 1,44 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2}$.

* Значения коэффициентов a и b можно найти в справочниках.

Формула (14.23) для мягкой стали (например, для Ст. 3) применяется обычно в пределах $60 \leq \lambda \leq 100$. Кроме опытной формулы Ф. Ясинского применяется и ряд других опытных формул. Так, Тетмайер предложил формулу для определения критических напряжений в виде

$$\sigma_{кр} = 7760 - 120\lambda + 0,53\lambda^2, \quad (14.24)$$

которая дает хорошие результаты для $\lambda = 70 \div 80$ (Ст. 5, чугун и др.).

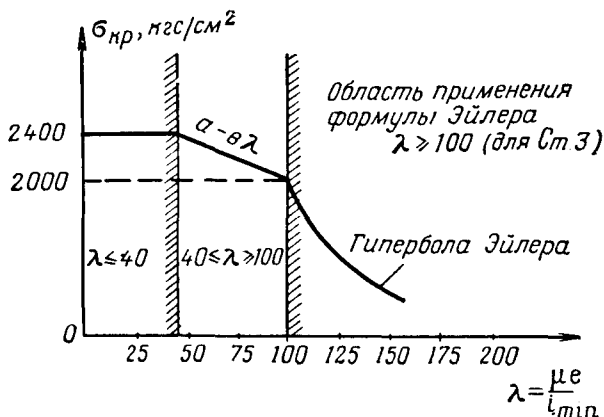


Рис. 14.6.

Часто используются и другие формулы для определения критических напряжений за пределами пропорциональности, например, равенство

$$\sigma_{кр} = \sigma_0 - a\lambda^2, \quad (14.25)$$

где при $\lambda = 0$ $\sigma_0 = \sigma_T$ для пластичного материала и $\sigma_0 = \sigma_{пч}$ для хрупкого материала.

В частности, для сталей принимают $\sigma_0 = 2800 \text{ кгс/см}^2 = 274 \text{ МН/м}^2$ и $a = 0,09 \text{ кгс/см}^2 \approx 0,0088 \text{ МН/м}^2$, соответственно для чугуна $\sigma_0 = 4200 \text{ кгс/см}^2 = 412 \text{ МН/м}^2$ и $a = 0,44 \text{ кгс/см}^2 = 0,043 \text{ МН/м}^2$.

На рис. 14.6 представлена обобщенная кривая Эйлера для мягкой стали (сталь Ст. 3), на которой участок для $40 \leq \lambda \leq 100$ принят изменяющимся по формуле Ясинского.

§ 70. ПРОВЕРКА СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Вместо уравнений Эйлера, Ясинского и др., каждое из которых применимо в определенных пределах гибкости, можно пользоваться одним, пригодным для стержней различной гибкости.

Стержень, сжатый силой P , проверяется на прочность и устойчивость по условиям:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma]_{\text{сж}}; \quad (14.26)$$

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma]_y, \quad (14.27)$$

где $[\sigma]_{\text{сж}} = \frac{\sigma_0}{[n_0]}$ и $[\sigma]_y = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{[n_y]}$.

Обычно коэффициент запаса на устойчивость принимается для стали равным $[n_y] = 1,8 \div 3,0$, для чугуна $[n_y] = 5 \div 5,5$. Соответственно среднее значение коэффициента запаса на сжатие $[n_0] = 1,6$. Как правило, $n_0 < n_y$. Из (14.25) и (14.26) следует, что отношение допускаемых напряжений будет

$$\frac{[\sigma]_y}{[\sigma]_{\text{сж}}} = \frac{\sigma_{\text{кр}}[n_0]}{\sigma_0[n_y]} = \varphi < 1$$

или

$$[\sigma]_y = \varphi [\sigma]_{\text{сж}}. \quad (14.28)$$

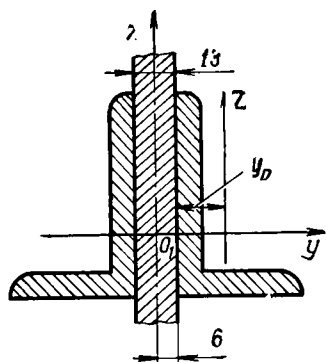


Рис. 14.7.

В последнем равенстве (14.28) коэффициент φ называется коэффициентом уменьшения основного допускаемого напряжения на сжатие или коэффициентом продольного изгиба. Он зависит от гибкости λ и материала стержня.

Используя значения $\sigma_{\text{кр}} = f(\lambda)$ и коэффициентов запаса n_y и n_0 , составлена таблица, в которой для различных материалов приведены значения φ в функции от гибкости. С помощью коэффициента φ можно решать задачи, связанные с проверкой стержней на устойчивость или подбором сечений.

Пример. Для устойчивости тонкой переборки толщиной 12 мм установлена стойка длиной $l = 3$ м, состоящая из двух неравнобоких уголков (рис. 14.7), которая воспринимает основное сжимающее усилие $P = 30$ т ≈ 295 кН. Определить сечение стойки, считая концы ее закрепленными шарнирно, если $[\sigma] = 1200$ кгс/см² = 118 МН/м².

Решение. Задаемся коэффициентом $\varphi_0 = 0,7$ (обычно в начале расчета принимают $\varphi = 0,6 \div 0,8$).

Определяем $[\sigma]_y = \varphi_0 [\sigma]_{\text{сж}} = 0,7 \cdot 1200 = 840$ кгс/см².

Вычисляем $2F \geq \frac{P}{[\sigma]_y} = \frac{30 \cdot 10^3}{840} = 35,7$ см².

Принимаем в соответствии с ГОСТ 8510—57 угольник № 14/9 толщиной 8 мм, который имеет $F = 18$ см², $I_z = 120$ см⁴, $y_0 = 2,03$ см.

Следовательно, для двух угольников

$$I_{z_1} = 2I_z^{(1)} = I_{\text{мин}} = 2 [120 + (2,03 + 0,6)^2 \cdot 18] = 489 \text{ см}^4;$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{2F}} = \sqrt{\frac{489}{2 \cdot 18}} = 3,68 \text{ см};$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 300}{36,8} = 81,5.$$

Определяем по таблице $\varphi(\lambda)$ для $\lambda=81,5$ и стали Ст. 3, что $\varphi_1=0,741$. Следовательно, новое значение $[\sigma]_y = \varphi_1 [\sigma]_{сж} = 0,741 \cdot 1200 = 890 \text{ кгс/см}^2 \approx 88 \text{ МН/м}^2$. Напряжения сжатия в сечении стержня:

$$\sigma = \frac{P}{2F} = \frac{30 \cdot 10^3}{2 \cdot 18} = 835 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2} \approx 82 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2};$$

$$\frac{[\sigma]_y - \sigma}{[\sigma]_y} \cdot 100\% = \frac{890 - 835}{890} \cdot 100\% = 7,3\%.$$

Следовательно, стержень недогружен на 7,3%, т. е. больше допускаемого, равного $\approx 2 \div 3\%$. Расчет следует повторить, принимая, например, $\varphi_2 = \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} = 0,72$.

РАЗДЕЛ II

КИНЕМАТИКА

§ 71. ВВЕДЕНИЕ

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучается механическое движение, рассматриваемое без учета сил, приложенных к движущимся объектам. Таким образом, кинематика изучает механическое движение с геометрической точки зрения как процесс изменения положения материальной точки или механической системы в пространстве с течением времени. Механическое движение является простейшей формой движения. «В мире нет ничего, кроме движущейся материи, и движущаяся материя не может двигаться иначе, как в пространстве и во времени»*. Следовательно, пространство и время являются объективными, реальными формами существования материи. Кинематика позволяет решать ряд практически важных задач. Знание законов кинематики потребуется также и для изучения последующих разделов механики (динамики, гидромеханики, передаточных механизмов) и специальных дисциплин.

Система отсчета. Напомним, что системой отсчета называется система координат, связанная с телом («телом отсчета»), относительно которой изучается движение. Движение тела относительно разных систем отсчета может быть различным.

Так, матрос, стоящий на палубе корабля, для системы координат, связанной с движущимся кораблем, является неподвижной точкой, а для системы координат, связанной с Землей, — подвижной. Таким образом, механическое движение или покой изучаются относительно выбранной системы отсчета.

Основной системой отсчета называется такая система координат, которая при изучении движения принята за неподвижную. Часто условно за основную систему отсчета принимают координатные оси, связанные с Землей. Однако надо помнить, что в ряде задач кинематики необходимо учитывать и вращение Земли, как, например, при изучении движения ракет дальнего действия, спутников Земли и т. д.

В этом случае за основную принимают гелиоцентрическую систему отсчета с началом в центре Солнечной системы и осями, направленными на неподвижные звезды.

* В. И. Ленин. «Материализм и эмпириокритицизм», изд. 1948 г., стр. 158.

В классической механике пространство предполагается однородным, трехмерным, обладающим одинаковыми свойствами во всех направлениях, а время независимым от движущейся материи.

Положение тела в пространстве является функцией времени. Время принимается протекающим одинаково в любых системах отсчета, как угодно перемещающихся относительно друг друга.

ГЛАВА 15

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

§ 72. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Рассмотрим движение материальной точки M в основной системе отсчета (рис. 15.1).

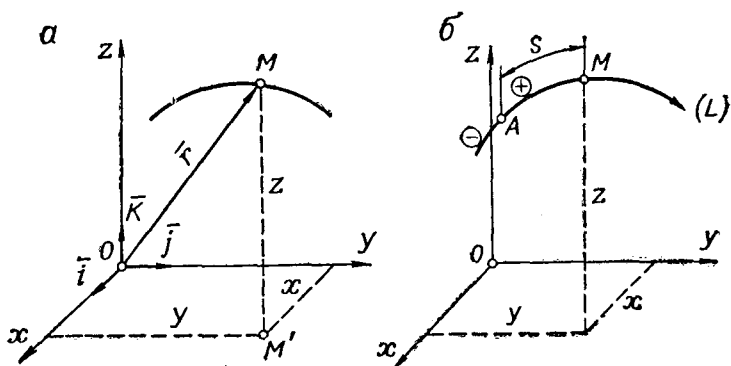


Рис. 15.1.

Пусть в различные моменты времени движущаяся материальная точка занимает в пространстве последовательно различные положения. Геометрическое место последовательных положений движущейся точки относительно данной системы отсчета называется траекторией точки. Таким образом, траектория точки — это линия, описываемая движущейся точкой в пространстве в рассматриваемой системе отсчета.

В зависимости от формы траектории движение может быть прямолинейным, при котором траектория — прямая линия, или криволинейным, при котором траектория — кривая линия.

Движение точки считается заданным, если для любого момента времени можно указать положение точки в пространстве на ее траектории. Рассмотрим способы задания движения материальной точки: векторный, координатный и естественный.

Векторный способ. Положение точки M в пространстве задается радиусом-вектором, начало которого совпадает с точ-

кой O — началом основной, например прямоугольной, системы координат (рис. 15.1, a):

$$\bar{r} = \bar{r}(t), \quad (15.1)$$

где t — время.

Уравнение (15.1) называется уравнением движения точки в векторной форме. Будем считать, что $\bar{r}(t)$ — однозначная, непрерывная, дважды дифференцируемая функция. Тогда, например, уравнение

$$\bar{r} = 2(t^2 + 1)\bar{i} + 4t\bar{j} + (1 - t)\bar{k}$$

определяет движение некоторой материальной точки. Так, в момент

$$t = 0 \quad \bar{r}(0) = 2\bar{i} + \bar{k}; \quad \text{при } t = 1 \text{ с } \quad \bar{r}(1) = 4\bar{i} + 4\bar{j} \text{ и т. д.}$$

Координатный способ (рис. 15.1, a). Положение точки задается координатами x , y и z , т. е. известны:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t); \\ y &= y(t); \\ z &= z(t), \end{aligned} \right\} \quad (15.2)$$

где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — однозначные, непрерывные, дважды дифференцируемые функции времени.

Уравнения (15.2) называются уравнениями движения точки в прямоугольной (декартовой) системе координат. По существу, уравнения (15.2) одновременно являются параметрическими уравнениями траектории материальной точки, где параметром является время.

В частном случае, когда точка движется в плоскости Oxy :

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t); \\ y &= y(t); \\ z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15.2a)$$

или в другом случае, когда точка движется вдоль прямой (в частности, вдоль оси Ox):

$$x = x(t); \quad y = 0; \quad z = 0. \quad (15.2b)$$

Очевидно, из уравнений (15.2) можно исключить время и связать между собой координаты движущейся точки. Тогда полученные зависимости будут уравнениями траектории точки в координатной форме.

Кроме вышеуказанного способа задания движения материальной точки в прямоугольной системе координат следует отметить и другие координатные способы (рис. 15.2), как, например:

а) в полярной системе координат; точка движется в плоскости Oxy (рис. 15.2, a)

$$\varphi = \varphi(t); \quad r = r(t);$$

б) в цилиндрической системе координат (рис. 15.2, б)

$$\varphi = \varphi(t); r = r(t); z = z(t);$$

в) в сферической системе координат (рис. 15.2, в)

$$\varphi = \varphi(t); \theta = \theta(t); \rho = \rho(t).$$

Пример. Определить траекторию точки в координатной форме $r=r(\varphi)$, если ее движение задано уравнениями:

$$r = at; \varphi = bt.$$

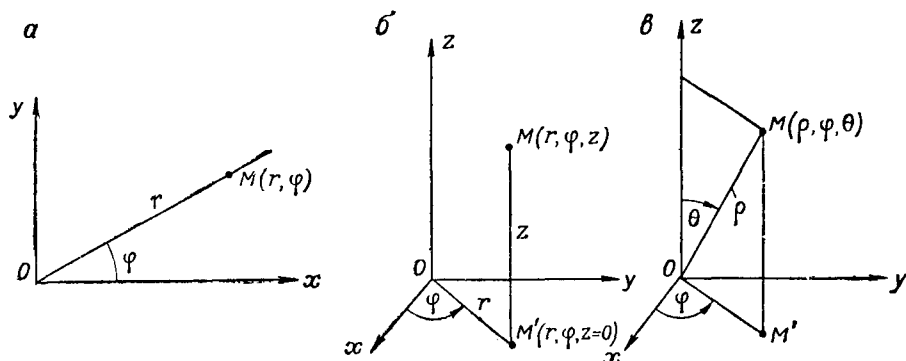


Рис. 15.2.

Решение. Движение задано в полярных координатах. Разделив одно уравнение на другое, получим

$$r = \frac{a}{b} \varphi,$$

т. е. траектория точки — спираль Архимеда. Движение начинается из начала координат — точки O , так как при $t=0$, $r_0=0$ и $\varphi_0=0$.

Естественный способ. При естественном способе задания движения материальной точки должны быть заданы (рис. 15.1, б):

- а) траектория точки относительно выбранной системы отсчета;
- б) начало отсчета дуговой координаты по траектории (точка A). Дуговой координатой точки называют длину дуги $am=s$ траектории;
- в) положительное направление отсчета дуговой координаты;
- г) закон изменения дуговой координаты, т. е. уравнение движения точки по траектории

$$s = s(t). \quad (15.3)$$

Уравнение (15.3) называется уравнением движения материальной точки вдоль заданной траектории в естественной форме.

Для перехода от координатного способа задания движения материальной точки к естественному следует воспользоваться выражением дифференциала дуги

$$ds = \pm \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}.$$

Из уравнения (15.2) определяем, что

$$dx = \dot{x}dt; \quad dy = \dot{y}dt; \quad dz = \dot{z}dt.$$

Тогда

$$ds = \pm \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt,$$

откуда

$$s = \pm \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt + C,$$

где C — постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий задачи; знак перед корнем выбирается в зависимости от выбора положительного направления отсчета дуговой координаты.

При прямолинейном движении точки координатный способ задания движения сводится к естественному.

Пример. Движение точки, например центра тяжести торпеды, задано в векторной форме

$$\vec{r} = 10t^2 \cdot \vec{i} + 5t^2 \cdot \vec{j}.$$

Следовательно, в координатной форме уравнения движения будут иметь вид:

$$x = 10t^2; \quad y = 5t^2.$$

Определить уравнение траектории в виде зависимости между координатами точки $y=y(x)$ и закон движения точки по этой траектории.

Решение. Определяем уравнение траектории точки в виде $y=y(x)$. Для этого исключаем из заданных уравнений движения время t , например, делением второго уравнения на первое

$$\frac{y}{x} = 0,5 \quad \text{или} \quad y = 0,5x.$$

Уравнение $y=0,5x$ является уравнением прямой линии. Из уравнений движения видно, что при $t=0$ $x=0$, $y=0$. Следовательно, точка M движется из начала координат по траектории — прямой линии (рис. 15.3), причем при возрастании t $x>0$; $y>0$.

Находим закон движения точки по траектории. Для этого вначале дифференцируем уравнения движения:

$$dx = 20tdt; \quad dy = 10tdt,$$

а затем определяем

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = 10\sqrt{5}tdt.$$

Интегрируем полученное уравнение, тогда

$$s = 5\sqrt{5}t^2 + C.$$

Если при $t=0$ $s=s_0=0$, тогда $C=0$ и $S = 5\sqrt{5}t^2$,

Пример. Определить траекторию точки M кривошипно-шатунного механизма, у которого длина кривошипа равна длине шатуна $OA=AB=r$ и $AM=MB$. Кривошип вращается с постоянной угловой скоростью ω ($\varphi=\omega t$, где φ — угол поворота кривошипа).

Решение. Устанавливаем из рис. 15.4, что координаты точки M будут:

$$x = \frac{3}{2} r \cos \varphi = \frac{3}{2} r \cos \omega t;$$

$$y = \frac{1}{2} r \sin \varphi = \frac{1}{2} r \sin \omega t.$$

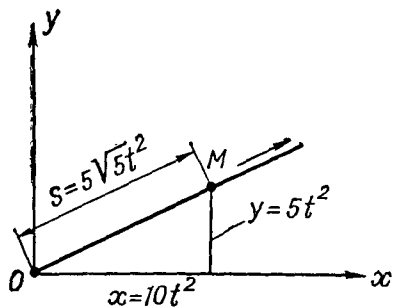


Рис. 15.3.

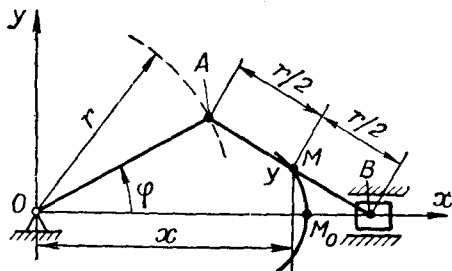


Рис. 15.4.

Определяем траекторию точки $y=y(x)$, для чего записываем полученные уравнения в виде: $\frac{x}{\frac{3}{2}r} = \cos \varphi$; $\frac{y}{\frac{1}{2}r} = \sin \varphi$. Возводя в квадрат обе части уравнений и складывая их, получим

$$\frac{x^2}{(1,5r)^2} + \frac{y^2}{(0,5r)^2} = 1.$$

Следовательно, траектория точки — эллипс с полуосями, равными $a=1,5r$ и $b=0,5r$. При $t=0$ $x_0=1,5r=a$, $y_0=0$, т. е. точка в начале движения находится на большой полуоси в M_0 . При возрастании времени t координата y увеличивается, а x уменьшается. Следовательно, материальная точка движется по траектории против хода часовой стрелки.

§ 73. СКОРОСТЬ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Определение скорости точки при векторном способе задания движения. Перемещением точки называется изменение положения точки в рассматриваемой системе отсчета, определяемое вектором, проведенным из начального положения точки в конечное.

Пусть материальная точка занимает в пространстве положение M , определяемое радиусом-вектором \vec{r} в момент времени t , и положение M_1 , определяемое радиусом-вектором \vec{r}_1 при $t+\Delta t$. Элементарным перемещением точки за малый промежуток времени Δt называется вектор $\overline{MM_1} = \Delta \vec{r}$ (рис. 15.5, а).

Средней скоростью $\bar{v}_{\text{ср}}$ называется отношение вектора, изображающего элементарное перемещение движущейся точки, к промежутку времени, в течение которого оно происходит:

$$\bar{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}. \quad (15.4)$$

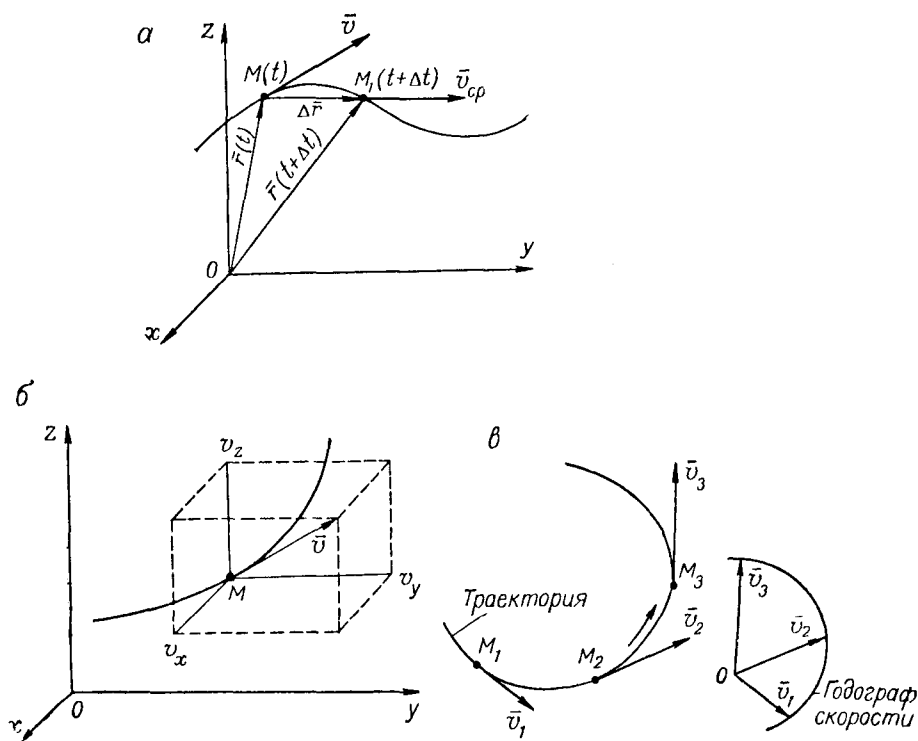


Рис. 15.5.

Направление средней скорости $\bar{v}_{\text{ср}}$ совпадает с направлением вектора элементарного перемещения $\Delta \bar{r}$, так как Δt — положительная скалярная величина.

Истинной скоростью или скоростью в данный момент времени называется предел $v_{\text{ср}}$ при $\Delta t \rightarrow 0$, т. е.

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}. \quad (15.5)$$

Таким образом, скорость точки есть векторная величина, характеризующая быстроту изменения положения точки в данный момент времени в данной системе отсчета, равная первой производной от радиуса-вектора движущейся точки по времени. Вектор скорости является связанным вектором.

Учитывая, что при $\Delta t \rightarrow 0$ точка M_1 стремится по кривой к точке M , хорда M_1M переходит в касательную к кривой в точке M . Следовательно, скорость в данный момент времени направлена по касательной к траектории в сторону движения материальной точки. Численную величину (модуль) скорости в дальнейшем мы будем обозначать той же буквой v , но без черточки сверху, или символом $|\bar{v}|$. Размерность скорости $[v] = \text{длина/время}$. В системе единиц СИ и в системе МКГСС за единицу скорости принимают 1 м/с.

Определение скорости точки при координатном способе задания движения. Напомним, что $\bar{r} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$, где \bar{i} , \bar{j} и \bar{k} — орты неподвижной прямоугольной системы координат, постоянные по величине и направлению. Тогда

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \bar{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \bar{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \bar{k}. \quad (15.6)$$

С другой стороны, вектор скорости можно выразить через его проекции в виде

$$\bar{v} = v_x \cdot \bar{i} + v_y \bar{j} + v_z \cdot \bar{k}. \quad (15.7)$$

Сопоставляя полученные равенства (15.6) и (15.7), получаем, что проекции скорости на неподвижные оси прямоугольной системы координат будут (рис. 15.5, б)

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \quad (15.8)$$

Таким образом, проекции скорости на оси прямоугольной системы координат равны производным по времени от соответствующих координат. Величина скорости (рис. 15.5, б) определяется равенством

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (15.9)$$

Направление скорости определяется углами α , β , γ , косинусы которых (направляющие косинусы) равны:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \cos(i, \hat{\bar{v}}) = \frac{v_x}{v}; \\ \cos \beta &= \cos(j, \hat{\bar{v}}) = \frac{v_y}{v}; \\ \cos \gamma &= \cos(k, \hat{\bar{v}}) = \frac{v_z}{v}, \end{aligned} \right\} \quad (15.10)$$

где α , β и γ — углы, которые вектор \bar{v} образует с соответствующими осями координат x , y и z .

Рассмотрим материальную точку M (рис. 15.5, в), когда она занимает на траектории положения M_1 , M_2 , $M_3 \dots$ и в этих положениях имеет соответствующие скорости v_1 , v_2 , $v_3 \dots$. Откладывая из произвольно выбранной точки O (полюса) векторы \bar{v}_1 , \bar{v}_2 , $\bar{v}_3 \dots$

и т. д. и соединяя их концы, получим кривую — годограф вектора скорости.

Годографом вектора скорости движущейся точки называется геометрическое место точек концов векторов скорости, отложенных от произвольной точки пространства. Для получения уравнения годографа скорости из уравнений проекций скорости на оси координат исключают время, т. е. определяют при движении точки $v_y = f_1(v_x)$; $v_z = f_2(v_x)$.

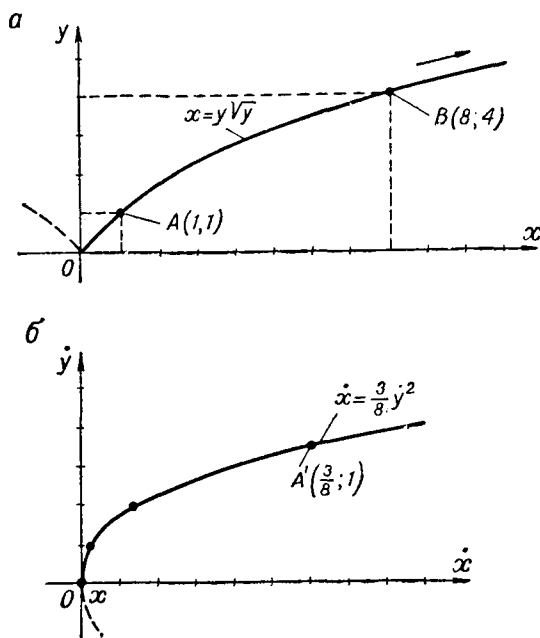


Рис. 15.6.

Частные случаи:

1. При равномерном движении точки по окружности годографом скорости является тоже окружность, радиус которой равен модулю скорости.

2. При произвольном движении точки по прямой годографом скорости тоже является прямая.

3. При равномерном движении по прямой годографом скорости является точка.

Пример. Подводная лодка (ПЛ), которую мы принимаем за материальную точку, движется в горизонтальной плоскости Oxy согласно уравнениям движения $x=8t^3$; $y=4t^4$. Определить траекторию подводной лодки $x=f(y)$ и годограф скорости $v_x=f_1(v_y)$.

Решение. Исключая параметр t из уравнений движения подводной лодки, получаем

$$x = y^{3/2} \text{ или } x = y\sqrt{y}.$$

Траектория точки — полукубическая парабола (рис. 15.6, а). Но не вся кривая является траекторией. Из исходных уравнений следует, что x и y изменяются в пределах от 0 до $+\infty$ (на рисунке — сплошная линия).

Дифференцируем x и y по t , получаем

$$\dot{x} = v_x = 24t^2; \dot{y} = v_y = 8t. \quad (*)$$

Исключаем из последних уравнений параметр t , тогда

$$\dot{x} = \frac{3}{8} \dot{y}^2.$$

Годограф скорости — квадратная парабола (рис. 15.6, б).

Но не вся кривая $\dot{x} = \frac{3}{8} \dot{y}^2$ служит годографом. Из уравнений (*) следует, что \dot{x} и \dot{y} изменяются в пределах от 0 до $+\infty$. Отсюда годографом будет лишь часть кривой, заключенной между точками закрытого интервала $[0, +\infty)$.

Определение скорости точки при естественном способе задания движения. Рассмотрим случай, когда задана траектория и уравнение движения материальной точки в естественной форме, т. е. $s = s(t)$, начало и положительное направление отсчета дуговой координаты. В момент времени t точка находится в положении M , в момент времени $t + \Delta t$ — в положении M_1 , дуга $\overline{MM_1} = \Delta s$ (рис. 15.5, а).

В соответствии с определением средней скорости

$$\bar{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Скорость в данный момент времени будет

$$\bar{v} = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta s \rightarrow 0}} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}.$$

Учтем, что $\left| \frac{d\bar{r}}{ds} \right| = \left| \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} \right| = 1$, а направление $\overline{MM_1} = \Delta \bar{r}$ в пределе при $\Delta s \rightarrow 0$ будет совпадать с касательной к траектории в точке M . Следовательно, $\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\tau}$ и тогда

$$\bar{v} = \frac{ds}{dt} \bar{\tau}, \quad (15.11)$$

где $\bar{\tau}$ — единичный вектор (орт) касательной, направленный в сторону положительного отсчета координаты $s(t)$.

Спроектируем равенство (15.11) на касательную. Для этого скалярно умножим обе его части на орт $\bar{\tau}$. Тогда $\bar{v} \cdot \bar{\tau} = \frac{ds}{dt} \bar{\tau} \cdot \bar{\tau}$ или, учитывая, что $\bar{\tau} \cdot \bar{\tau} = 1$,

$$v_{\bar{\tau}} = \frac{ds}{dt}. \quad (15.12)$$

Проекция вектора скорости на касательную к траектории $v_{\bar{\tau}}$ равна первой производной от дуговой координаты s по времени.

Модуль скорости точки \bar{v} равен абсолютной величине v_τ — проекции скорости \bar{v} на направление касательной, т. е.

$$|\bar{v}| = |v_\tau| = \left| \frac{ds}{dt} \right|. \quad (15.13)$$

Если точка движется от M к M_1 , т. е. в направлении положительного отсчета криволинейной координаты, то

$$\left. \begin{aligned} \frac{ds}{dt} > 0 \text{ и } \bar{v} = \frac{ds}{dt} \bar{\tau}, \\ \text{где } v = \frac{ds}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (15.14)$$

При перемещении точки от M_1 к M

$$\left. \begin{aligned} \frac{ds}{dt} < 0 \text{ и } \bar{v} = - \left| \frac{ds}{dt} \right| \bar{\tau}, \\ \text{где } v = - \left| \frac{ds}{dt} \right|. \end{aligned} \right\} \quad (15.15)$$

Равномерным движением называется такое, при котором проекция v_τ вектора скорости \bar{v} постоянна. Тогда из (15.12) следует:

$$\begin{aligned} ds &= v_\tau dt \text{ и} \\ s &= v_\tau t + C^*. \end{aligned}$$

Постоянная интегрирования C определяется из начальных условий. Так, если при $t=0$ координата точки будет s_0 , то $C=s_0$, и, следовательно,

$$s(t) = vt + s_0. \quad (15.16)$$

Следует отметить, что дуговая координата $s(t)$ определяет положение точки на траектории, а не путь — расстояние, пройденное точкой к моменту времени t . Лишь в случае, когда точка движется по траектории все время в положительном (либо отрицательном) направлении отсчета, во все время движения дуговая координата будет характеризовать и пройденный путь. В общем случае точка может двигаться по какой-либо траектории, например, из положения A в положение B , а затем в обратном направлении — из B в A . Тогда к концу рассматриваемого промежутка времени дуговая координата будет равна нулю, а путь — расстояние, пройденное точкой, будет $l = |AB| + |BA|$.

Путь, пройденный точкой по траектории, можно определять аналитически или графически в зависимости от способа задания скорости точки. Рассмотрим пример определения пути, когда скорость точки задана аналитически.

* В дальнейшем для краткости значение проекции скорости на касательную v_τ иногда будем обозначать v .

При изменении направления движения по траектории скорость меняет свой знак. Очевидно, путь Π , пройденный точкой, должен определяться суммированием длин участков, на которых скорость сохраняла свой знак, т. е.

$$\Pi = |s_2 - s_1| + |s_3 - s_2| + |s_4 - s_3| \text{ и т. д.}$$

Пример. Точка движется по траектории со скоростью, алгебраическое значение которой изменяется по закону $v = \frac{\pi}{5} \sin \frac{8\pi t}{15}$ (м/с). Определить дуговую координату и расстояние, пройденное точкой к моменту времени $t=5$ с, если при $t=0$ $s_0=0$.

Решение. Определяем дуговую координату. Известно (15.12), что $\frac{ds}{dt} = v$, откуда $ds = v dt$ и, следовательно,

$$s = \int_0^t v dt = \int_0^t \frac{\pi}{5} \sin \frac{8\pi t}{15} dt \text{ или } s = \frac{3}{8} \left(1 - \cos \frac{8\pi t}{15} \right).$$

$$\text{Для момента } t=5 \text{ с, } s|_{t=5} = \frac{3}{8} \left(1 - \cos \frac{8\pi}{15} \cdot 5 \right) = \frac{9}{16} \text{ м.}$$

Вычисляем расстояние Π , пройденное точкой. Предварительно нужно установить, в какие моменты времени ее скорость обращается в нуль. Это будет тогда, когда $\sin \frac{8\pi t_n}{15} = 0$, т. е. $\frac{8\pi t_n}{15} = \pi n$, где $n=1, 2, \dots$

Отсюда $t_1 = \frac{15}{8}$ с при $n=1$,

$$t_2 = \frac{30}{8} \text{ с при } n=2 \text{ и т. д.}$$

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } \Pi &= |s_1 - s_0| + |s_2 - s_1| + |s_3 - s_2| = \left| \frac{3}{8} \left(1 - \cos \frac{8\pi}{15} \cdot \frac{15}{8} \right) \right| + \\ &+ \left| \frac{3}{8} \left(\cos \frac{8\pi}{15} \cdot \frac{15}{8} - \cos \frac{8\pi}{15} \cdot \frac{30}{8} \right) \right| + \left| \frac{3}{8} \left(\cos \frac{8\pi}{15} \cdot \frac{30}{8} - \cos \frac{8\pi}{15} \cdot 5 \right) \right| = \\ &= \left| \frac{6}{8} \right| + \left| \frac{3}{8} (-1 - 1) \right| + \left| \frac{3}{8} \left(1 + \frac{1}{2} \right) \right| = \left| \frac{6}{8} \right| + \left| -\frac{6}{8} \right| + \left| \frac{9}{16} \right| = \frac{33}{16} \text{ м.} \end{aligned}$$

Пример. Величина скорости катера при отходе от пирса изменялась в течение первых трех минут по закону $v = 1 \cdot 10^{-3} t^2$ м/с. Определить расстояние, пройденное катером через 1,5 мин после начала движения, если оно было прямолинейным.

Решение. Направим ось x по траектории катера. Тогда

$$v_x = \frac{dx}{dt}.$$

Учитывая, что направление движения по траектории не изменяется, определяем расстояние, пройденное катером, по формуле

$$x = \int_0^{90} v_x dt = \int_0^{90} 1 \cdot 10^{-3} t^2 dt = 243 \text{ м.}$$

Рассмотрим случай, когда изменение проекции скорости на касательную задано графически (рис. 15.7, а). Пусть в момент времени t величина скорости точки будет $v(t)$, в момент $t + \Delta t$ соот-

ветственно $v + \Delta v$. Тогда площадь заштрихованной элементарной фигуры с точностью до малых высшего порядка с учетом масштаба будет равна $\mu_F \cdot \Delta F = v \Delta t$, где μ_F — масштаб площадки.

Очевидно,

$$\mu_F \cdot F = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu_F \cdot \Delta F_i = \int_0^t v dt. \quad (*)$$

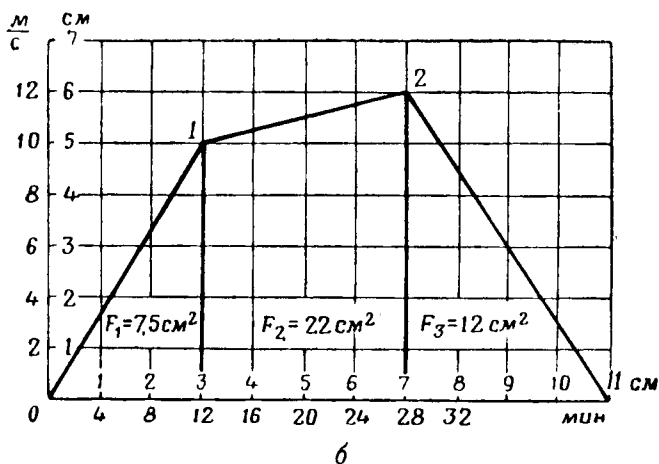
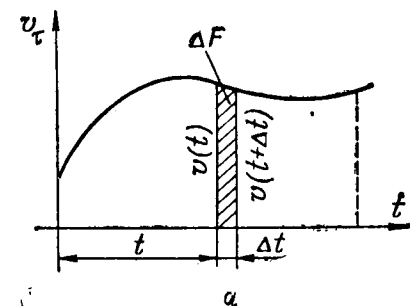


Рис. 15.7.

Сопоставляя (15.12) с полученной формулой, видим, что с учетом масштаба площадь, ограниченная осью времени, графиком скорости $v(t)$ и двумя ординатами, соответствующими началу и концу рассматриваемого промежутка, соответствует расстоянию, пройденному точкой за этот промежуток времени.

Пример. Определить расстояние, пройденное кораблем, если график изменения величины скорости в функции времени представлен на рис. 15.7, б.

Решение. Определяем площадь фигуры 0—1—2—3—0:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = 7,5 + 22 + 12 = 41,5 \text{ см}^2.$$

Вычисляем масштабы по оси абсцисс: 1 см — 4 мин = 240 с, т. е. $\mu_t = 240 \text{ с/см}$, по оси ординат 1 см — 2 м/с, т. е. $\mu_v = 2 \frac{\text{м/с}}{\text{см}}$. Следовательно, мас-

штаб площади диаграммы $\mu_F = \mu_t \cdot \mu_v = 240 \cdot 2 = 480 \text{ м/см}^2$. Находим расстояние, пройденное кораблем, по равенству

$$s = \mu_F \cdot F = 480 \cdot 41,5 = 19920 \text{ м} = 19,9 \text{ км.}$$

§ 74. УСКОРЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

В общем случае движения скорость точки изменяется в зависимости от времени как по величине, так и по направлению. Допу-

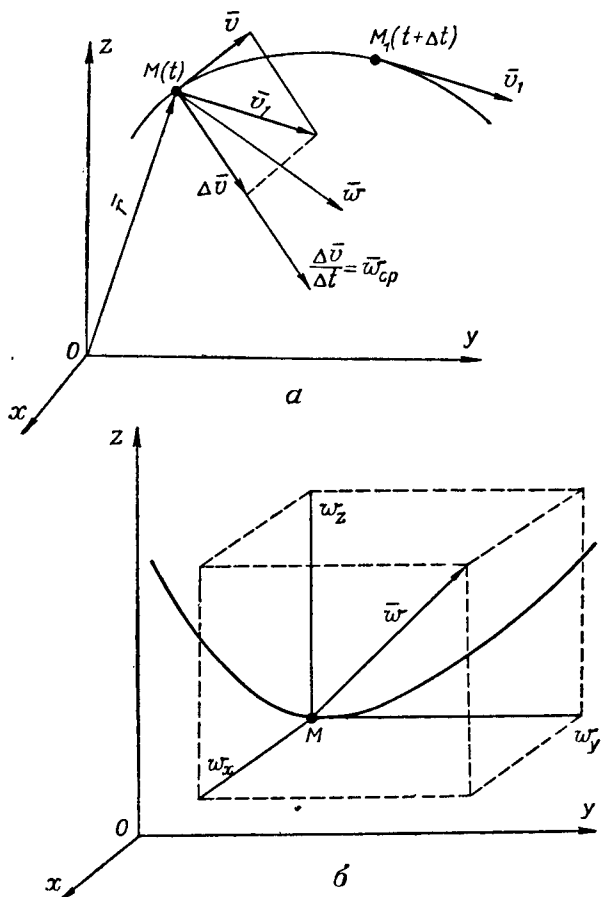


Рис. 15.8.

стим, точка занимает в моменты времени t и $t + \Delta t$ положения M и M_1 и ее скорости в эти моменты будут соответственно \bar{v} и $\bar{v} + \Delta\bar{v}$ (рис. 15.8, а). Перенесем мысленно вектор \bar{v}_1 в точку M и построим параллелограмм, в котором диагональю будет \bar{v}_1 , а двумя сторонами \bar{v} и $\Delta\bar{v}$, где $\Delta\bar{v}$ — приращение скорости за время Δt .

Средним ускорением точки за промежуток времени Δt называется отношение

$$\bar{w}_{\text{cp}} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}. \quad (15.17)$$

Очевидно, вектор \bar{w}_{cp} совпадает по направлению с $\Delta \bar{v}$. Предел отношения элементарного приращения скорости $\Delta \bar{v}$ к элементарному приращению времени Δt при $\Delta t \rightarrow 0$ называется полным ускорением точки в данный момент времени, т. е.

$$\bar{w} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt}.$$

Учитывая равенство (15.5), получаем, что

$$\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2}. \quad (15.18)$$

Таким образом, ускорение точки есть пространственно-временная характеристика быстроты изменения скорости точки в данный момент времени в данной системе отсчета.

Ускорением называется векторная величина, равная первой производной от вектора скорости по времени или второй производной от радиуса-вектора точки по времени.

Учитывая, что радиус-вектор движущейся точки равен

$$\bar{r} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k},$$

ускорение можно выразить векторным равенством

$$\bar{w} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \ddot{x} \cdot \bar{i} + \ddot{y} \cdot \bar{j} + \ddot{z} \cdot \bar{k}. \quad (15.19)$$

С другой стороны, вектор ускорения можно выразить через проекции на оси неподвижной системы прямоугольных координат (рис. 15.8, б) в виде

$$\bar{w} = w_x \cdot \bar{i} + w_y \cdot \bar{j} + w_z \cdot \bar{k}. \quad (15.20)$$

Из сравнения равенств (15.19) и (15.20) следует, что

$$\left. \begin{aligned} w_x &= \ddot{x} = \dot{v}_x; \\ w_y &= \ddot{y} = \dot{v}_y; \\ w_z &= \ddot{z} = \dot{v}_z. \end{aligned} \right\} \quad (15.21)$$

Проекции ускорения точки на оси неподвижной прямоугольной системы координат равны вторым производным по времени от соответствующих координат рассматриваемой точки или первым производным от соответствующих проекций скорости этой точки.

Модуль ускорения определяется равенством

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (15.22)$$

Соответствующие направляющие косинусы вектора ускорения:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \cos(\bar{i}, \hat{\omega}) = \frac{\omega_x}{\omega}; \\ \cos \beta &= \cos(\bar{j}, \hat{\omega}) = \frac{\omega_y}{\omega}; \\ \cos \gamma &= \cos(\bar{k}, \hat{\omega}) = \frac{\omega_z}{\omega}. \end{aligned} \right\} \quad (15.23)$$

Численную величину (модуль) ускорения будем обозначать той же буквой ω без черточки сверху или символом $|\ddot{\mathbf{r}}|$. Ускорение имеет размерность $[\omega] = \text{скорость}/\text{время} = \text{длина}/(\text{время})^2$. За еди-

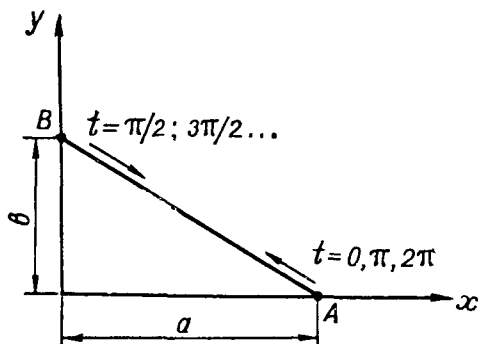


Рис. 15.9.

ницу ускорения в системе СИ и в системе МКГСС принимают 1 м/с^2 .

Пример. Определить траекторию, скорость и ускорение материальной точки, уравнения движения которой заданы в виде: $x = a \cos^2 t$; $y = b \sin^2 t$, где a и b — постоянные коэффициенты.

Решение. Устанавливаем, что точка движется в плоскости Oxy , так как $z = 0$.

Определяем траекторию, для чего складываем заданные уравнения движения. Получаем, что

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

т. е. траектория — прямая линия. При $t=0$ (начало движения) $x=a$; $y=0$.

Направление движения из точки A показано на рис. 15.9 стрелкой. Через $t_1 = \frac{\pi}{2}$ с материальная точка занимает положение $x=0$; $y=b$, после чего движение происходит из B в обратном направлении. В момент $t=\pi$ точка занимает вновь начальное положение A , затем движется к B и т. д., т. е. точка совершает колебания.

Определяем последовательно проекции скорости на неподвижные оси прямоугольных координат, а затем величину и направление скорости:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_x = -2a \sin t \cos t = -a \sin 2t; \\ \dot{y} &= v_y = 2b \sin t \cos t = b \sin 2t; \\ v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \sin 2t.\end{aligned}$$

Отметим, что направление движения в любой момент времени определяется вектором скорости.

Направляющие косинусы:

$$\cos(\vec{i}, \vec{v}) = \frac{v_x}{v} = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \cos(\vec{j}, \vec{v}) = \frac{v_y}{v} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

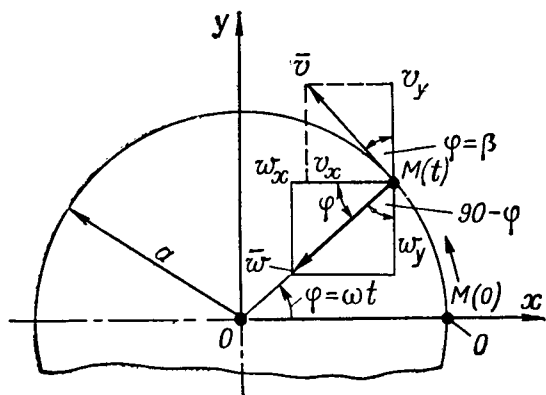


Рис. 15.10.

Определяем последовательно проекции ускорения на оси координат, а затем величину и направление ускорения:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -2a \cos 2t; \quad \ddot{y} = 2b \cos 2t; \\ w &= \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = 2\sqrt{a^2 + b^2} \cos 2t.\end{aligned}$$

Направляющие косинусы:

$$\cos \alpha = \frac{w_x}{w} = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Пример. Подводная лодка, которую в условиях поставленной задачи можно принять за материальную точку, начинает совершать вокруг объекта циркуляцию таким образом, что ее положение в любой момент времени может быть определено уравнениями:

$$x = a \cos \omega t; \quad y = a \sin \omega t, \quad (*)$$

где a и ω не зависят от времени.

Определить траекторию и закон движения подводной лодки вдоль траектории, а также ее скорость и ускорение в любой момент времени. Начальное положение подводной лодки совпадает с началом O отсчета дуговой координаты (рис. 15.10).

Решение. Записываем уравнение траектории в виде $y=y(x)$. Для этого возводим в квадрат обе части равенства (*) и складываем их. Тогда $x^2 + y^2 =$

$\neq a^2$, т. е. траектория подводной лодки — окружность радиуса a (рис. 15.10). В начале циркуляции ($t=0$), $x=a$, $y=0$, т. е. подводная лодка находится в точке $M(0)$ и движется по траектории против хода часовой стрелки. Это направление принимаем за положительное направление отсчета дуговой координаты.

Определяем дуговую координату подводной лодки на траектории, для чего находим:

$$dx = -a\omega \sin \omega t dt; \quad dy = a\omega \cos \omega t dt;$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(-a\omega \sin \omega t)^2 + (a\omega \cos \omega t)^2} dt = a\omega dt.$$

Интегрируя, получаем $s = a\omega t + C$, где $C=0$, так как при $t=0$ $s=0$ по начальному условию.

Находим величину скорости точки, которая может быть определена:

а) через проекции на неподвижные оси прямоугольной системы координат:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin \omega t; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = a\omega \cos \omega t;$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = a\omega;$$

направляющие косинусы и соответствующие углы будут равны:

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v} = -\sin \omega t; \quad \cos \beta = \frac{v_y}{v} = \cos \omega t;$$

$$\alpha = 90^\circ + \omega t \quad \beta = \omega t;$$

направление движения по траектории — против хода часовой стрелки, так как, например, в первой четверти $v_x < 0$, $v_y > 0$;

б) дифференцированием дуговой координаты по времени $v = \frac{ds}{dt} = a\omega$.

Проекции скорости и скорость представлены на рис. 15.10.

Определяем величину ускорения точки по его проекциям на оси прямоугольной системы координат:

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} = -a\omega^2 \cos \omega t;$$

$$w_y = \frac{dv_y}{dt} = -a\omega^2 \sin \omega t,$$

откуда $w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = a\omega^2$.

Направляющие косинусы и соответствующие углы равны:

$$\cos \alpha = \cos(\widehat{w, \hat{i}}) = \frac{w_x}{w} = -\cos \omega t; \quad \cos \beta = \cos(\widehat{w, \hat{j}}) = \frac{w_y}{w} = -\sin \omega t;$$

$$\alpha = 180^\circ + \omega t; \quad \beta = 90^\circ + \omega t.$$

Отметим, что угол между радиусом-вектором и осью x равен ωt . Таким образом, ускорение направлено вдоль радиуса-вектора к центру окружности (рис. 15.10).

§ 75. ПОНЯТИЕ ОБ ЕСТЕСТВЕННЫХ ОСЯХ. ПРОЕКЦИИ УСКОРЕНИЯ НА ЕСТЕСТВЕННЫЕ ОСИ

В общем случае траектория точки может быть не плоской кривой (например, винтовая линия). Отметим на траектории (рис. 15.11) два положения точки: положение M , в котором она

находилась в момент времени t , и положение M_1 , в котором она находится в момент времени $t + \Delta t$. Длину дуги между двумя положениями точки обозначим Δs . Проведем касательные к траектории в точках M и M_1 и орты касательных, которые обозначим соответственно $\vec{\tau}$ и $\vec{\tau}_1$.

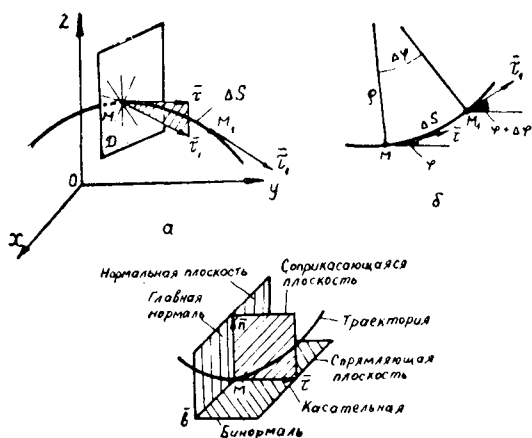


Рис. 15.11.

Нормальной плоскостью \underline{D} в точке M называется плоскость D , перпендикулярная орту $\vec{\tau}$. Любая прямая, проведенная в плоскости D через точку M , называется нормалью.

Перенесем орт $\vec{\tau}_1$ в точку M . Угол $\Delta\varphi$ между векторами $\vec{\tau}$ и $\vec{\tau}_1$ называется углом смежности (рис. 15.11, а). Из аналитической геометрии известно, что кривизна кривой в данной точке — величина, обратная радиусу кривизны ρ (рис. 15.11, б), равна пределу отношения $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ при $\Delta s \rightarrow 0$, т. е.

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}.$$

Для прямой линии $\rho = \infty$, для окружности $\rho = r$ (радиусу окружности).

Проведем плоскость (на рис. 15.11, а заштрихована) через векторы $\vec{\tau}$ и $\vec{\tau}_1$ с началом в точке M .

Предельное положение плоскости, когда точка $M_1 \rightarrow M$ (т. е. $\Delta s \rightarrow 0$), называется соприкасающейся плоскостью (рис. 15.11, а и в).

Линия пересечения соприкасающейся и нормальной плоскостей называется главной нормалью (рис. 15.11, в). За положительное направление главной нормали принимаем направление в

сторону вогнутости траектории. Орт, направленный по главной нормали, обозначим \bar{n} . Прямая, одновременно перпендикулярная касательной $\bar{\tau}$ и главной нормали \bar{n} , называется бинормалью. Направление бинормали определяется ортом \bar{b} , который должен быть направлен так, чтобы, глядя с его конца, вращение орта $\bar{\tau}$ к \bar{n} происходило в сторону меньшего угла против хода часовой стрелки.

Прямоугольная система координат, направленная по касательной главной нормали и бинормали к траектории, начало которой совпадает с движущейся точкой, называется естественной. Оси этой системы называются естественными осями.

Проекция ускорения на естественные оси координат. Скорость точки в любой момент времени можно записать в виде

$$\bar{v} = v_{\tau} \cdot \bar{\tau}, \text{ где } v_{\tau} = \frac{ds}{dt}.$$

Тогда ускорение точки

$$\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (v_{\tau} \cdot \bar{\tau}). \quad (15.24)$$

Вектор $\bar{\tau}$ имеет постоянное числовое значение $|\bar{\tau}| = 1$, но изменяется с течением времени по направлению. Следовательно,

$$\bar{w} = \frac{dv_{\tau}}{dt} \cdot \bar{\tau} + v_{\tau} \cdot \frac{d\bar{\tau}}{dt}. \quad (15.25)$$

Первое слагаемое правой части уравнения (15.25) является составляющей полного ускорения, направленной по касательной, и называется касательным или тангенциальным ускорением.

$$\bar{w}_{\tau} = \frac{dv_{\tau}}{dt} \cdot \bar{\tau}, \quad (15.26)$$

где $\frac{dv_{\tau}}{dt} = w_{\tau}$ — проекция полного ускорения на касательную.

Отметим, что w_{τ} можно выразить через проекции скорости и ускорения на неподвижные оси прямоугольной системы координат следующим образом, учитывая, что $v = |v_{\tau}|$:

$$|w_{\tau}| = |\bar{w} \cdot \bar{\tau}| = \left| \bar{w} \cdot \frac{\bar{v}}{v} \right| = \frac{|\dot{x} \cdot \dot{x} + \dot{y} \cdot \dot{y} + \dot{z} \cdot \dot{z}|}{v}. \quad (15.27^{\bullet})$$

* Равенство (15.27) можно получить и так:

$$|w_{\tau}| = \left| \frac{dv}{dt} \right| = \frac{d \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}{dt} = \frac{|v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z|}{v}.$$

Касательное ускорение совпадает с направлением скорости при ускоренном движении и направлено в противоположную сторону — при замедленном. Оно характеризует быстроту изменения скорости точки по модулю. Рассмотрим второе слагаемое уравнения (15.25), которое равно

$$v_{\tau} \frac{d\bar{\tau}}{dt} = v_{\tau} \frac{d\bar{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v_{\tau}^2 \frac{d\bar{\tau}}{ds}. \quad (15.28)$$

Определим величину и направление вектора $\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta s}$.

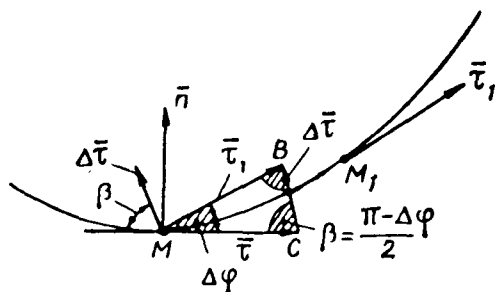


Рис. 15.12.

Из равнобедренного треугольника MBC (рис. 15.12) следует, что $|\Delta \bar{\tau}| = 2 |\bar{\tau}| \sin \frac{\Delta \varphi}{2}$. Тогда

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta s} \right| = \lim_{\substack{\Delta s \rightarrow 0 \\ \Delta \varphi \rightarrow 0}} \left| \frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta \varphi} \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \left| \frac{2 \sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\Delta \varphi} \right| \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right| = \frac{1}{\rho},$$

где ρ — радиус кривизны.

Обратим внимание, что при $\Delta \varphi \rightarrow 0$ $\beta \rightarrow \frac{\pi}{2}$, т. е. вектор $\frac{d\bar{\tau}}{dt}$ направлен по главной нормали кривой в точке M в сторону вогнутости. Таким образом,

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho} \bar{n}. \quad (15.29)$$

Второе слагаемое правой части уравнения (15.25) является составляющей полного ускорения, направленной по главной нормали в сторону вогнутости траектории, и называется нормальным ускорением, которое с учетом равенств (15.28) и (15.29) будет:

$$\bar{w}_n = \frac{v^2}{\rho} \bar{n}, \quad (15.30)$$

где $v_{\tau}^2 = v^2$.

Следовательно, ускорение движущейся точки

$$\bar{\omega} = \frac{dv_{\tau}}{dt} \cdot \bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \cdot \bar{n} = \bar{\omega}_{\tau} + \bar{\omega}_n. \quad (15.31)$$

Множители $\frac{dv_{\tau}}{dt} = \omega_{\tau}$ и $\frac{v^2}{\rho} = \omega_n$ являются проекциями ускорения соответственно на касательную и главную нормаль. Из полученной формулы следует, что проекция ускорения на бинормаль равна нулю, т. е. ускорение $\bar{\omega}$ лежит в соприкасающейся плоскости. Нормальное ускорение характеризует быстроту изменения скорости по направлению.

Модуль ускорения, учитывая, что $\bar{\omega}_n \perp \bar{\omega}_{\tau}$, будет равен

$$\omega = \sqrt{\omega_{\tau}^2 + \omega_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}. \quad (15.32)$$

Угол между главной нормалью и ускорением определяется из формулы

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\bar{n}, \bar{\omega}) = \frac{\omega_{\tau}}{\omega_n} = \frac{\frac{dv_{\tau}}{dt}}{v^2/\rho}. \quad (15.33)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи движения точки.

1. **Прямолинейное движение точки.** Так как для прямой линии $\rho = \infty$, то $\omega_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$, и, следовательно,

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_{\tau} = \frac{dv_{\tau}}{dt} \cdot \bar{\tau}. \quad (15.34)$$

При ускоренном движении направления ускорения и скорости совпадают, при замедленном — направлены в противоположные стороны. При равномерном прямолинейном движении точка движется с постоянной по величине скоростью и, следовательно, $\omega = 0$. Ускорение равно нулю и тогда, когда скорость достигает экстремальных значений.

Пусть, например, точка движется вдоль прямой — оси x по закону $x = a \sin \frac{\pi}{2} t$. Тогда $v_x = a \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} t$; $\omega_x = -a \frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi}{2} t$.

В моменты времени $t = 0, 2, \dots$; $|v| = |v_{\max}| = a \frac{\pi}{2}$ и $\omega = 0$.

2. **Равномерное криволинейное движение точки.** В рассматриваемом случае $\omega_{\tau} = \frac{dv_{\tau}}{dt} = 0$; $\omega_n = \frac{v^2}{\rho} \neq 0$, поэтому

$$\bar{\omega} = \frac{v^2}{\rho} \bar{n}. \quad (15.35)$$

Учитывая, что $v_{\tau} = \text{const}$, имеем* $ds = v dt$ и, следовательно,

$$s = s_0 + vt. \quad (15.36)$$

* См. примечание на стр. 216.

3. **Равнопеременное движение точки.** Равнопеременным движением точки называется такое, при котором проекция ускорения на касательную постоянна, т. е. $w_\tau = \frac{dv}{dt} = \text{const}$.

Уравнение равнопеременного движения. Из равенства $dv = w_\tau dt$ после интегрирования получаем $v = w_\tau t + C_1$, где $v = \frac{ds}{dt}$. Следовательно, $s = \frac{w_\tau t^2}{2} + C_1 t + C_2$.

Постоянные интегрирования определяются из начальных условий, а именно при $t=0$ $v=v_0=C_1$ и $s=s_0=C_2$.

Таким образом, при равнопеременном движении:

$$\left. \begin{aligned} v &= v_0 + w_\tau t; \\ s &= s_0 + v_0 t + \frac{w_\tau t^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (15.37)$$

Пусть $w_\tau > 0$. Тогда при $w_\tau > 0$ движение равноускоренное, при $w_\tau < 0$ — равнозамедленное, в последнем случае знаки проекций ускорения и скорости не совпадают.

Решая полученную систему уравнений (15.37), определяем из первого, что $w_\tau = \frac{v-v_0}{t}$, и, подставляя во второе, после преобразований получаем

$$s - s_0 = \frac{v_0 + v}{2} t. \quad (15.38)$$

Учитывая, что $t = \frac{v-v_0}{w_\tau}$, последнее (15.38) равенство можно записать в виде

$$s - s_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2w_\tau}. \quad (15.39)$$

При прямолинейном движении $w_n = 0$. При криволинейном $w_n = \frac{v^2}{\rho}$. При движении по окружности $w_n = \frac{v^2}{R}$, где R — радиус окружности.

Пример. Катер, который в дальнейшем принимаем за материальную точку, совершает циркуляцию по дуге радиусом $R=1000$ м с ускорением, проекция которого на касательную будет постоянна. В начале циркуляции $v_0=2$ м/с, в конце, через 4 мин, скорость стала равной 8 м/с. Определить величину ускорения в начале циркуляции и к концу 4-й минуты.

Решение. Определяем проекцию полного ускорения на касательную

$$w_\tau = \frac{v - v_0}{t} = \frac{8 - 2}{4 \cdot 60} = 0,025 \text{ м/с}^2.$$

Движение равноускоренное.

Вычисляем проекцию ускорения на главную нормаль соответственно в начале и в конце циркуляции:

$$w_{0n} = \frac{v_0^2}{R} = \frac{2^2}{1000} = 0,004 \text{ м/с}^2;$$

$$w_{1n} = \frac{v_1^2}{R} = \frac{8^2}{1000} = 0,064 \text{ м/с}^2.$$

Определяем модуль полного ускорения при $t=0$ и $t=4$ мин

$$w_{t=0} = \sqrt{(0,004)^2 + (0,025)^2} = 0,0255 \text{ м/с}^2;$$

$$w_{t=4} = \sqrt{(0,064)^2 + (0,025)^2} = 0,069 \text{ м/с}^2.$$

Кинематический способ определения радиуса кривизны траектории материальной точки

Часто по уравнениям движения материальной точки требуется определить не только ее траекторию, но и радиус кривизны траектории. Для этого можно воспользоваться формулой

$$w^2 = \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2 = w_\tau^2 + \frac{v^4}{\rho^2},$$

откуда $\rho^2 = \frac{v^4}{w^2 - w_\tau^2}$ или

$$\rho = \frac{v^2}{\sqrt{w^2 - w_\tau^2}}. \quad (15.40)$$

Значения v , w и w_τ определяются для каждого момента времени из уравнений движения.

Радиус кривизны плоской кривой можно также определить, используя формулу (11.31):

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{dt}{dx} \frac{d}{dt} \left[\frac{dy}{dt} \frac{dx}{dt}\right]}.$$

После простейших преобразований

$$\rho = \frac{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} = \frac{v^3}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} = \frac{v^3}{v_x w_y - v_y w_x}. \quad (15.41)$$

Пример*. Снаряд движется в вертикальной плоскости в соответствии с уравнениями $x=300t$ и $y=400t-5t^2$ (x и y в метрах, t в секундах). Определить скорость и ускорение снаряда в начальный момент времени, высоту и дальность его полета и радиус кривизны траектории в начальной и наивысшей точках.

Решение. Определяем величину скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{300^2 + (400 - 10t)^2}.$$

* И. В. Мещерский. Сборник задач по теоретической механике.

где

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 300 \text{ м/с}; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = 400 - 10t;$$

при $t = 0$ $v_0 = \sqrt{300^2 + 400^2} = 500 \text{ м/с}$.

Определяем величину ускорения

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{(0)^2 + (-10)^2} = 10 \text{ м/с}^2 = \text{const},$$

где

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} = 0; \quad w_y = \frac{dv_y}{dt} = -10 \text{ м/с}^2.$$

Вычисляем дальность и высоту полета снаряда.

При падении на Землю $y = 400t - 5t^2 = 0$, откуда $t_1 = 0$; $t_2 = 80 \text{ с}$. Время t_1 соответствует моменту выстрела, t_2 — падению на Землю.

При этом $x_{\text{наиб}} = 300 \cdot 80 = 24000 \text{ м} = 24 \text{ км}$. Вычисляем наибольшую высоту. В наивысшей точке $v_y = 0$ или $400 - 10t = 0$, откуда $t = 40 \text{ с}$ и, следовательно, $y_{\text{max}} = 400 \cdot 40 - 5 \cdot 40^2 = 8000 \text{ м} = 8 \text{ км}$.

Определяем радиус кривизны, используя формулу

$$\rho = \frac{v^2}{\sqrt{w^2 - w_\tau^2}}, \quad \text{где } w_\tau = \frac{v_x w_x + v_y w_y}{v};$$

при $t = 0$

$$w_\tau = \frac{300 \cdot 0 + (400 - 10 \cdot 0) \cdot (-10)}{500} = -8 \text{ м/с}^2;$$

$$\rho = \frac{500^2}{\sqrt{10^2 - (-8)^2}} = 41670 \text{ м} = 41,67 \text{ км};$$

при $t = 40 \text{ с}$

$$w_\tau = \frac{300 \cdot 0 + (400 - 10 \cdot 40) \cdot (-10)}{\sqrt{300^2 + (400 - 10 \cdot 40)^2}} = 0;$$

$$\rho = \frac{300^2}{\sqrt{10^2 - 0}} = 9000 \text{ м} = 9 \text{ км}.$$

КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

В кинематике твердого тела требуется:

— установить уравнения, с помощью которых можно задать положение твердого тела по отношению к выбранной системе отсчета;

— определить кинематические характеристики твердого тела и в отдельности каждой его точки (траекторию, скорость и ускорение).

§ 76. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Поступательным движением твердого тела называется такое, при котором прямая, соединяющая любые две точки тела, во время его движения остается параллельной ее первоначальному направлению. Примерами поступательного движения твердого тела могут служить: движение платформы по горизонтальному пути, движение подводной лодки при погружении, когда $A_1B_1 \parallel AB$, как это показано на рис. 16.1, а, движение стержня AB , соединяющего кривошип $OA = O_1B$ (рис. 16.1, б), движение стрелки магнитного компаса в однородном магнитном поле и т. д.

Теорема. При поступательном движении твердого тела все его точки описывают тождественные (конгруэнтные*) траектории и в любой момент времени имеют геометрически равные между собой скорости и ускорения. Докажем это.

Обозначим:

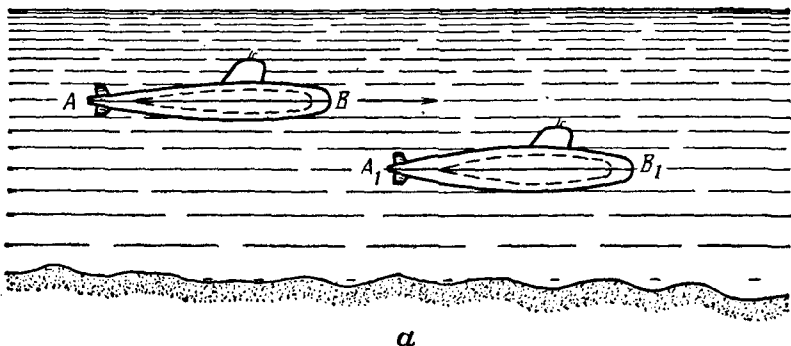
O — неподвижный полюс;

$\overline{OA} = \overline{r_0}$ — радиус-вектор точки A тела;

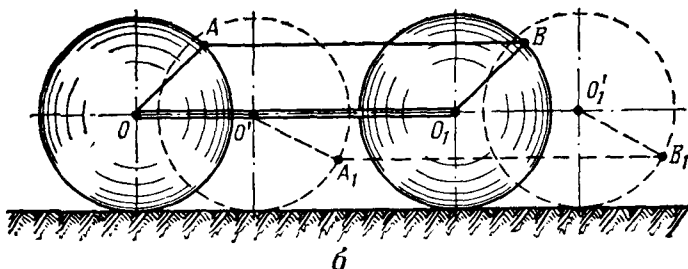
$\overline{OB} = \overline{r}$ — радиус-вектор точки B тела;

$\overline{AB} = \overline{r_1}$ — радиус-вектор точки B относительно точки A тела.

* Конгруэнтными называются такие кривые, которые при наложении совпадают всеми соответствующими своими точками.



a



b

Рис. 16.1.

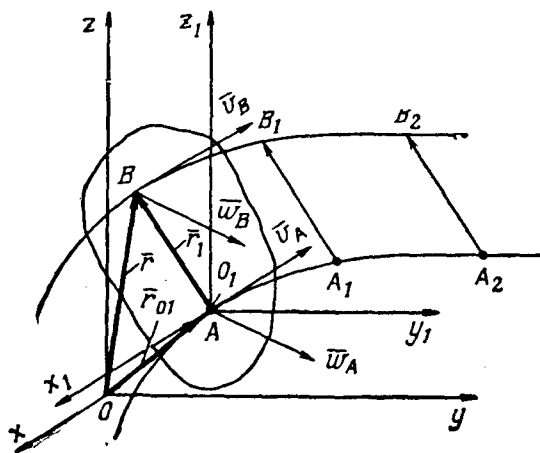


Рис. 16.2.

При поступательном движении абсолютно твердого тела $\vec{r}_1 = \text{const}$ как по модулю, так и по направлению, следовательно, $\frac{d\vec{r}_1}{dt} = 0$. Из рис. 16.2 видно, что для любого момента времени

$$\vec{r} = \vec{r}_{01} + \vec{r}_1. \quad (16.1)$$

Если соединить точки $A_1, A_2, A_3 \dots$ и точки $B_1, B_2, B_3 \dots$, то получим соответствующие траектории точек A и B . Сместим нижнюю траекторию так, чтобы ее наложить на верхнюю. Тогда в соответствии с (16.1) каждая точка нижней траектории совпадет с соответствующей точкой верхней, так как все они смещены на постоянный по величине и направлению радиус-вектор \vec{r}_1 . Дифференцируя равенство (16.1) по времени, получаем

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{01}}{dt} + \frac{d\vec{r}_1}{dt},$$

откуда, учитывая, что $\vec{r}_1 = \text{const}$,

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A, \quad (16.2)$$

где

$$\vec{v}_B = \frac{d\vec{r}}{dt}; \quad \vec{v}_A = \frac{d\vec{r}_{01}}{dt}; \quad \vec{v}_{BA} = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = 0.$$

Следовательно, в любой момент времени скорости двух любых точек твердого тела, движущегося поступательно, геометрически равны между собой.

Дифференцируя (16.2) по времени, получим

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{d\vec{v}_B}{dt} \quad (16.3)$$

или

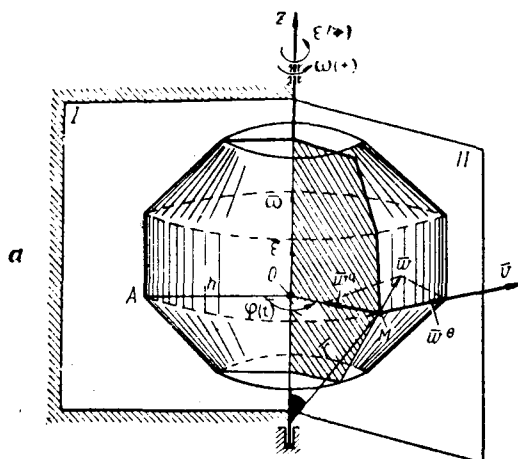
$$\vec{w}_A = \vec{w}_B,$$

т. е. и ускорения точек твердого тела, движущегося поступательно, в любой момент времени геометрически равны между собой. Таким образом, для того чтобы знать кинематические характеристики (перемещение, скорость и ускорение) твердого тела, движущегося поступательно, необходимо и достаточно знать движение любой одной точки твердого тела.

§ 77. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Если при движении твердого тела в данной системе отсчета две точки его неподвижны, то и все точки, лежащие на прямой, соединяющей эти две точки, будут неподвижными. Прямая, проходящая через неподвижные точки, называется неподвижной осью вращения.

Движение твердого тела, имеющего неподвижную ось вращения, называется вращательным. Траектории всех точек тела, не лежащих на оси вращения, являются концентрическими окружностями, центры которых лежат на оси вращения, а плоскости концентрических окружностей перпендикулярны ей. Радиус каждой окружности равен расстоянию соответствующей точки тела до оси вращения.



Вид сверху на траекторию точки M

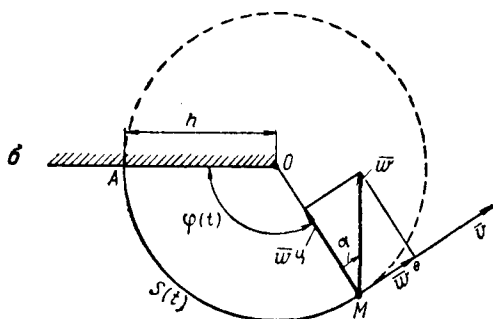


Рис. 16.3.

Проведем через ось вращения z две плоскости: I — неподвижную в пространстве и II — связанную с телом (рис. 16.3, а, б). Тогда положение твердого тела в пространстве может быть полностью определено для любого момента времени с помощью задания линейного угла $\varphi(t)$, измеряющего двугранный угол между плоскостями I и II . Линейный угол $\varphi(t)$ называется угловой координатой тела в данной системе отсчета. За положительное направление угла φ принимаем такое, которое отсчитывается от неподвижной плоскости против хода часовой стрелки, если смотреть на тело с положительного направления оси z . Угло-

вая координата тела изменяется с течением времени, следовательно,

$$\varphi = \varphi(t). \quad (16.4)$$

Будем считать $\varphi(t)$ непрерывной, однозначной, дважды дифференцируемой функцией времени. Уравнение (16.4) является уравнением вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Угловая скорость. Пусть угловые координаты тела, соответствующие двум моментам времени t и $t + \Delta t$, будут φ и $\varphi + \Delta\varphi$. Средней угловой скоростью тела за промежуток времени Δt называется отношение $\omega_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$.

Предел, к которому стремится $\omega_{\text{ср}}$ при $\Delta t \rightarrow 0$, называется истинной угловой скоростью или угловой скоростью в данный момент времени

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (16.5)$$

Угловая скорость — пространственно-временная характеристика вращательного движения твердого тела.

Единица измерения угловой скорости — 1 рад/с.

Введем в рассмотрение вектор угловой скорости. Направим, например, ось oz (рис. 16.3, а) по оси вращения. Тогда

$$\vec{\omega} = \vec{k}\omega,$$

где ω — алгебраическое значение угловой скорости, \vec{k} — орт.

Вектор угловой скорости направлен по оси вращения твердого тела в ту сторону, откуда вращение твердого тела представляется происходящим против хода часовой стрелки. Так, например, Земля вращается с запада на восток с угловой скоростью $\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 72,7 \cdot 10^{-6}$ рад/с. Вектор угловой скорости Земли должен быть направлен по оси вращения от Южного к Северному полюсу.

Начало вектора $\vec{\omega}$ можно выбирать в любой точке оси вращения тела. Следовательно, $\vec{\omega}$ является скользящим вектором. Если векторы $\vec{\omega}$ и \vec{k} совпадают по направлению, то $\omega > 0$, если направлены в противоположные стороны, $\omega < 0$.

Угловое ускорение. Угловая скорость в общем случае с течением времени изменяется. Пусть угловая скорость в моменты времени t и $t + \Delta t$ будет соответственно ω и $\omega + \Delta\omega$. Тогда отношение $\epsilon_{\text{ср}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ называется средним угловым ускорением за промежуток времени Δt . Предел, к которому стремится $\epsilon_{\text{ср}}$ при $\Delta t \rightarrow 0$, называется угловым ускорением твердого тела в данный момент времени

$$\epsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}. \quad (16.6)$$

Угловое ускорение характеризует быстроту изменения угловой скорости тела, совершающего вращательное движение вокруг неподвижной оси.

Единица измерения углового ускорения — рад/с². Когда знаки ω и ϵ совпадают ($\omega\epsilon > 0$), вращательное движение будет ускоренным, если знаки ω и ϵ не совпадают ($\omega\epsilon < 0$), — замедленным.

Вектором углового ускорения называется вектор, равный

$$\bar{\epsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{k}\epsilon, \quad (16.7)$$

где ϵ — алгебраическая величина углового ускорения.

В рассматриваемом случае вектор $\bar{\epsilon}$ направлен также по оси вращения и является скользящим. При ускоренном вращении направления $\bar{\omega}$ и $\bar{\epsilon}$ совпадают, при замедленном — направлены противоположно, а их скалярные величины ω и ϵ противоположны по знаку.

Пример. Уравнение вращения гребного винта задано в виде

$$\varphi = 2t^3 - 6t^2 + 12t \text{ рад.}$$

Определить угловую скорость и угловое ускорение винта, а также характер вращения в моменты времени $t_0=0$ с; $t_1=1$ с; $t_2=2$ с.

Решение. Определяем алгебраическую величину угловой скорости в соответствии с формулой (16.5)

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 6t^2 - 12t + 12 \text{ рад/с.}$$

Находим алгебраическую величину углового ускорения в соответствии с формулой (16.6)

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = 12t - 12 \text{ рад/с}^2.$$

Исследуем характер вращения в заданные моменты времени:

$t = 0$; $\omega = 12$ рад/с; $\epsilon = -12$ рад/с²; $\omega\epsilon < 0$ — вращение замедленное;

$t = 1$ с; $\omega = 6$ рад/с; $\epsilon = 0$ — угловая скорость наименьшая ($\frac{d\epsilon}{dt} = 12 > 0$);

$t = 2$ с; $\omega = 12$ рад/с; $\epsilon = 12$ рад/с²; $\omega\epsilon > 0$ — вращение ускоренное.

Частные случаи вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

Равномерное вращение. Равномерным вращением называется такое, при котором угловая скорость вращения тела постоянна. Тогда

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega = \text{const.}$$

Интегрируя последнее равенство, получим

$$\varphi = \omega t + C,$$

где C — постоянная интегрирования, которая определяется из начальных условий. Если при $t=0$ $\varphi = \varphi_0$, то

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \quad (16.8)$$

Часто значение угловой скорости равномерного вращения характеризуют числом оборотов в минуту (n об/мин). Тогда, учитывая, что один оборот соответствует 2π радиан:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \text{ рад/с} \approx 0,1n \text{ рад/с}. \quad (16.9)$$

При знакостоянной угловой скорости суммарный угол поворота тела при $\varphi_0=0$ будет

$$\varphi_{\Sigma} = \omega t = \frac{\pi n}{30} t \text{ рад}. \quad (16.10)$$

Так, если ротор гироскопа — прибора, получившего широкое применение на флоте, вращается с $n=18\,000$ об/мин, то величина угловой скорости будет равна

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi 18000}{30} = 600\pi \text{ рад/с}.$$

За $t=15$ с угол поворота ротора составит

$$\varphi_{\Sigma} = |\omega| \cdot t = 600\pi \cdot 15 = 9000\pi \text{ рад (4500 оборотов)}.$$

Равнопеременное вращение. Равнопеременным вращением называется такое, при котором угловое ускорение постоянно, т. е. $\varepsilon = \text{const}$. Найдем уравнение вращения твердого тела, учитывая, что

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon = \text{const}.$$

Интегрируя полученное уравнение, получим

$$\omega = \varepsilon t + C_1.$$

Учитывая, что $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ или $d\varphi = \omega dt$, после интегрирования получим

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяем из начальных условий. Если при $t=0$ $\omega = \omega_0$, то $C_1 = \omega_0$;

$$\varphi = \varphi_0, \text{ тогда } C_2 = \varphi_0.$$

Следовательно, для равнопеременного вращения:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \varepsilon t; \\ \varphi &= \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (16.11)$$

Из первого уравнения системы (16.11) следует, что

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t}. \quad (16.12)$$

Подставляем значение ε из (16.12) во второе уравнение системы (16.11):

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{(\omega - \omega_0) t^2}{2t} = \varphi_0 + \frac{\omega_0 + \omega}{2} t$$

или, учитывая, что $\frac{\omega_0 + \omega}{2} = \omega_{\text{ср}}$ — средняя угловая скорость за промежуток времени, равный t , получим

$$\varphi - \varphi_0 = \omega_{\text{ср}} \cdot t. \quad (16.13)$$

При решении задач удобно пользоваться формулой, определяющей угол поворота, в которую не входит время t . Для этого из (16.12) выразим $t = \frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon}$, а затем значение t подставим в (16.13).

Тогда

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon}. \quad (16.14)$$

Формулами (16.11), (16.13) и (16.14) можно пользоваться только для равнопеременного вращательного движения. Угловая координата φ не соответствует суммарному углу поворота φ_{Σ} в том случае, когда направление вращения твердого тела вокруг неподвижной оси изменяется с течением времени, например в случае крутильных колебаний. Суммарный угол поворота тогда будет определяться по формуле

$$\varphi_{\Sigma} = |\varphi_2 - \varphi_1| + |\varphi_3 - \varphi_2| + |\varphi_4 - \varphi_3| + \dots, \quad (16.15)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ — значения угловой координаты в моменты времени t_1, t_2, \dots , когда угловая скорость изменяет свой знак, т. е. когда $\omega = 0$.

Пример. В начале маневрирования подводной лодки гребной винт вращался с числом оборотов $n_0 = 180$ об/мин, в конце — $n_1 = 120$ об/мин. Учитывая, что маневрирование продолжалось 20 с, определить угловое ускорение винта и число его оборотов за период маневрирования, если считать вращение винта равнопеременным.

Решение. Определяем угловое ускорение, используя формулу (16.12):

$$\varepsilon = \frac{\omega_1 - \omega_0}{t} = \frac{4\pi - 6\pi}{20} = -0,1\pi \text{ рад/с}^2,$$

где

$$\omega_0 = \frac{\pi n_0}{30} = \frac{\pi 180}{30} = 6\pi \text{ рад/с};$$

$$\omega_1 = \frac{\pi n_1}{30} = \frac{\pi 120}{30} = 4\pi \text{ рад/с}.$$

Таким образом, вращение равнозамедленное ($\varepsilon < 0$).

Вычисляем суммарный угол поворота гребного винта за 20 с, который при неизменном направлении вращения равен

$$\varphi = \varphi_{\Sigma} = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} = 0 + 6\pi \cdot 20 - \frac{0,1 \cdot \pi \cdot 20^2}{2} = 100\pi \text{ рад (50 оборотов)}.$$

Пример. В надводном положении бортовая качка подводной лодки на спокойной воде совершается в соответствии с уравнением $\varphi = \frac{\pi}{20} \cos \frac{\pi t}{10}$ рад.

Определить угловую скорость и ускорение, максимальную угловую амплитуду φ_{\max} и моменты времени, когда величина амплитуды наибольшая. Установить, в какие промежутки времени вращательное движение подводной лодки ускоренное и когда замедленное, а также определить угол поворота φ_{Σ} за 20 с.

Решение. Определяем, что максимальное отклонение (φ_{\max}) = $\frac{\pi}{20}$ рад будет тогда, когда $\left| \cos \frac{\pi t}{10} \right| = 1$. Для соблюдения этого условия необходимо, чтобы $\frac{\pi t}{10} = 0, \pi, 2\pi, \dots, m\pi$, где m — целое число, что соответствует моментам времени $t=0, t_1=10 \text{ с}, \dots, t_m=10m$ с. Находим значение угловой скорости ω и углового ускорения ε :

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\pi^2}{200} \sin \frac{\pi t}{10}; \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{\pi^3}{2000} \cos \frac{\pi t}{10}.$$

При наибольших отклонениях в моменты $t_m=10 \text{ мс}$ угловая скорость $\omega=0$, а модуль углового ускорения будет максимальным

$$|\varepsilon_{\max}| = \frac{\pi^3}{2000} \text{ рад/с}^2.$$

Угловая скорость будет иметь наибольшее значение в моменты времени $t_0=5 \text{ с}, t_1=5+10=15 \text{ с}, \dots, t_m=5(2m+1) \text{ с}$, где $m=1, 2, 3, \dots$

Итак, при $0 < t < 5$ с ω и ε имеют одинаковый знак ($\omega\varepsilon > 0$) — движение ускоренное, при $5 < t < 10$ с ω и ε имеют разные знаки — вращение замедленное ($\omega\varepsilon < 0$). Через 20 с подводная лодка возвращается в первоначальное положение.

Угол поворота φ_{Σ} за 20 с качки будет равен

$$\varphi_{\Sigma} = |\varphi_1 - \varphi_0| + |\varphi_2 - \varphi_1| = \left| -\frac{\pi}{20} - \frac{\pi}{20} \right| + \left| \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{20} \right| = \frac{\pi}{5} \text{ рад}.$$

§ 78. СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ ТОЧЕК ТЕЛА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси произвольная точка тела M , удаленная на расстояние h от оси вращения, движется по дуге окружности. При этом дуговая координата этой точки равна

$$s = h\varphi,$$

где $\varphi = \varphi(t)$ — угловая координата твердого тела.

Численное значение скорости, равное проекции скорости на касательную, будет

$$v_{\tau} = \frac{ds}{dt} = h \frac{d\varphi}{dt} = h\omega, \quad (16.16)$$

Выберем в любой точке, лежащей на оси вращения, неподвижный полюс O — начало радиуса-вектора $\vec{r}(t)$ точки M , при этом $h = r \sin \alpha$, где α — угол между осью вращения и радиусом-вектором (рис. 16.4, а, б). Покажем, что скорость точки M можно выразить в виде векторного произведения (векторной формулы Эйлера)

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (16.17)$$

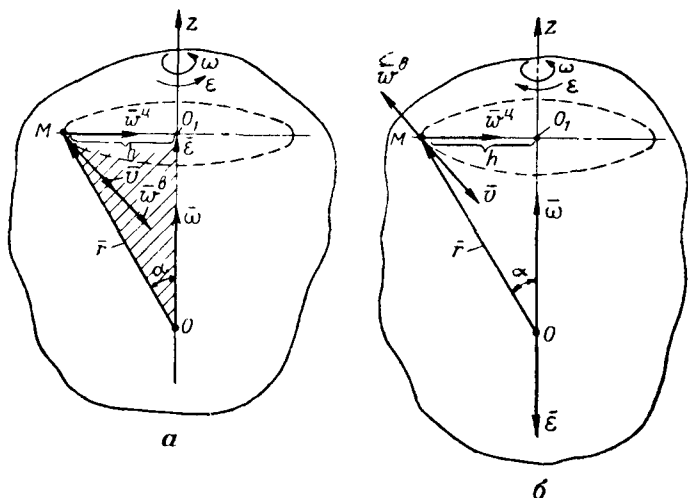


Рис. 16.4.

Действительно, по модулю $|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin \alpha = |\vec{\omega}| \cdot h = v$, т. е. равно модулю скорости. С другой стороны, вектор $\vec{\omega} \times \vec{r}$ перпендикулярен плоскости OO_1M , в которой расположены $\vec{\omega}$ и \vec{r} , и направлен так, что если смотреть с его конца, то поворот $\vec{\omega}$ к \vec{r} в сторону меньшего угла происходит против хода часовой стрелки. Следовательно, вектор $\vec{\omega} \times \vec{r}$ направлен так же, как и вектор \vec{v} (рис. 16.4, а, б). Таким образом, векторное равенство (16.17) справедливо. В соответствии с определением ускорение точки M равно

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt},$$

но

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}; \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}.$$

Тогда $\vec{w} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$

или

$$\vec{w} = \vec{w}^B + \vec{w}^U, \quad (16.18)$$

где $\vec{\varepsilon} \times \vec{r} = \vec{\omega}^B$ — вращательная составляющая полного ускорения; при ускоренном вращении $\vec{\omega}^B$ совпадает по направлению со скоростью \vec{v} точки M ; $\vec{\omega}^u = \vec{\omega} \times \vec{v}$ — центростремительное (о с е с т р е м и т е л ь н о е) ускорение точки — составляющая полного ускорения, направленная перпендикулярно к оси вращения.

Модули вращательного и центростремительного ускорений будут равны:

$$\omega^B = |\vec{\varepsilon} \times \vec{r}| = |\varepsilon| r \sin(\hat{\varepsilon}, \hat{r}) = |\varepsilon| \cdot h;$$

$$\omega^u = |\vec{\omega} \times \vec{v}| = |\omega| |\omega v| \sin(\hat{\omega}, \hat{v}),$$

где $\sin(\hat{\omega}, \hat{v}) = 1$, а $h = R$ — радиус окружности — траектории рассматриваемой точки M твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Таким образом, при вращательном движении твердого тела вокруг неподвижной оси вращательная составляющая ускорения точки твердого тела совпадает с касательным ускорением, а центростремительная — с нормальным:

$$\left. \begin{aligned} \omega^B &= \omega_\tau = |\varepsilon| \cdot h; \\ \omega^u &= \omega_n = \omega^2 h. \end{aligned} \right\} \quad (16.19)$$

Очевидно, модуль полного ускорения точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, будет равен

$$\omega = \sqrt{(\omega^u)^2 + (\omega^B)^2}$$

или

$$\omega = h \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (16.20)$$

Угол между вектором ускорения $\vec{\omega}$ и составляющей $\vec{\omega}^u$ ускорения (или то же, что и радиусом вращения точки твердого тела, рис. 16.3, б) определяется из равенства

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega^B}{\omega^u} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (16.21)$$

Вывод. Скорость \vec{v} и ускорение $\vec{\omega}$ любой точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, прямо пропорциональны расстоянию от этой точки до оси вращения.

Вектор полного ускорения любой точки твердого тела в данный момент времени направлен под определенным (для всех точек тела одинаковым) углом α к радиусу соответствующей точки.

В случае равномерного вращения при $\omega = \text{const}$ модуль ускорения любой точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, тоже постоянен и равен

$$\omega = \omega^u = h\omega^2.$$

Пример. После пуска угловая координата ротора газовой турбины изменялась по закону $\varphi = kt^3$ рад, где k — постоянный коэффициент. Через 20 с ротор вращался с $n = 6000$ об/мин. Определить угловую координату, угловое ускорение ротора, вращательное и центростремительное ускорения точки лопатки ротора, отстоящей на расстояние $h = 20$ см от оси вращения, через 20 с после начала вращения.

Решение. Определяем коэффициент k в уравнении вращения, для чего сначала определяем ω :

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 3kt^2 \text{ рад/с.} \quad (*)$$

Известно, что при $t = 20$ с $\omega|_{t=20} = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 6000}{30} = 200\pi$ рад/с.

Подставляем ее значение в (*), получаем

$$200\pi = 3k \cdot 20^2,$$

откуда $k = \frac{200\pi}{3 \cdot 20^2} = \frac{\pi}{6}$ рад/с³.

Следовательно,

$$\varphi = \frac{\pi}{6} t^3 \text{ рад; } \omega = \frac{\pi}{2} t^2 \text{ рад/с.}$$

Через 20 с после пуска угловая координата ротора турбины, равная суммарному углу поворота, определяется из равенства

$$\varphi = \varphi_{\Sigma} = \frac{\pi}{6} \cdot 20^3 = 1,33 \cdot 10^3 \pi \text{ рад } (\approx 666 \text{ оборотов}).$$

Вычисляем величину углового ускорения ротора при $t = 20$ с

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 6kt = \pi t \text{ рад/с}^2; \varepsilon|_{t=20} = 20\pi \text{ рад/с}^2.$$

Определяем величины: скорость и составляющие ускорения искомой точки лопатки ротора к концу 20-й секунды:

$$v = h|\omega| = h \frac{\pi}{2} t^2 = 10\pi t^2; v|_{t=20} = 10\pi \cdot 20^2 = 4000\pi \text{ см/с} = 40\pi \text{ м/с};$$

$$\omega^B = h|\varepsilon| = h\pi t = 20\pi t; \omega^B|_{t=20} = 20\pi \cdot 20 = 400\pi \text{ см/с}^2 = 4\pi \text{ м/с}^2;$$

$$\omega^H = h\omega^2 = h \frac{\pi^2 t^4}{4} = 5\pi^2 t^4; \omega^H|_{t=20} = 5\pi^2 \cdot 20^4 = 8\pi^2 \cdot 10^5 \text{ см/с}^2 = 8\pi^2 \cdot 10^3 \text{ м/с}^2.$$

§ 79. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

Пусть тело движется так, что во все время движения одна точка его будет оставаться неподвижной. Такое движение называется движением твердого тела с одной неподвижной точкой.

К телам, имеющим одну неподвижную точку, могут быть отнесены стержень, закрепленный с одного конца с помощью сферического шарнира, ротор гироскопа в кардановом подвесе или шарнир Гука, у которых неподвижная точка совпадает с точкой пересечения трех его осей, волчок и т. д.

Если взять любую точку M твердого тела (рис. 16.5), находящуюся на каком-либо расстоянии OM от неподвижной точки O , то

в любой момент времени, как бы тело ни поворачивалось, длина OM останется неизменной, т. е. точка M будет перемещаться по некоторой сфере. Вот почему движение твердого тела с одной неподвижной точкой иногда называют сферическим движением.

Проведем в пространстве неподвижную систему координат $Oxyz$ и подвижную $Ox_1y_1z_1$, связанную с телом и имеющих общее начало, совпадающее с неподвижной точкой O твердого тела. Плоскость Oxy пересекается с плоскостью Ox_1y_1 .

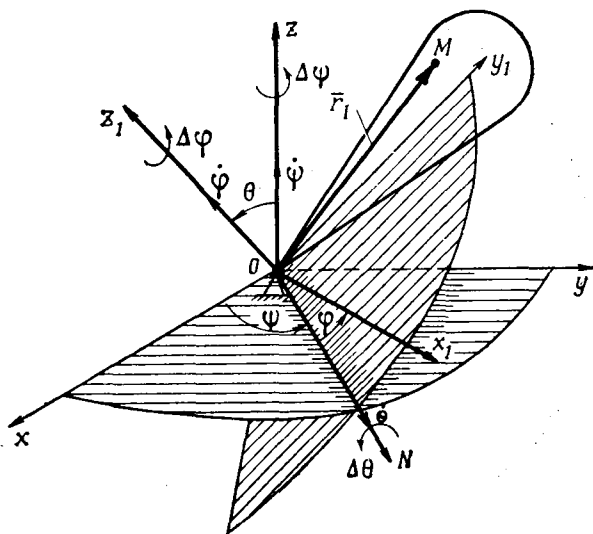


Рис. 16.5.

Линия пересечения ON этих плоскостей называется линией узлов (рис. 16.5).

Угол ϕ между осью x и линией узлов ON называется углом прецессии.

Угол φ между ON и осью Ox_1 называется углом собственного поворота (углом ротации).

Угол θ между осями Oz и Oz_1 называется углом нутации.

Углы φ , ψ и θ называются углами Эйлера. При движении тела каждый из них является непрерывной однозначной функцией времени. Поэтому уравнениями движения твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, будут:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= f_1(t); \\ \psi &= f_2(t); \\ \theta &= f_3(t). \end{aligned} \right\} \quad (16.22)$$

Положительное направление отсчета углов Эйлера производится от осей Ox , ON и Oz против хода часовой стрелки и представлено на рисунке 16.5. Можно показать, что положение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку в пространстве, может

быть задано с помощью трех независимых уравнений Эйлера (16.22).

Действительно, пусть в начальный момент времени системы осей неподвижной $Oxyz$ и связанной с телом $Ox_1y_1z_1$ совпадают. Тогда новое положение осей $Ox_1y_1z_1$ в момент времени t может быть получено путем трех поворотов на углы:

— угол ϕ вокруг оси Oz , при этом определяют положение оси узлов ON ;

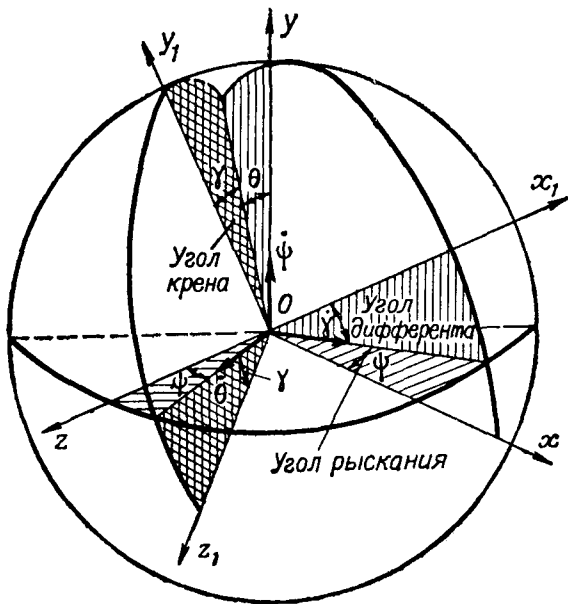


Рис. 16.6.

— угол θ вокруг оси узлов, при этом определяют положение оси Oz_1 ;

— угол φ вокруг оси Oz_1 , при этом определяют положение оси Ox_1 .

Ось Oy_1 образует с осями Ox_1 и Oz_1 правую систему координат.

Таким образом, положение подвижной системы координат определено.

Частные случаи:

1. $\varphi = \text{const}$; $\psi = \text{const}$; $\theta = f_3(t)$ — тело вращается вокруг ON .

2. $\varphi = \text{const}$; $\theta = \text{const}$; $\psi = f_2(t)$ — тело вращается вокруг Oz .

3. $\theta = \text{const}$; $\psi = \text{const}$; $\varphi = f_1(t)$ — тело вращается вокруг Oz_1 .

В ряде случаев вводят другие углы, определяющие положение тела с одной неподвижной точкой. Так, академик А. Н. Крылов для определения положения корабля относительно его центра тяжести ввел три других независимых угла: угол дифферента, угол рыскания и угол крена.

Пусть начало неподвижной прямоугольной системы координат $Oxyz$ совпадает с центром тяжести корабля, а система $Ox_1y_1z_1$

связана с кораблем, причем ось Ox_1 направлена от кормы в нос. Направление других осей координат представлено на рис. 16.6, на котором и показаны соответствующие углы: ϕ — рыскания, θ — дифферента и γ — угол крена. В этом случае уравнения движения твердого тела с одной неподвижной точкой будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \theta &= f_1(t); \\ \phi &= f_2(t); \\ \gamma &= f_3(t). \end{aligned} \right\} \quad (16.23)$$

§ 80. ТЕОРЕМА ДАЛАМБЕРА—ЭЙЛЕРА. УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ И УГЛОВОЕ УСКОРЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ

Положение свободного твердого тела в пространстве будет задано в любой момент времени, если будут известны положения трех его точек, не лежащих на одной прямой. Для тела, имеющего одну неподвижную точку O , достаточно знать положение двух других его точек. Обозначим (рис. 16.7) эти точки буквами A и B и будем полагать, что $OA=OB$, т. е. эти точки A и B перемещаются по поверхности одной сферы.

Теорема Даламбера—Эйлера. Любое перемещение твердого тела с одной неподвижной точкой O из одного положения в любое другое может быть осуществлено одним поворотом вокруг некоторой неподвижной оси, проходящей через неподвижную точку.

Доказательство. Соединяем точки A и B дугой большого

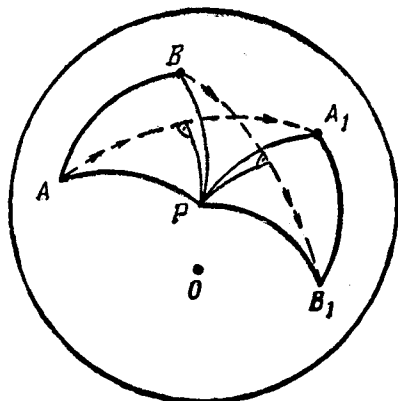


Рис. 16.7.

круга \overline{AB} , которая определяет положение твердого тела, имеющего неподвижную точку. Рассмотрим два положения тела: начальное AB и конечное A_1B_1 . Соединяем точки A с A_1 , B с B_1 (на рис. 16.7 пунктиром) дугами больших кругов*. Из средин дуг AA_1 и BB_1 проводим дуги, перпендикулярные $\overline{AA_1}$ и соответственно $\overline{BB_1}$. Они пересекаются в точке P . Сферические треугольники ABP и A_1B_1P равны и сходственно расположены. Действительно, $\overline{AB}=\overline{A_1B_1}$ по заданию, а $\overline{AP}=\overline{A_1P}$ и $\overline{BP}=\overline{B_1P}$ по по-

* Дуга большого круга — дуга, образуемая пересечением сферической поверхности плоскостью, проходящей через центр сферы; она является линией кратчайшего расстояния между точками сферы аналогично прямой линии, соединяющей точки на плоскости.

строению как сферические наклонные от основания сферических перпендикуляров. Следовательно, у сферических треугольников ABP и A_1B_1P $\angle APB = \angle A_1PB_1$, и сферический треугольник APB может быть совмещен с A_1PB_1 одним поворотом на угол APA_1 , равный углу BPB_1 , вокруг оси, проходящей через точку P и неподвижную точку O тела. Ось OP называется осью конечного поворота. Теорема доказана.

Рассмотрим два положения твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, в моменты времени t и $t + \Delta t$. Действительный переход тела из положения I в положение II заменяем равномерным вращением вокруг оси конечного поворота с угловой скоростью $\omega_{\text{ср}}$, происходящим в течение того же промежутка времени Δt , как и при действительном перемещении. Таким образом, начальное и конечное положения в действительности и при эквивалентном равномерном вращении будут совпадать, а различия в промежуточных положениях будут тем меньше, чем меньше промежутки времени Δt .

Эти различия, а следовательно, и погрешности можно устремить к нулю при предельном переходе, т. е. при $\Delta t \rightarrow 0$. При уменьшении Δt положение оси конечного поворота изменяется. Предельное положение этой оси при $\Delta t \rightarrow 0$ называют мгновенной осью вращения, а предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\omega}_{\text{ср}} = \bar{\omega}$$

мгновенной угловой скоростью. Вектор мгновенной угловой скорости $\bar{\omega}$ направлен по мгновенной оси вращения в сторону, откуда вращение тела видно происходящим против хода часовой стрелки. С течением времени положение мгновенной оси вращения в пространстве изменяется (рис. 16.8). Следовательно, вектор $\bar{\omega}$ изменяется не только по величине, но и по направлению. Угловым ускорением $\bar{\epsilon}$ называется векторная величина, равная

$$\bar{\epsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}. \quad (16.24)$$

Проведем вектор $\bar{\omega}$ в произвольный момент времени. Обозначим конец вектора $\bar{\omega}$ буквой M . С течением времени M , двигаясь в пространстве, опишет кривую — годограф вектора $\bar{\omega}$. Обозначим радиус-вектор точки M (рис. 16.9) через $\bar{r} = \bar{\omega}$. Тогда

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{u} \quad \text{и} \quad \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\epsilon}. \quad (16.25)$$

Следовательно, угловое ускорение $\bar{\epsilon}$ геометрически равно линейной скорости \bar{u} конца вектора угловой скорости, т. е.

$$\bar{\epsilon} = \bar{u}. \quad (16.26)$$

Векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{\epsilon}$ скользящие. Начало векторов $\bar{\omega}$ и $\bar{\epsilon}$ выбираем в неподвижной точке O твердого тела.

При сферическом движении твердого тела вектор $\bar{\epsilon}$ в зависимости от характера движения может составлять с вектором $\bar{\omega}$ любой угол (рис. 16.9).

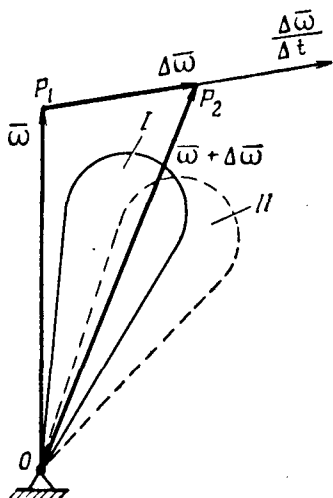


Рис. 16.8.

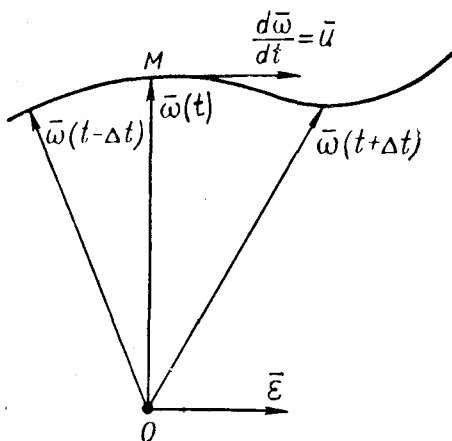


Рис. 16.9.

§ 81. ЛИНЕЙНАЯ СКОРОСТЬ И ЛИНЕЙНОЕ УСКОРЕНИЕ ТОЧЕК ТВЕРДОГО ТЕЛА С ОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

Рассмотрим твердое тело с одной неподвижной точкой O и на нем точку M , положение которой задано радиусом-вектором \bar{r} (рис. 16.10). Вектор линейной скорости точки M определяется по равенству (16.17)

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}.$$

Модуль скорости

$$v = |\omega| r \sin(\bar{\omega}, \bar{r}) = |\omega| \cdot r \sin \alpha = |\omega| h_{\omega}, \quad (16.27)$$

где h_{ω} — длина перпендикуляра, опущенного из точки M на мгновенную ось вращения.

Вектор скорости направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\bar{\omega}$ и \bar{r} так, чтобы, глядя с его конца (рис. 16.10, а), вращение $\bar{\omega}$ до совпадения с \bar{r} происходило в сторону меньшего угла против хода часовой стрелки.

Из формулы (16.27) следует важный практический вывод, а именно: если в какой-то момент времени известны положение мгновенной оси вращения и линейная скорость какой-либо точки M

тела, то величина мгновенной угловой скорости тела может быть определена из равенства

$$\omega = \frac{v_M}{h_\omega^M}, \quad (16.28)$$

где h_ω^M — расстояние от точки M до мгновенной оси вращения.

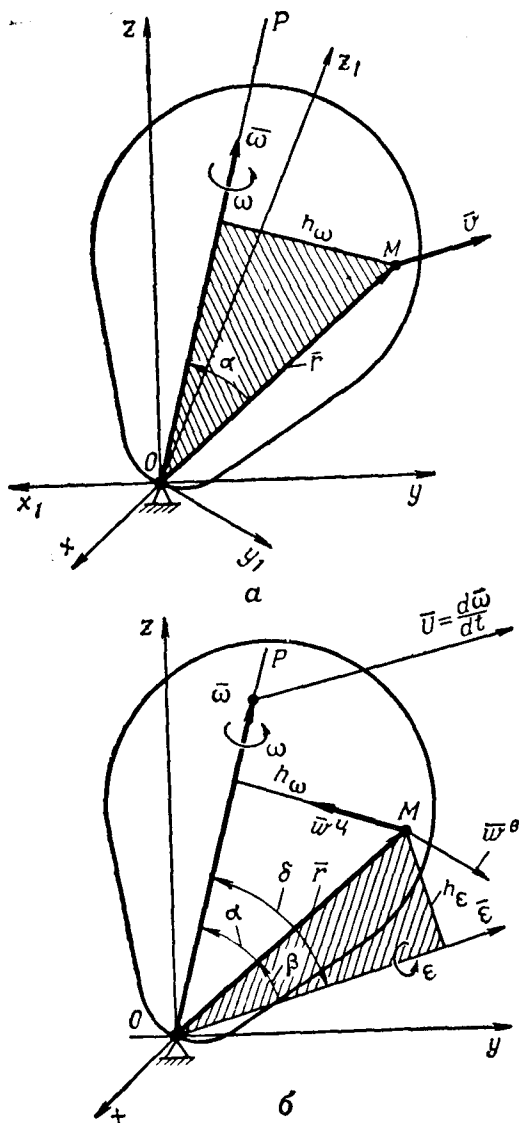


Рис. 16.10.

Модуль скорости любой другой точки (A) твердого тела будет равен

$$v_A = |\omega| h_\omega^A,$$

где h_{ω}^A — расстояние от точки A до мгновенной оси вращения.

Обозначим постоянные координаты точки M в подвижной системе координат через x_1, y_1, z_1 , а проекции $\bar{\omega}$ соответственно $\omega_{x_1}, \omega_{y_1}, \omega_{z_1}$.

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \bar{r} &= x_1 \cdot \bar{i}_1 + y_1 \cdot \bar{j}_1 + z_1 \cdot \bar{k}_1; \\ \bar{\omega} &= \omega_{x_1} \cdot \bar{i}_1 + \omega_{y_1} \cdot \bar{j}_1 + \omega_{z_1} \cdot \bar{k}_1. \end{aligned} \right\} \quad (16.29)$$

Подставляя из (16.29) в (16.17), получим

$$\bar{v} = (\omega_{x_1} \cdot \bar{i}_1 + \omega_{y_1} \cdot \bar{j}_1 + \omega_{z_1} \cdot \bar{k}_1) \times (x_1 \cdot \bar{i}_1 + y_1 \cdot \bar{j}_1 + z_1 \cdot \bar{k}_1)$$

или

$$\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ \omega_{x_1} & \omega_{y_1} & \omega_{z_1} \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}. \quad (16.30)$$

Проекции скорости на оси подвижной системы координат будут:

$$\left. \begin{aligned} v_{x_1} &= \omega_{y_1} z_1 - \omega_{z_1} y_1; \\ v_{y_1} &= \omega_{z_1} x_1 - \omega_{x_1} z_1; \\ v_{z_1} &= \omega_{x_1} y_1 - \omega_{y_1} x_1. \end{aligned} \right\} \quad (16.31)$$

Линейное ускорение точек тела будет

$$\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt}$$

или

$$\bar{w} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v}. \quad (16.32)$$

Обозначим:

$\bar{\varepsilon} \times \bar{r} = \bar{w}^b$ — вращательное ускорение;

$\bar{\omega} \times \bar{v} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{w}^u$ — центростремительное (осестремительное) ускорение.

Тогда полное ускорение

$$\bar{w} = \bar{w}^b + \bar{w}^u. \quad (16.33)$$

Исследуем правую часть равенства (16.32). Вращательное ускорение направлено перпендикулярно плоскости, проходящей через r и ε (рис. 16.8, б), и по модулю будет

$$w^b = |\varepsilon| r \sin(\hat{\varepsilon}, \hat{r}) = |\varepsilon| r \sin \beta$$

или

$$w^b = |\varepsilon| h_{\omega}, \quad (16.34)$$

где h_ε — длина перпендикуляра, опущенного из точки M на ось, по которой направлен вектор $\bar{\varepsilon}$ (рис. 16.10, б).

Центростремительное ускорение направлено к мгновенной оси вращения и по модулю будет равно

$$\omega^u = \omega v \sin(\omega, \hat{v}) = \omega v = \omega \cdot \omega \cdot r \sin \alpha = \omega^2 h_\omega. \quad (16.35)$$

Из последних равенств следует, что, хотя вид полученных формул подобен тем, которые были получены для ускорений точек

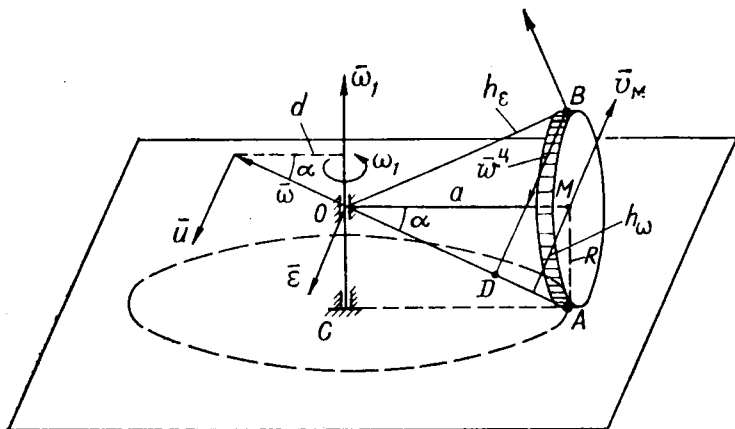


Рис. 16.11.

тела, имеющего неподвижную ось вращения, однако в рассматриваемом случае $\bar{\omega}^u$ и $\bar{\omega}^B$ не перпендикулярны друг другу. Поэтому

$$\omega = \sqrt{(\omega^u)^2 + (\omega^B)^2 + 2\omega^B \omega^u \cos(\bar{\omega}^B, \bar{\omega}^u)}. \quad (16.36)$$

Пример. Диск катится без скольжения по плоскости. Материальная ось диска OM вращается вокруг OC с угловой скоростью, равной ω_1 . Соответствующие расстояния равны: $OM=a$ и $MA=OC=R$ (рис. 16.11). Определить угловую скорость диска, линейную скорость \bar{v}_B и линейное ускорение \bar{w}_B наиболее удаленной точки диска B .

Решение.

Проведем прямую OA , соединяющую две точки твердого тела, скорости которых равны нулю, а именно точку O , скорость которой все время равна нулю, и точку A , скорость которой в данный момент равна нулю, так как качение происходит без скольжения. Следовательно, прямая OA будет мгновенной осью вращения.

Определяем величину скорости точки M

$$v_M = |\omega_1| \cdot a = |\omega| \cdot h_\omega,$$

где h_ω — расстояние от точки M до мгновенной оси вращения ($h_\omega = a \sin \alpha$).

Следовательно, величина угловой скорости вращения твердого тела относительно мгновенной оси будет равна $|\omega| = |\omega_1| \frac{a}{h_\omega} = |\omega_1| \frac{a}{a \sin \alpha} = \frac{|\omega_1|}{\sin \alpha}$.

где

$$\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{a^2 + R^2}}{R}.$$

Находим скорость точки B , величина которой определяется из равенства

$$v_B = |\omega| BD = |\omega| 2h_\omega = \frac{2|\omega_1|}{\sin \alpha} h_\omega = 2 \frac{|\omega_1|}{\sin \alpha} \cdot a \sin \alpha$$

или

$$v_B = 2a\omega_1.$$

Определяем центростремительную составляющую полного ускорения точки B , которая направлена перпендикулярно мгновенной оси вращения от точки B к точке D . Значение ее равно

$$\omega^{II} = \frac{v_B^2}{BD} = \frac{v_B^2}{2h_\omega} = \frac{(2a\omega_1)^2}{2a \sin \alpha} = 2a \frac{\omega_1^2}{\sin \alpha}.$$

Для определения величины и направления вращательного ускорения проведем вектор угловой скорости $\bar{\omega}$, который направлен по мгновенной оси вращения, и найдем величину скорости u конца вектора

$$u = d \cdot |\omega_1| = |\omega| \cos \alpha \cdot |\omega_1| = \frac{|\omega_1|}{\sin \alpha} \cos \alpha \cdot |\omega_1| = \omega_1^2 \operatorname{ctg} \alpha$$

где $d = |\omega| \cos \alpha$ — расстояние от конца вектора $\bar{\omega}$ до вертикальной оси. Векторы мгновенной скорости \bar{u} и углового ускорения $\bar{\epsilon}$ представлены на рис. 16.9 (направлены перпендикулярно плоскости чертежа в сторону читателя).

Вращательное ускорение точки B (вокруг оси $\bar{\epsilon}$) будет по величине равно

$$\omega^B = \epsilon \cdot OB = \omega_1^2 \operatorname{ctg} \alpha \cdot OB.$$

$$\text{где } OB = \frac{a}{\cos \alpha}.$$

Следовательно, величина вращательного ускорения будет

$$\omega^B = \omega_1^2 \operatorname{ctg} \alpha \cdot \frac{a}{\cos \alpha} = \frac{a\omega_1^2}{\sin \alpha}.$$

Вектор вращательного ускорения $\bar{\omega}^B$ точки B направлен перпендикулярно OB так, чтобы, глядя с конца вектора $\bar{\epsilon}$, вращение вектора $\bar{\omega}^B$ вокруг точки O происходило в сторону меньшего угла против хода часовой стрелки.

§ 82. ПОНЯТИЕ ОБ ОБЩЕМ СЛУЧАЕ ДВИЖЕНИЯ СВОБОДНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассмотрим движение свободного твердого тела, которое может перемещаться как угодно в пространстве по отношению к неподвижной системе координат $Oxyz$ (рис. 16.12).

Точку A твердого тела принимаем за полюс и проведем систему координат $Ax_1y_1z_1$ с началом координат в полюсе A , которая будет перемещаться поступательно вместе с телом, т. е. $Ax_1 \parallel Ox$, $Ay_1 \parallel Oy$ и т. д. Положение тела в пространстве по отношению к системе координат $Oxyz$ будет задано, если будут известны положе-

ние полюса A и углы Эйлера φ, ψ, θ , определяющие положение тела по отношению к системе $Ax_1y_1z_1$. Уравнения движения свободного твердого тела в системе координат $Ax_1y_1z_1$ будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} x_A = f_1(t); y_A = f_2(t); z_A = f_3(t); \\ \varphi = f_4(t); \psi = f_5(t); \theta = f_6(t). \end{aligned} \right\} \quad (16.37)$$

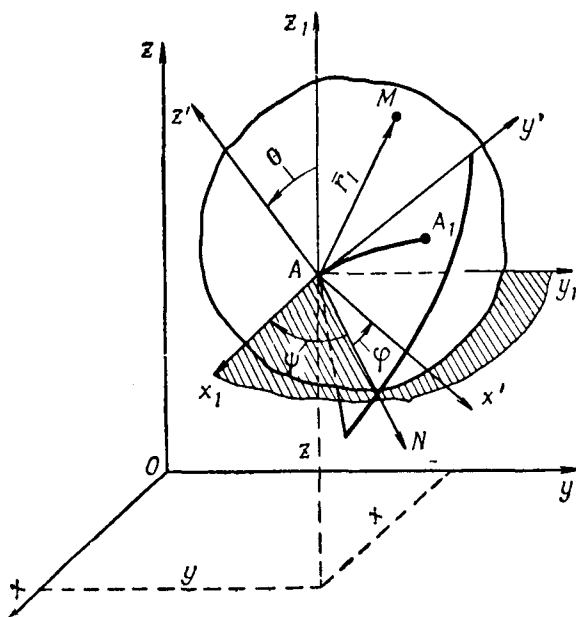


Рис. 16.12.

Уравнения системы (16.37) являются независимыми. Число независимых уравнений движения определяет число степеней свободы. Таким образом, свободное твердое тело имеет шесть степеней свободы.

Элементарное перемещение свободного твердого тела в пространстве может быть осуществлено элементарным поступательным движением твердого тела вместе с полюсом и одним элементарным поворотом вокруг некоторой мгновенной оси, проходящей через полюс (A).

Следовательно, движение свободного твердого тела может быть представлено состоящим:

— из поступательного движения, при котором все точки твердого тела движутся, как и полюс, в соответствии с первыми тремя уравнениями системы (16.37) со скоростью, равной скорости полюса;

— из поворотов в соответствии с последними тремя уравнениями системы (16.37) с угловой скоростью ω вокруг мгновенных осей вращения, проходящих через полюс.

Можно доказать, что изменение выбора полюса меняет поступательное движение, но мгновенная ось, угол и направление поворота вокруг оси при этом не изменяются. Кинематическими характеристиками движения свободного твердого тела будут скорость и ускорение полюса и угловые скорость $\bar{\omega}$ и ускорение $\bar{\varepsilon}$ вокруг полюса.

Линейная скорость любой точки M свободного твердого тела при выборе полюса в точке A определяется из геометрического равенства

$$\bar{v} = \bar{v}_A + \bar{v}_{MA}. \quad (16.38)$$

Таким образом, скорость \bar{v} складывается из скорости поступательного движения полюса A и скорости точки в сферическом движении вместе с телом вокруг полюса. При этом

$$\bar{v}_{MA} = \bar{\omega} \times \overline{AM} = \bar{\omega} \times \bar{r}_1, \quad (16.39)$$

где \bar{r}_1 — радиус-вектор точки в системе координат, связанной с телом.

Ускорение любой точки свободного твердого тела при выборе полюса в точке A определяется из геометрического равенства

$$\bar{w} = \bar{w}_A + \bar{w}_{MA}. \quad (16.40)$$

При этом \bar{w}_{MA} определяется как ускорение точки M в сферическом движении вместе с телом вокруг полюса A .

$$\bar{w}_{MA} = \bar{w}_{MA}^u + \bar{w}_{MA}^b,$$

где

$$\bar{w}_{MA}^b = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_1; \quad \bar{w}_{MA}^u = \bar{\omega} \times \bar{v}_{MA}.$$

Частные случаи:

- 1) $\bar{v}_A = 0; \bar{w}_A = 0$ — сферическое движение тела (вокруг неподвижной точки);
- 2) $\left. \begin{array}{l} \bar{\omega} \parallel \text{оси } z; \\ \bar{v}_A \neq 0; \bar{w}_A \neq 0 \end{array} \right\}$ — плоскопараллельное движение твердого тела;
- 3) $\left. \begin{array}{l} \bar{\omega} \parallel \text{оси } z \\ \bar{v}_A = 0; \bar{w}_A = 0 \end{array} \right\}$ — вращательное движение твердого тела вокруг оси;
- 4) $\omega = 0; \varepsilon = 0$ — тело движется поступательно.

ГЛАВА 17

СОСТАВНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

§ 83. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим движение матроса по палубе движущегося корабля. Оно является составным (сложным) движением. Введем две системы координат: подвижную, связанную с кораблем, и неподвижную (основную), связанную условно с Землей (берегом). Движение матроса относительно корабля будет называться относительным движением, движение корабля относительно Земли — переносным движением и движение матроса относительно Земли — абсолютным движением.

Таким образом, относительным движением называется движение точки относительно подвижной системы отсчета, переносным — движение подвижной системы отсчета относительно неподвижной (основной), абсолютным — движение точки относительно неподвижной системы отсчета.

Относительной скоростью \bar{v}_r и относительным ускорением $\bar{\omega}_r$ точки называются скорость и ускорение точки относительно подвижной системы отсчета.

Переносной скоростью \bar{v}_e и переносным ускорением $\bar{\omega}_e$ называются абсолютные скорость и ускорение той точки подвижной системы отсчета, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка. Точка подвижной системы отсчета, совпадающая в данный момент с движущейся, называется совмещенной. В рассмотренном выше примере переносной скоростью \bar{v}_e матроса является скорость той точки палубы корабля, на которой находится в данный момент матрос.

Абсолютной скоростью \bar{v} и абсолютным ускорением $\bar{\omega}$ называются скорость и ускорение точки по отношению к неподвижной системе отсчета.

В качестве другого примера рассмотрим движение ползуна (рис. 17.1) в прорези вращающейся направляющей кулисного механизма.

Выбираем неподвижную систему координат O_1xy с началом

в точке O_1 и подвижную систему координат $O_1x_1y_1$, связанную с качающейся направляющей.

Относительным движением будет называться прямолинейное движение ползуна относительно направляющей O_1x_1 , а переносным — вращательное движение той точки направляющей, с которой в данный момент времени совпадает движущийся ползун M .

При изучении относительного движения следует мысленно остановить переносное движение, при изучении переносного остановить относительное движение и тогда в каждом из них можно исследо-

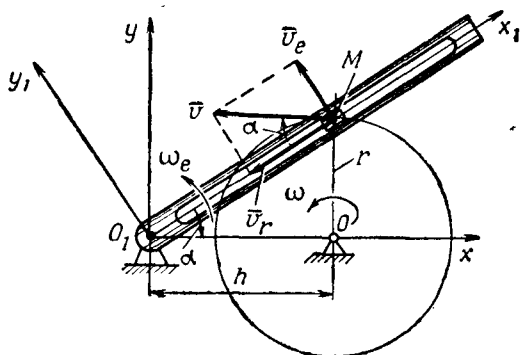


Рис. 17.1.

вать движение точки по уравнениям кинематики точки. Рассмотрим движение точки M (рис. 17.2). Обозначим $Oxyz$ систему неподвижных прямоугольных координат с началом в точке O (орты $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$); $O_1x_1y_1z_1$ — систему подвижных прямоугольных координат с началом в точке O_1 (орты $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$).

Относительное движение характеризуется уравнениями:

$$x_1 = f_1(t); \quad y_1 = f_2(t); \quad z_1 = f_3(t). \quad (17.1)$$

Относительная скорость \bar{v}_r и относительное ускорение $\bar{\omega}_r$ будут определяться равенствами:

$$\begin{aligned} \bar{v}_r &= \dot{x}_1 \cdot \bar{i}_1 + \dot{y}_1 \cdot \bar{j}_1 + \dot{z}_1 \cdot \bar{k}_1; \\ \bar{\omega}_r &= \ddot{x}_1 \cdot \bar{i}_1 + \ddot{y}_1 \cdot \bar{j}_1 + \ddot{z}_1 \cdot \bar{k}_1. \end{aligned} \quad (17.2)$$

Кинематическими характеристиками переносного движения будут переносная скорость \bar{v}_e и переносное ускорение $\bar{\omega}_e$, соответственно абсолютного движения — абсолютная скорость \bar{v} и абсолютное ускорение $\bar{\omega}$.

Установим связь между всеми перечисленными кинематическими характеристиками при составном движении материальной точки.

§ 84. СЛОЖЕНИЕ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ В СЛУЧАЕ,
КОГДА ПЕРЕНОСНОЕ ДВИЖЕНИЕ ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ

Рассмотрим случай, когда подвижная система координат $O_1x_1y_1z_1$ движется поступательно по отношению к неподвижной $Oxyz$.

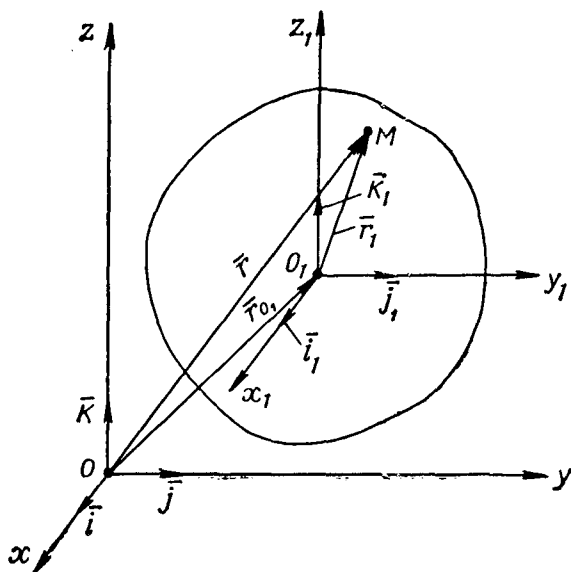


Рис. 17.2.

Орты \bar{i}_1 , \bar{j}_1 и \bar{k}_1 при поступательном движении сохраняют свои направления в пространстве, т. е. остаются параллельными соответствующим ортам \bar{i} , \bar{j} и \bar{k} .

Обозначим (рис. 17.2):

\bar{r}_{O_1} — радиус-вектор начала O_1 подвижной системы координат относительно неподвижного начала O ;

\bar{r}_1 — радиус-вектор точки M в подвижной системе координат;

\bar{r} — радиус-вектор точки M в неподвижной системе координат.

Из чертежа следует, что

$$\bar{r} = \bar{r}_{O_1} + \bar{r}_1.$$

Абсолютная скорость

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}_{O_1}}{dt} + \frac{d\bar{r}_1}{dt} = \bar{v}_{O_1} + \frac{d\bar{r}_1}{dt}, \text{ где } \bar{r}_1 = x_1 \cdot \bar{i}_1 + y_1 \cdot \bar{j}_1 + z_1 \cdot \bar{k}_1.$$

Учитывая, что орты \bar{i}_1 , \bar{j}_1 , \bar{k}_1 постоянны как по величине, так и по направлению, получим

$$\frac{d\bar{r}_1}{dt} = \dot{x}_1 \cdot \bar{i} + \dot{y}_1 \cdot \bar{j} + \dot{z}_1 \cdot \bar{k} = \bar{v}_r.$$

Следовательно, при $\bar{v}_{O_1} = \bar{v}_e$

$$\bar{v} = \bar{v}_{O_1} + \bar{v}_r = \bar{v}_e + \bar{v}_r. \quad (17.3)$$

Абсолютная скорость материальной точки при составном движении в том случае, когда переносное движение поступательное, как следует из (17.3), равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей. Очевидно, что

$$\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{v}_e}{dt} + \frac{d\bar{v}_r}{dt} = \bar{w}_e + \bar{w}_r. \quad (17.4)$$

Абсолютное ускорение материальной точки при составном движении в том случае, когда переносное движение поступательное,

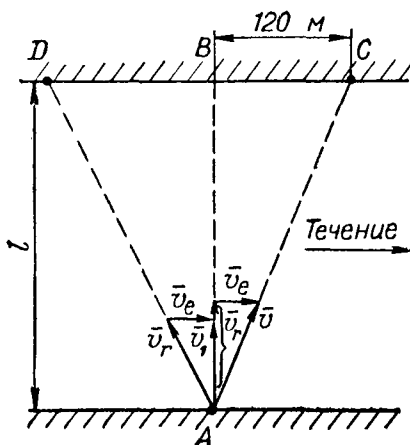


Рис. 17.3.

равно геометрической сумме переносного и относительного ускорений.

Численные значения скоростей и ускорений определяются по равенствам:

$$v = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 + 2v_e v_r \cos(\widehat{v_e, v_r})}; \quad (17.5)$$

$$w = \sqrt{w_e^2 + w_r^2 + 2w_e w_r \cos(\widehat{w_e, w_r})}.$$

Пример. Берега реки параллельны. Катер вышел из пункта A для высадки десанта в пункте B , расположенном на противоположном берегу против пункта A (рис. 17.3). Двигаясь перпендикулярно берегу, катер достиг противоположного берега через $t=100$ с, однако вследствие течения подошел к пункту C , расположенному на 120 м ниже пункта A по течению.

Чтобы попасть в пункт B при такой же величине относительной скорости, необходимо курс держать против течения под некоторым вполне определенным углом к AB . В этом случае катер попадет в пункт B через $t_1=125$ с.

Определить ширину реки l , численные величины относительной скорости (скорости катера в спокойной воде) v_r и переносной скорости (скорости течения) v_e .

Решение. Обозначим:

\bar{v}_e — скорость течения реки;

\bar{v}_r — скорость движения катера относительно воды;

v — абсолютная скорость катера, т. е. скорость катера относительно берегов.

Для определения числовых значений переносной и относительной скоростей рассмотрим следующих два случая:

а) движение катера от пункта A к пункту B :

$$v_e \cdot t = BC, \text{ откуда } v_e = \frac{BC}{t} = \frac{120}{100} = 1,2 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$v_r \cdot t = AB = l, \text{ откуда } v_r = \frac{l}{t}, \text{ где } AB=l \text{ неизвестна};$$

б) движение катера от пункта A к пункту D ; из треугольника ABD (рис. 17.3) следует, что

$$(AB)^2 + (BD)^2 = (AD)^2, \quad (*)$$

$$\text{где } AB=l \text{ — ширина реки; } BD = v_e \cdot t_1 = \frac{BC}{t} \cdot t_1; \quad AD = v_r \cdot t_1 = \left(\frac{l}{t}\right) \cdot t_1.$$

Подставляя в (*), получаем $l^2 + \left(\frac{BC}{t} \cdot t_1\right)^2 = \left(\frac{l}{t} \cdot t_1\right)^2$. Преобразуя и подставляя числовые значения, получаем $(1,25 l)^2 - l^2 = 150^2$, откуда ширина реки $l = \frac{150}{\sqrt{1,25^2 - 1}} \approx 200 \text{ м}$.

Величина относительной скорости v_r , т. е. скорости катера в спокойной воде, определяется из выражения $v_r = \frac{l}{t} = \frac{200}{100} = 2 \text{ м/с} = 7,2 \text{ км/ч}$.

Пример. Штурман подводной лодки, идущей на северо-восток со скоростью 10 уз ($\text{узел} = \frac{\text{морская миля}}{\text{час}} = \frac{1852 \text{ м}}{60 \cdot 60} = 0,514 \text{ м/с}$), определил относительную скорость транспорта, идущего на запад, которая оказалась равной $10\sqrt{2}$ уз. Определить направление и величину абсолютной скорости транспорта*.

Решение. Движение транспорта рассматриваем как составное. Абсолютное движение его по отношению к Земле может быть представлено состоящим из относительного движения по отношению к подводной лодке и переносного. За переносное принимаем движение той точки среды, жестко связанной с подводной лодкой, в которой в данный момент находится транспорт. Оно является поступательным вместе с подводной лодкой. Строим треугольник скоростей. Для этого (рис. 17.4):

— выбираем произвольную точку A на плоскости;

— откладываем в масштабе от точки O вектор переносной скорости \bar{v}_e поступательного движения подводной лодки, направленный на северо-восток;

— из конца вектора \bar{v}_e откладываем в том же масштабе вектор относительной скорости под углом 45° на запад.

Замыкающий вектор дает направление и величину абсолютной скорости v , модуль которой определяется по теореме косинусов, а именно:

$$v = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 + 2v_e v_r \cos(\bar{v}_e, \hat{\bar{v}}_r)} = \\ = \sqrt{(10\sqrt{2})^2 + 10^2 + 2 \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10 \cos 135^\circ} \approx 10 \text{ уз}.$$

Из полученного результата следует, что $|\bar{v}| = |\bar{v}_e|$, т. е. треугольник равнобедренный и поэтому

$$\beta = 45^\circ \text{ и } \alpha = 90^\circ.$$

* Рассматривать подводную лодку и транспорт как материальные точки.

Пример. Подводная лодка (ПЛ) *B* следует на расстоянии $S = \text{const}$ за ПЛ *A*, движущейся прямолинейно, с постоянной скоростью v . Звук гидролокатора, установленного на подводной лодке *B*, достигает *A* и, отразившись, возвращается на гидролокатор *B*. Определить скорость движения подводных лодок, если время прохождения звука от выхода из точки *B* до возвращения в точку *B* будет известно, а скорость распространения звука в воде принять равной c .

Решение. Принимаем распространение звука за абсолютное движение, которое может быть представлено состоящим из переносного движения подводной лодки (подвижная система координат, которая движется поступательно) и относительного движения звука относительно подводной лодки.

При распространении звука от *B* к *A* величина относительной скорости будет (рис. 17.4)

$$v_{r_1} = c - v = \text{const}$$

и, следовательно, $s = v_{r_1} \cdot t_1 = (c - v) t_1$.

При распространении звука от *A* к *B* величина относительной скорости будет

$$v_{r_2} = c + v = \text{const}$$

и, следовательно, $s = (c + v) t_2$.

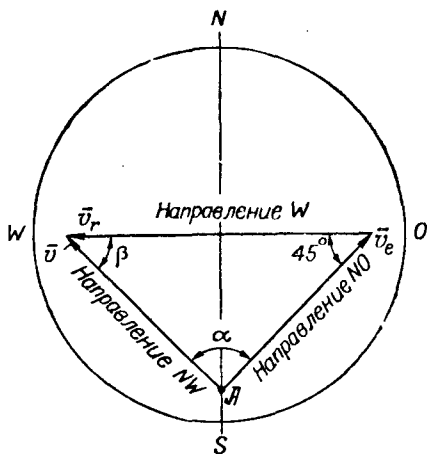


Рис. 17.4.

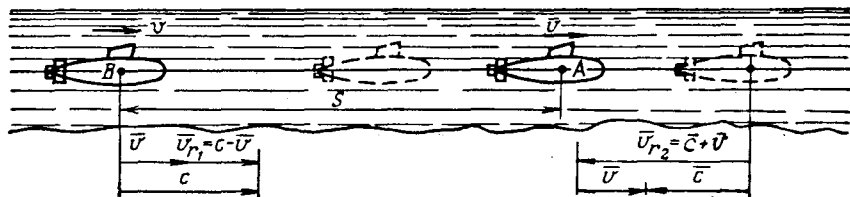


Рис. 17.5.

Искомое время от выхода звука из точки *B* и его возвращения в точку *B* равно

$$t = t_1 + t_2 = \frac{s}{c - v} + \frac{s}{c + v} = \frac{2sc}{c^2 - v^2}.$$

Время t может быть измерено, и поэтому оно известно. Из полученного уравнения определяем, что

$$v = \sqrt{c^2 - \frac{2sc}{t}}.$$

§ 85. СЛОЖЕНИЕ СКОРОСТЕЙ В СЛУЧАЕ, КОГДА ПЕРЕНОСНОЕ ДВИЖЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЕ

При произвольном переносном движении подвижная система координат (рис. 17.6) изменяет свое положение по отношению к неподвижной по любому закону. Тогда орты \bar{i}_1 , \bar{j}_1 и \bar{k}_1 изменяют свое направление в пространстве, т. е. они не постоянны, а являются функциями времени.

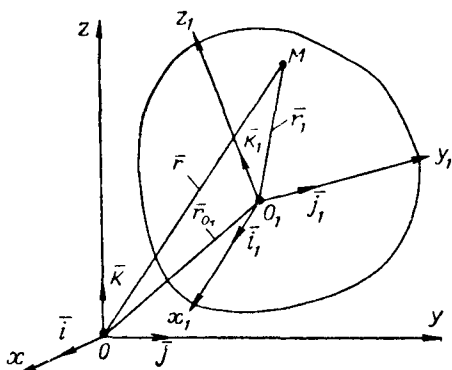


Рис. 17.6.

В соответствии с определением абсолютная скорость точки M равна

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}_{O_1}}{dt} + \frac{d\bar{r}_1}{dt}, \quad (17.6)$$

где $\frac{d\bar{r}_{O_1}}{dt}$ — скорость начала подвижной системы координат, а

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{r}_1}{dt} = \frac{d}{dt} (x_1 \cdot \bar{i}_1 + y_1 \cdot \bar{j}_1 + z_1 \cdot \bar{k}_1) = \dot{x}_1 \cdot \bar{i}_1 + \dot{y}_1 \cdot \bar{j}_1 + \dot{z}_1 \cdot \bar{k}_1 + \\ + x_1 \cdot \frac{d\bar{i}_1}{dt} + y_1 \cdot \frac{d\bar{j}_1}{dt} + z_1 \cdot \frac{d\bar{k}_1}{dt}. \end{aligned} \quad (17.7)$$

Первых три слагаемых правой части последнего равенства являются относительной скоростью точки по отношению к осям $O_1x_1y_1z_1$

$$\dot{x}_1 \cdot \bar{i}_1 + \dot{y}_1 \cdot \bar{j}_1 + \dot{z}_1 \cdot \bar{k}_1 = \bar{v}_r.$$

Для преобразования последних трех слагаемых в уравнении (17.7) следует использовать равенства (формулы Пуассона):

$$\frac{d\bar{i}_1}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{i}_1; \quad \frac{d\bar{j}_1}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{j}_1; \quad \frac{d\bar{k}_1}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{k}_1, \quad (17.8)$$

которые являются частными случаями следующих формул:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{r}; \quad \frac{d\bar{\tau}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{\tau}.$$

В равенствах (17.8) через $\bar{\omega}_e$ обозначена угловая скорость вращательного движения осей $O_1x_1y_1z_1$ вокруг полюса O_1 , т. е. угловая скорость переносного движения.

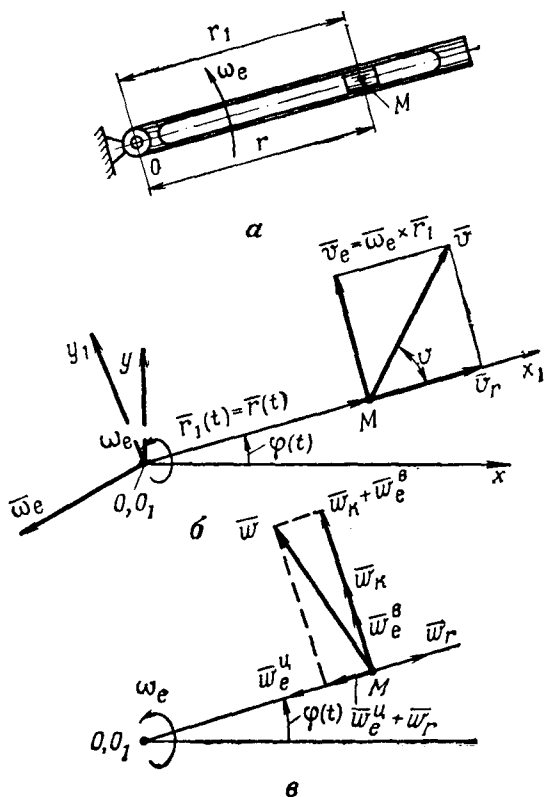


Рис. 17.7.

Учитывая уравнения (17.8), получим

$$\begin{aligned} x_1 \frac{d\bar{i}_1}{dt} + y_1 \frac{d\bar{j}_1}{dt} + z_1 \frac{d\bar{k}_1}{dt} &= x_1 (\bar{\omega}_e \times \bar{i}_1) + y_1 (\bar{\omega}_e \times \bar{j}_1) + z_1 (\bar{\omega}_e \times \bar{k}_1) = \\ &= \bar{\omega}_e \times (x_1 \cdot \bar{i}_1 + y_1 \cdot \bar{j}_1 + z_1 \cdot \bar{k}_1) = \bar{\omega}_e \times \bar{r}_1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{d\bar{r}_1}{dt} = \bar{v}_r + \bar{\omega}_e \times \bar{r}_1. \quad (17.9)$$

Подставляя в (17.6), имеем

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}_{O_1}}{dt} + \bar{\omega}_e \times \bar{r}_1 + \bar{v}_r = \bar{v}_e + \bar{v}_r, \quad (17.10)$$

где скорость переносного движения

$$\bar{v}_e = \frac{d\bar{r}_{O_1}}{dt} + \bar{\omega}_e \times \bar{r}_1. \quad (17.11)$$

Пример. Материальная точка M движется по прямой, которая в свою очередь вращается с постоянной угловой скоростью $\bar{\omega}_e$. Определить абсолютную скорость точки M (рис. 17.7, а).

Решение. Устанавливаем, что начало неподвижной Oxy и подвижной Ox_1y_1 системы координат совпадает, поэтому $\frac{d\bar{r}_{O_1}}{dt} = 0$ (рис. 17.7, б). Переносная скорость $\bar{v}_e = \bar{\omega}_e \times \bar{r}_1$. По величине $v_e = \omega_e r_1 \sin(\widehat{\omega_e, \bar{r}_1})$ или

$$v_e = \omega_e r_1, \text{ так как } \sin(\widehat{\omega_e, \bar{r}_1}) = \sin 90^\circ = 1.$$

Относительная скорость по величине равна

$$v_r = \dot{r}_1.$$

Учитывая направление скоростей $\bar{v}_e \perp \bar{v}_r$ (рис. 17.7, б), модуль абсолютной скорости будет определяться по равенству

$$v = \sqrt{(\omega_e r_1)^2 + \dot{r}_1^2}.$$

§ 86. СЛОЖЕНИЕ УСКОРЕНИЙ В СЛУЧАЕ, КОГДА ПЕРЕНОСНОЕ ДВИЖЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЕ. ПОВОРОТНОЕ УСКОРЕНИЕ (УСКОРЕНИЕ КОРИОЛИСА)

В соответствии с определением вектор абсолютного ускорения равен

$$\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{v}_e}{dt} + \frac{d\bar{v}_r}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\bar{r}_{O_1}}{dt} + \bar{\omega}_e \times \bar{r}_1 \right) + \frac{d\bar{v}_r}{dt}$$

или

$$\bar{w} = \frac{d^2 r_{O_1}}{dt^2} + \frac{d}{dt} (\bar{\omega}_e \times \bar{r}_1) + \frac{d\bar{v}_r}{dt}. \quad (17.12)$$

Продифференцируем правую часть равенства (17.12), получим

$$\bar{w} = \frac{d^2 r_{O_1}}{dt^2} + \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{r}_1 + \bar{\omega}_e \times \frac{d\bar{r}_1}{dt} + \frac{d}{dt} (\dot{x}_1 \bar{i}_1 + \dot{y}_1 \bar{j}_1 + \dot{z}_1 \bar{k}_1). \quad (17.13)$$

Учтем, что $\frac{d\bar{\omega}_e}{dt} = \bar{\varepsilon}_e$, где $\bar{\varepsilon}_e$ — угловое ускорение переносного движения. Следовательно, $\frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{r}_1 = \bar{\varepsilon}_e \times \bar{r}_1 = \bar{w}_e^B$.

Далее, пользуясь уравнением (17.9), получим $\bar{\omega}_e \times \frac{d\bar{r}_1}{dt} = \bar{\omega}_e \times (\bar{v}_r + \bar{\omega}_e \times \bar{r}_1) = \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{r}_1) = \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r + \bar{w}_e^u$, где $\bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{r}_1) = \bar{\omega}_e \times \bar{v}_e = \bar{w}_e^u$.

Последнее слагаемое равенства (17.13) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\dot{x}_1 \bar{i}_1 + \dot{y}_1 \bar{j}_1 + \dot{z}_1 \bar{k}_1) &= \ddot{x}_1 \bar{i}_1 + \ddot{y}_1 \bar{j}_1 + \ddot{z}_1 \bar{k}_1 + \\ &+ \dot{x}_1 \frac{d\bar{i}_1}{dt} + \dot{y}_1 \frac{d\bar{j}_1}{dt} + \dot{z}_1 \frac{d\bar{k}_1}{dt} = \bar{\omega}_r + \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r, \end{aligned}$$

где $\bar{\omega}_r = \ddot{x}_1 \bar{i}_1 + \ddot{y}_1 \bar{j}_1 + \ddot{z}_1 \bar{k}_1$ — относительное ускорение точки по отношению к подвижной системе координат $O_1 x_1 y_1 z_1$.

Подставляя значения всех слагаемых в уравнение (17.13), получим

$$\bar{\omega} = \frac{d^2 \bar{r}_{O_1}}{dt^2} + \bar{\omega}_e^B + \bar{\omega}_e^U + 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r + \bar{\omega}_r.$$

Обозначим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \bar{r}_{O_1}}{dt^2} + \bar{\omega}_e^B + \bar{\omega}_e^U &= \bar{\omega}_e; \\ 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r &= \bar{\omega}_k, \end{aligned} \right\} \quad (17.14)$$

где $\bar{\omega}_e$ — переносное ускорение (при $\bar{v}_r = 0$; $\bar{\omega}_r = 0$; $\bar{\omega} = \bar{\omega}_e$ — т. е. равно переносному ускорению);

$\bar{\omega}_k$ — кориолисово *, или поворотное ускорение.

Таким образом,

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_e + \bar{\omega}_r + \bar{\omega}_k. \quad (17.15)$$

Вывод. В том случае, когда переносное движение произвольное (не поступательное), полное ускорение равно геометрической сумме трех ускорений: переносного, относительного и поворотного (кориолисова).

Остановимся несколько подробнее на рассмотрении поворотного ускорения, которое по модулю равно

$$\omega_k = 2\omega_e v_r \sin(\bar{\omega}_e, \hat{\bar{v}}_r).$$

Вектор $\bar{\omega}_k = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r$ перпендикулярен плоскости, проходящей через \bar{v}_r и $\bar{\omega}_e$, и направлен так, чтобы, глядя с его конца, вращение $\bar{\omega}_e$ для совмещения с \bar{v}_r в сторону меньшего угла происходило против хода часовой стрелки (рис. 17.8, а).

Установим на примере физический смысл поворотного ускорения. Пусть ползун А движется с относительной скоростью \bar{v}_r по направляющей, которая в свою очередь вращается (рис. 17.8, б) с угловой скоростью $\bar{\omega}_e$.

В начальный момент времени t ползун находился в A_0 . За время Δt ползун переместится в точку A_1 за счет переносного движения $\sphericalangle A_0 A_1 = v_e \Delta t$ и в точку A_2 за счет относительного движения

* Кориолис Г. (1792—1843 гг.) — французский ученый-механик.

$A_1A_2 = v_r \Delta t$. На самом деле ползун попадает не в A_2 , а в A_3 . При этом дополнительный путь равен $\cup A_2A_3 = A_1A_2 \Delta \varphi = A_1A_2 \omega_e \Delta t$. Подставляя значение отрезка A_1A_2 , получим, что

$$\cup A_2A_3 = v_r \Delta t \omega_e \Delta t = \frac{2v_r \omega_e (\Delta t)^2}{2} = \frac{\omega_k (\Delta t)^2}{2},$$

где величина кориолисова (поворотного) ускорения равна $\omega_k = 2v_r \omega_e$. Следовательно, поворот по дуге A_2A_3 совершается за счет поворотного ускорения. Рассмотрим некоторые частные случаи:

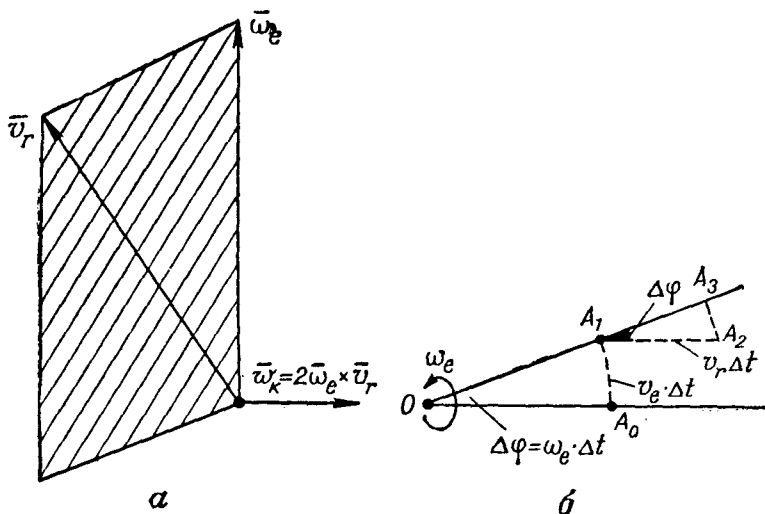


Рис. 17.8.

а) $\bar{v}_r \perp \bar{\omega}_e$. Тогда $\sin(\bar{\omega}_e, \bar{v}_r) = 1$ и $\omega_k = 2\omega_e v_r$.

Для определения направления $\bar{\omega}_k$ можно пользоваться следующим правилом Жуковского: в том случае, когда угол между векторами $\bar{\omega}_e$ и \bar{v}_r равен 90° , направление $\bar{\omega}_k$ (рис. 17.9, а) совпадает с вектором \bar{v}_r , повернутым на 90° в сторону переносного вращения, т. е. в зависимости от направления вращения по или против хода часовой стрелки.

Если между векторами $\bar{\omega}_e$ и \bar{v}_r угол не равен 90° , то изложенное выше правило относится к проекции вектора \bar{v}_r на плоскость, перпендикулярную вектору $\bar{\omega}_e$ (рис. 17.9, б);

б) $\bar{v}_r \parallel \bar{\omega}_e$; $\sin(\bar{v}_r, \bar{\omega}_e) = 0$; $\bar{\omega}_k = 0$.

Поворотное ускорение отсутствует тогда, когда вектор переносной угловой скорости параллелен вектору относительной скорости или переносное движение поступательное ($\omega_e = 0$) или когда $v_r = 0$.

Пример. Определить полное ускорение точки M — ползуна в предыдущем примере (рис. 17.7, в).

Решение. Полное ускорение ползуна M будет складываться из следующих составляющих ускорений (рис. 17.7, в):

$$\bar{w}_e^B \text{ — переносного вращательного } w_e^B = r \frac{d^2\varphi}{dt^2} = r\ddot{\varphi} = r\varepsilon;$$

$$\bar{w}_e^H \text{ — переносного центростремительного } w_e^H = r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = r\dot{\varphi}^2 = r\omega_e^2;$$

$$\bar{w}_r \text{ — относительного } w_r = \frac{d^2r}{dt^2} = \ddot{r};$$

$$\bar{w}_K \text{ — кориолисова } w_K = 2\omega_e v_r = 2\omega_e \dot{r} = 2\dot{\varphi} \dot{r} = 2\omega_e r \dot{\varphi}.$$

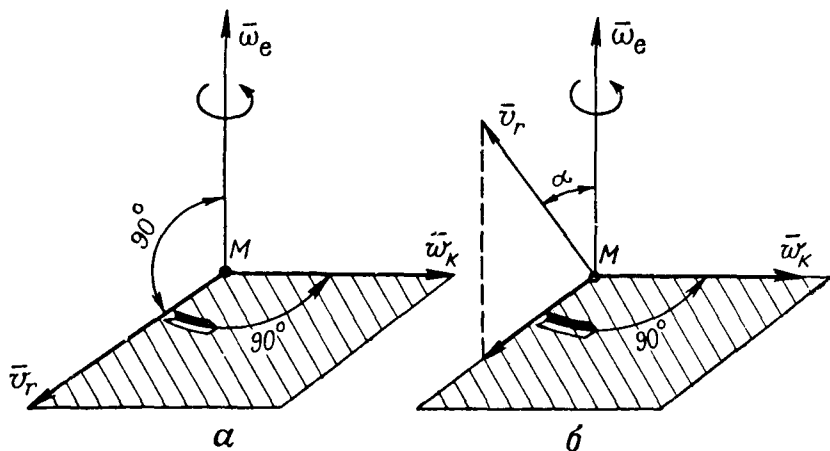


Рис. 17.9.

Направления всех ускорений представлены на рис. 17.7. Модуль полного ускорения определяется в соответствии с рис. 17.7 по равенству

$$w = \sqrt{(w_r - w_e^H)^2 + (w_K + w_e^B)^2}$$

или после подстановки

$$w = \sqrt{(\ddot{r} - r\omega_e^2)^2 + (r\varepsilon + 2\omega_e \dot{r})^2}.$$

Вектор полного ускорения точки M получим геометрическим сложением составляющих ускорений.

Пример. На широте φ° курсом на восток (рис. 17.10) движется с постоянной скоростью v_r подводная лодка, которую можно принять за материальную точку M . Определить полное ускорение подводной лодки.

Решение. Устанавливаем, что движение подводной лодки, принимаемой за точку M , является составным, которое может быть представлено состоящим из переносного (вращение Земли) и относительного (движение подводной лодки относительно Земли).

Определяем величину угловой скорости переносного движения, т. е. вращения Земли

$$\omega_e = \frac{2\pi \cdot 1}{24 \cdot 60 \cdot 60} \text{ рад/с} = \text{const.}$$

Ускорение переносного движения, т. е. точки на поверхности Земли, с которой в данный момент совпадает подводная лодка, будет

$$\bar{w}_e = \bar{w}_e^u + \bar{w}_e^b = \bar{w}_e^u, \text{ так как } \bar{w}_e^b = \varepsilon r = 0 (\omega_e = \text{const}, \varepsilon = 0)$$

или по величине

$$w_e = \omega_e^2 r \omega_e^2 R \cos \varphi, \text{ где } R \text{ — радиус Земли.}$$

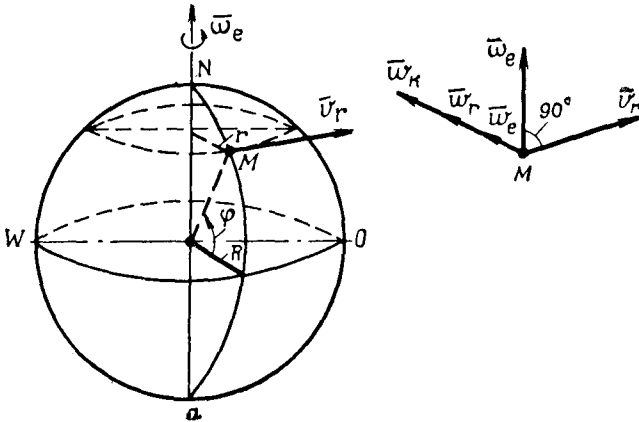


Рис. 17.10.

Ускорение относительного движения, принимая Землю неподвижной:

$$\bar{w}_r = \bar{w}_r^n + \bar{w}_r^c = \bar{w}_r^n, \text{ так как } \bar{w}_r^c = \frac{dv_r}{dt} = 0 (v_r = \text{const})$$

или по величине

$$w_r = \frac{v_r^2}{r} = \frac{v_r^2}{R \cos \varphi}.$$

Переносное движение вращательное, следовательно, возникает поворотное ускорение, равное $\bar{w}_k = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r$, или, учитывая, что $\sin(\bar{\omega}_e, \bar{v}_r) = 1$, получаем $w_k = 2\omega_e v_r$. Направления всех составляющих ускорения совпадают, они направлены к оси вращения Земли. Поэтому

$$w = |\bar{w}| = w_e + w_r + w_k = \omega_e^2 R \cos \varphi + \frac{v_r^2}{R \cos \varphi} + 2\omega_e v_r.$$

ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ МЕХАНИЗМОВ

§ 87. ОБЩИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ МЕХАНИЗМОВ

Кинематикой механизмов называется раздел кинематики, в котором изучается движение звеньев механизма независимо от приложенных к ним сил.

Механизмом называется искусственно созданная совокупность тел, обладающая определенностью движения и предназначенная для преобразования движения одного или нескольких тел в требуемые движения других тел.

Одно или несколько жестко соединенных тел, входящих в состав механизма, называются звеном.

Звенья бывают твердые — рычаги, шатуны, ползуны и др.; гибкие — ремни и канаты, жидкие и газообразные тела, входящие в состав механизма.

Звено, принимаемое за неподвижное, называется стойкой*.

Все подвижные звенья механизма подразделяют на ведущие и ведомые. Звено, которому сообщается движение, преобразуемое механизмом в требуемые движения ведомых, называется ведущим звеном. Ведомыми называются все остальные подвижные звенья механизма, которые совершают движение, для выполнения которого предназначен механизм.

Если точки звеньев механизма описывают траектории, лежащие в параллельных плоскостях, такие механизмы называются плоскими. У пространственных механизмов точки звеньев описывают неплоские траектории или траектории, лежащие в пересекающихся плоскостях.

Задачи кинематики механизмов. В кинематике механизмов решаются две основные задачи: кинематический анализ и кинематический синтез механизма.

При кинематическом анализе определяется движение ведомых звеньев механизма по заданному движению ведущих звеньев.

* Понятие неподвижности стойки относительное. Так, для коленчатого вала, шатунов и поршней двигателя, установленного на движущемся корабле, фундаментная рама и станина принимаются за неподвижную стойку. Однако они вместе с кораблем совершают сложное движение по отношению к Земле.

При кинематическом анализе механизмов ставятся три задачи, а именно:

— определение по заданным параметрам ведущих звеньев положения всех звеньев механизма и траекторий отдельных его точек;

— определение скоростей и ускорений всех характерных точек механизма;

— определение угловых скоростей и угловых ускорений звеньев механизма в функции времени или угла поворота ведущего звена.

Поставленные задачи могут быть решены аналитически, графоаналитически и экспериментально. Ниже будут изложены первые два способа, из которых графоаналитический обладает меньшей точностью, но большей наглядностью и простотой, чем аналитический.

Кинематический анализ механизмов дает возможность проверить правильность действия механизма, определять размеры пространства, необходимого для размещения механизма, кинетическую энергию механизма и другие динамические характеристики отдельных его звеньев.

При кинематическом синтезе механизма рассматривают задачу проектирования кинематической схемы механизма по заданным кинематическим условиям.

§ 88. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ПАРЫ

Кинематической парой называется соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее их относительное движение. Поверхность, линия, точка звена, по которым они могут соприкаться с другим звеном, образуя кинематическую пару, называется элементом звена. В зависимости от соединения звеньев кинематических пар последние делят на высшие и низшие. В высших парах соприкосновение ее звеньев происходит по линиям или в точках, в низших — только по поверхности.

На относительное движение каждого звена пары накладываются определенные ограничения, зависящие от способа соединения звеньев. Эти ограничения называются условиями связи в кинематических парах. В общем случае, свободное абсолютно твердое звено в пространстве обладает шестью степенями свободы; оно может перемещаться вдоль трех взаимно перпендикулярных осей и вращаться вокруг каждой из них.

На звено кинематической пары налагаются определенные условия связи, число которых S должно быть не более пяти и не менее одного, т. е. $S=1 \div 5$. При наличии шести связей ($S=6$) теряется относительная подвижность звена, а при отсутствии связей ($S=0$) звенья не соприкасаются друг с другом. Число степеней свободы H связано с числом условий связи S зависимостью

$$H = 6 - S, \text{ т. е. } H = 5 \div 1.$$

В зависимости от числа условий связи, налагаемых на относительное движение звеньев, кинематические пары делятся на пять классов. Класс кинематической пары определяется из зависимости

$$S = 6 - H.$$

На пару I класса наложена одна связь ($S=1$), II — две ($S=2$) и т. д. Для плоских механизмов обычно используются пары IV и V классов ($S=4$ и $S=5$).

Таблица 6

Виды пар					
Класс пар	I	II	III	IV	V
Число условий связи	1	2	3	4	5
Число степеней свободы	5	4	3	2	1
Наименование	Высшие необратимые		Низшие обратимые		

В табл. 6 приведены примеры пар различных классов. Кинематические пары делят на закрытые (III, IV и V классы) и открытые (I и II классы), на плоские (V класс) и пространственные (III класс), на высшие (I и II классы) и низшие (III, IV и V классы).

§ 89. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Кинематической цепью называется связанная система звеньев, образующих между собой кинематические пары. Кинематические цепи делятся на простые и сложные, замкнутые и открытые, определенные и неопределенные, плоские и пространственные.

Простой кинематической цепью называется такая, у которой каждое звено входит не более чем в две кинематические пары (рис. 18.1, а).

Сложная кинематическая цепь (рис. 18.1, б) имеет одно или несколько звеньев, входящих более чем в две кинематические пары.

Замкнутой кинематической цепью называется такая кинематическая цепь, в которой каждое звено входит не менее чем в две кинематические пары (рис. 18.1, в).

Если кинематическая цепь имеет звенья, входящие только в одну кинематическую пару, то такая кинематическая цепь называется открытой (рис. 18.1, г или, например, складной метр).

Неопределенной кинематической цепью называется такая, у которой ведомые звенья имеют неопределенные движения (рис. 18.1, в) при заданном движении ведущего.

Определенной кинематической цепью называется такая, у которой звенья имеют вполне определенные движения. В такой цепи одно звено — стойка, ведущему сообщено заданное движение, в зависимости от которого ведомые звенья получают вполне определенные движения (рис. 18.1, а). Всякий механизм является определенной кинематической цепью.

Число степеней свободы кинематической цепи зависит от количества звеньев и от количества и характера пар, входящих в состав цепи. До включения в кинематическую цепь каждое звено об-

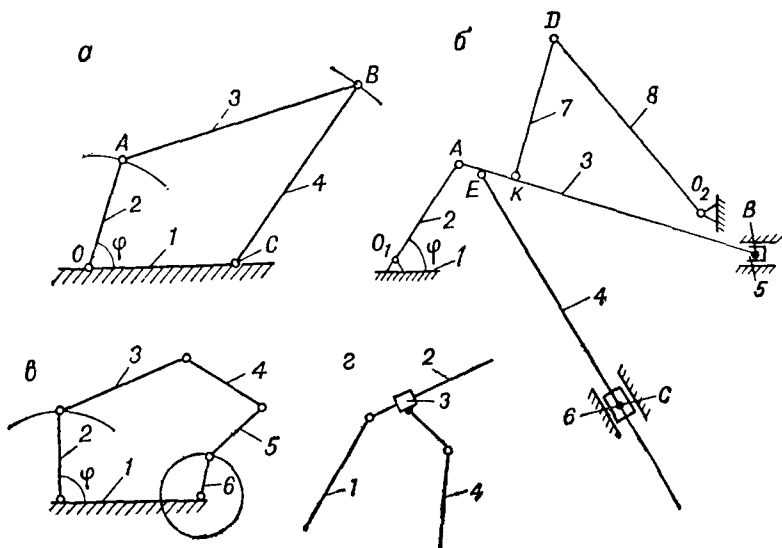


Рис. 18.1.

ладает шестью степенями свободы, следовательно, число степеней свободы k звеньев до их соединения в кинематические пары равно $6k$. Число связей, накладываемых на звенья при их соединении в кинематические пары, зависит от класса пар. Обозначим число кинематических пар I, II, III, IV и V классов соответственно через p_1, p_2, p_3, p_4 и p_5 . Тогда выражение для числа степеней свободы H кинематической цепи, составленной из k звеньев:

$$H = 6k - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1.$$

Для механизма, т. е. для определенной кинематической цепи, у которой одно из звеньев неподвижно, шесть степеней свободы исключается, тогда число степеней свободы кинематической цепи относительно неподвижного звена или степень подвижности W будет

$$W = 6(k - 1) - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1$$

или

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1, \quad (18.1)$$

где $n = k - 1$ — число подвижных звеньев.

Формула (18.1) называется формулой подвижности или структурной формулой общего случая.

Если звено совершает плоское движение, т. е. такое, при котором все его точки движутся в плоскостях, параллельных неподвижной, то число степеней свободы такого звена равно трем, т. е. на три меньше, чем при движении в пространстве. В этом случае структурная формула примет следующий вид:

$$W = (6 - 3)n - (5 - 3)p_5 - (4 - 3)p_4 - (3 - 3)p_3,$$

или

$$W = 3n - 2p_5 - p_4. \quad (18.2)$$

Формула (18.2) называется структурной формулой плоских шарнирных механизмов, получена акад. П. Л. Чебышевым в 1869 г. Она связывает степень подвижности механизма с числом его звеньев и пар кинематической цепи.

При нулевой степени подвижности кинематической цепи она превращается в ферму. В дальнейшем будет рассмотрена кинематическая цепь с одной степенью подвижности и только та, которая образует механизм. Напомним, что механизмом называется такая кинематическая цепь, в которой при заданном движении одного или нескольких звеньев (ведущие звенья) относительно другого, принятого за неподвижное (стойка), все остальные звенья (ведомые) совершают вполне определенные движения.

Учение о структуре и классификации кинематических цепей и механизмов развито в работах А. В. Ассура, И. И. Артоболевского и др.

Для определенности движения механизма необходимо, чтобы число ведущих звеньев равнялось степени подвижности. Например, если $W = 1$, то механизм должен иметь одно ведущее звено, если $W = 2$, то два, и т. д.

Проведем структурный анализ механизма, представленного на рис. 18.1, б; количество подвижных звеньев — 7; кривошип O_1A , шатуны AB , EC , ползуны B и C , звено DK , коромысло DO_2 . Количество кинематических пар — 10: вращательных — 8, поступательных — 2. Пары V класса низшие (контакт по поверхности). Степень подвижности механизма

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 10 - 0 = 1.$$

В дальнейшем будет рассмотрена в основном кинематика плоских механизмов, имеющих наиболее широкое распространение в технике, в частности в технике вооружения ВМФ. В основе кинематического исследования плоских механизмов лежит теория плоскопараллельного (плоского) движения.

§ 90. УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Плоскопараллельным или плоским движением твердого тела называется такое движение, при котором все точки тела движутся в плоскостях,

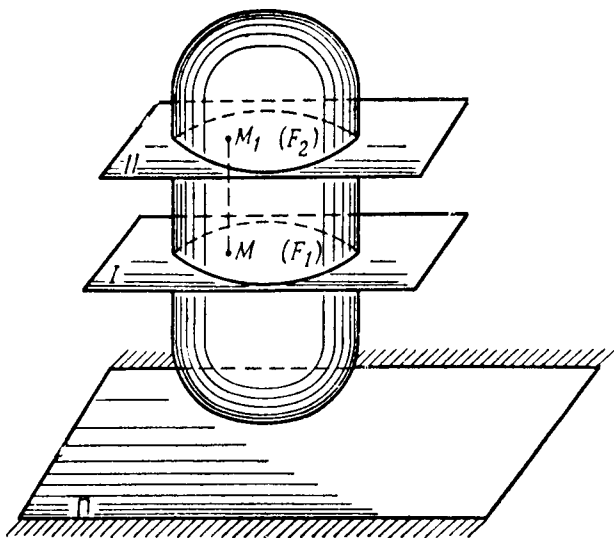


Рис. 18.2.

параллельных некоторой неподвижной плоскости (рис. 18.2). Будем полагать, что плоскость Π является неподвижной в пространстве. Разделим мысленно тело плоскостями I, II и т. д., параллельными неподвижной. Тогда при своем движении выделенные плоскости сечения тела будут как бы скользить в своих плоскостях.

Восстановим перпендикуляр к плоскости в точке M сечения, полученного пересечением тела плоскостью, параллельной неподвижной (рис. 18.2). Все точки, лежащие на этом перпендикуляре, который движется поступательно, будут иметь одинаковые траектории, скорости и ускорения. Поэтому достаточно изучить дви-

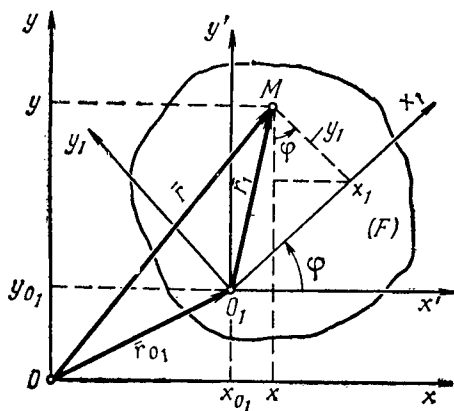


Рис. 18.3.

жение одной плоской фигуры в ее плоскости, чтобы знать все кинематические характеристики плоскопараллельного движения твердого тела. Изобразим плоскую фигуру F (рис. 18.3) и две

системы координат: одну Oxy — неподвижную и другую $O_1x_1y_1$ — подвижную, жестко связанную с плоской движущейся фигурой, причем начало O_1 выбирается на фигуре произвольно. Положение плоской фигуры F в неподвижной системе координат будет вполне определено, если будет задано положение подвижной системы координат, т. е. если будут заданы следующие три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} x_{O_1} &= f_1(t); \\ y_{O_1} &= f_2(t); \\ \varphi &= f_3(t). \end{aligned} \right\} \quad (18.3)$$

Уравнения (18.3) называются уравнениями движения плоской фигуры в ее плоскости и являются уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела.

Частные случаи:

а) $\varphi = \text{const}$ — плоская фигура, а следовательно, и тело движется поступательно;

б) x_{O_1} и $y_{O_1} = \text{const}$ — плоская фигура, а следовательно, и тело совершает вращательное движение вокруг оси, перпендикулярной плоской фигуре F и проходящей через точку O_1 .

В дальнейшем точку O_1 будем называть основной точкой или полюсом, а угол φ — угловой координатой плоской фигуры.

За положительное направление отсчета φ принимается такое, которое отсчитывается от положительного направления оси Ox против хода часовой стрелки, если смотреть на плоскость Oxy с положительного направления оси Oz , которая направлена при правой системе координат перпендикулярно плоскости Oxy . (на рис. 18.3 в сторону читателя).

Перемещение плоской фигуры. Положение плоской фигуры будет вполне определено, если будут заданы положения ее двух точек, например O_1 и M , или прямой O_1M , которая их соединяет.

Допустим, фигура из положения I , совершая плоское движение, перешла в положение, близкое к первому, и при этом заняла новое положение II (рис. 18.4). Разделим перемещение фигуры мысленно на два, вначале переместим фигуру поступательно $O'M' \parallel O_1M$, а затем повернем на угол φ вокруг полюса O' , после чего фигура займет новое положение II . Однако можно за полюс выбрать и точку M . Тогда поступательное перемещение $M_1M'' \parallel OM$ изменится (положение $M''M_1$), но поворот из $M''M_1$ в $O'M_1$ вокруг M_1 будет осуществляться также на угол φ . Таким образом, любое перемещение плоской фигуры в ее плоскости из одного положения в другое может быть осуществлено двумя перемещениями: поступательным, зависящим от выбора полюса, и вращательным вокруг полюса, направление и угол поворота которого от выбора полюса не зависят.

Пользуясь тем, что полюс можно выбирать произвольно, Эйлер показал, что всякое непоступательное перемещение плоской фигу-

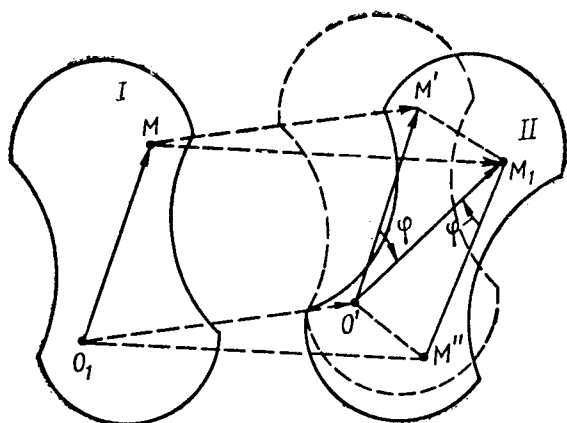


Рис. 18.4.

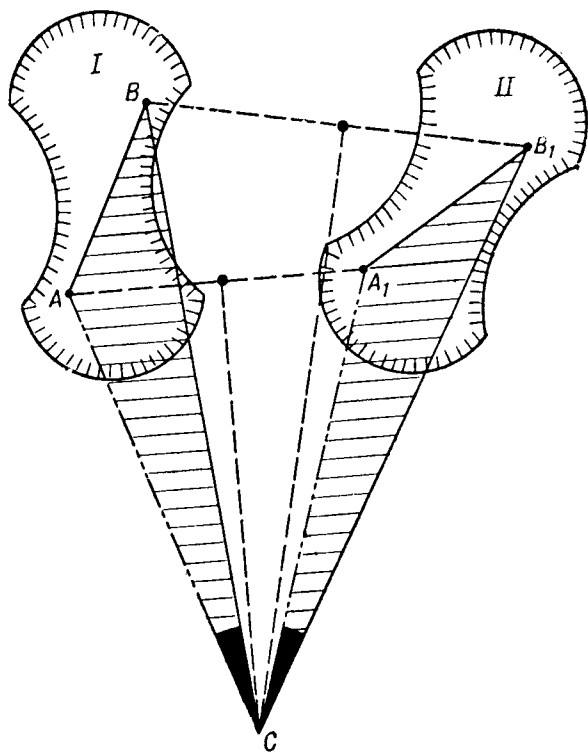


Рис. 18.5.

ры в ее плоскости может быть осуществлено одним поворотом фигуры вокруг некоторого центра, который называется центром поворота.

Для определения положения центра поворота рассмотрим два близких положения плоской фигуры I и II , которые определяются прямыми AB и A_1B_1 (рис. 18.5). Восстановим перпендикуляры из середин отрезков AA_1 и BB_1 . Они пересекаются в точке C , которая и будет центром поворота. Действительно, по построению $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C$, откуда $\angle ACB = \angle A_1CB_1$. Прибавляя к обеим частям

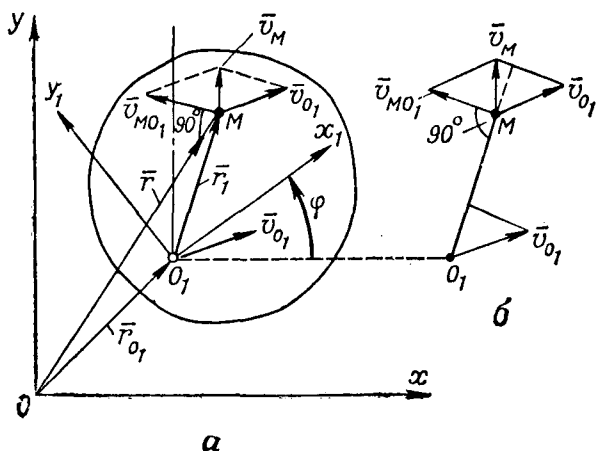


Рис. 18.6.

равенства $\angle BSA_1$, получим, что $\angle ACB + \angle BSA_1 = \angle ACB_1 + \angle BSA_1$ или (рис. 18.5) $\angle ACA_1 = \angle BCB_1$, т. е. при повороте фигуры на угол $\varphi = \angle ACA_1$ AC совместится с A_1C , а BC с B_1C , чем теорема Эйлера и доказывается.

Такое построение для определения положения центра поворота не дает результатов в двух случаях:

— когда перпендикуляры, восстановленные из середин отрезков, будут параллельны, т. е. движение будет только поступательным; этот случай исключен из рассмотрения;

— когда перпендикуляры совпадут; в этом случае центр поворота будет находиться в точке пересечения прямых, проходящих через AB и A_1B_1 .

Уравнения движения. Положение любой точки M плоской фигуры (рис. 18.6) определяется радиусом-вектором \bar{r} , проведенным из начала неподвижной системы координат, который равен

$$\bar{r} = \bar{r}_{O_1} + \bar{r}_1, \quad (18.4)$$

где \bar{r}_{O_1} — радиус-вектор начала подвижной системы координат O_1 относительно неподвижной системы;

\bar{r}_1 — радиус-вектор точки M в подвижной системе координат.

Уравнение (18.2) называется векторным уравнением движения точки M плоской фигуры и в проекциях на оси неподвижной системы прямоугольных координат (рис. 18.3) записывается в виде:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_{O_1} + x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi; \\ y &= y_{O_1} + x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi, \end{aligned} \right\}$$

где x_{O_1} и y_{O_1} — координаты начала подвижной системы координат;
 x_1, y_1 — координаты точки M в подвижной системе координат;
 φ — угол поворота осей $O_1x_1y_1$ относительно Oxy .

§ 91. СКОРОСТИ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Скорость точки M плоской фигуры определяем с учетом равенства (18.3) по формуле

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}_{O_1}}{dt} + \frac{d\bar{r}_1}{dt}$$

или

$$\bar{v} = \bar{v}_{O_1} + \bar{v}_{MO_1}, \quad (18.5)$$

где $\bar{v}_{O_1} = \frac{d\bar{r}_{O_1}}{dt}$ — скорость точки O_1 (полюса);

$\bar{v}_{MO_1} = \frac{d\bar{r}_1}{dt}$ — скорость точки M во вращательном движении вокруг полюса O_1 (относительная скорость).

Отметим, что радиус-вектор \bar{r}_1 с течением времени изменяется только по направлению. Поэтому в соответствии с равенством (16.17)

$$\bar{v}_{MO_1} = \bar{\omega} \times \overline{O_1M} = \bar{\omega} \times \bar{r}_1,$$

где $\bar{\omega}$ — вектор угловой скорости, перпендикулярный плоскости фигуры; он направлен так, чтобы, глядя с его конца, вращение плоской фигуры по отношению к неподвижным осям координат представлялось происходящим против хода часовой стрелки.

Во все время движения оси $O_1x'y'$ остаются параллельными неподвижным осям Oxy , т. е. их переносное движение является поступательным. Вращательное движение осей $O_1x_1y_1$ вместе с фигурой вокруг полюса является относительным движением. Тогда

$$\bar{v} = \bar{v}_e + \bar{v}_r = \bar{v}_{O_1} + \bar{\omega} \times \bar{r}_1, \quad (18.6)$$

т. е. скорость любой точки фигуры при плоском движении равна геометрической сумме переносной поступательной скорости фигуры, равной скорости полюса и относительной скорости точки во

вращательном движении вокруг полюса. Рассмотрим частные случаи:

а) $\bar{\omega} = 0$ — движение поступательное $\bar{v} = \bar{v}_{O_1}$;

б) $\bar{v}_{O_1} = 0$ — вращательное движение вокруг неподвижной оси $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}_1$.

Относительная скорость $\bar{v}_{MO_1} = \bar{\omega} \times \bar{r}_1$ направлена всегда перпендикулярно $\bar{r}_1 = \overline{O_1M}$, потому ее проекция на $\bar{r}_1 = \overline{O_1M}$ равна нулю.

Используем это положение для доказательства того, что проекции скоростей двух точек плоской фигуры на направление прямой, соединяющей эти точки, равны между собой. Действительно, проектируя обе части уравнения (18.4) на направление O_1M , имеем

$$PP_{O_1M} \bar{v} = PP_{O_1M} \bar{v}_{O_1} + PP_{O_1M} \bar{v}_{MO_1},$$

но $PP_{O_1M} \bar{v}_{MO_1} = 0$, так как между \bar{v}_{MO_1} и O_1M угол 90° (рис. 18.4). Следовательно,

$$PP_{O_1M} \bar{v} = PP_{O_1M} \bar{v}_{O_1}. \quad (18.7)$$

Пример. Определить величины скорости v_B (поршня) и угловой скорости ω_{BA} шатуна AB кривошипно-шатунного механизма, представленного на рис. 18.7 в положении, когда шатун с кривошипом составляют прямой угол. Принять, что кривошип вращается с числом оборотов в минуту $n = \text{const}$.

Решение. Обозначим радиус кривошипа r , длину шатуна l , угол между OB и AB через β .

Определяем величину скорости

$$v_A = \omega \cdot OA = \omega r = \frac{\pi n}{30} r.$$

Находим величину скорости точки B , используя (18.7):

$$PP_{AB} \bar{v}_A = PP_{AB} \bar{v}_B \text{ или } v_A = v_B \cos \beta,$$

$$\text{откуда } v_B = \frac{v_A}{\cos \beta},$$

где

$$\cos \beta = \frac{l}{\sqrt{r^2 + l^2}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} \quad (\lambda = \frac{r}{l}).$$

Следовательно,

$$v_B = r\omega \sqrt{\lambda^2 + 1} = \frac{r\pi n}{30} \sqrt{\lambda^2 + 1}.$$

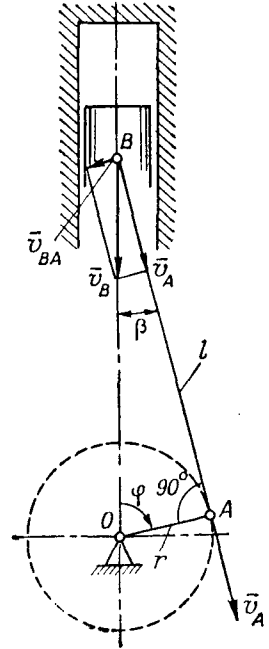


Рис. 18.7.

Определяем \bar{v}_{BA} — величину составляющей \bar{v}_B или относительную скорость точки B относительно точки A

$$v_{BA} = v_A \operatorname{tg} \beta = v_A \frac{r}{l} = \omega \frac{r^2}{l} = \frac{\pi n}{30} r \lambda.$$

Вычисляем величину угловой скорости шатуна ω_{BA} , учитывая, что

$$v_{BA} = \omega_{BA} l, \text{ откуда } \omega_{BA} = \frac{v_{BA}}{l} = \frac{\pi n}{30} \lambda^2.$$

§ 92. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ С ПОМОЩЬЮ МГНОВЕННОГО ЦЕНТРА СКОРОСТЕЙ

В соответствии с теоремой Эйлера всякое непоступательное движение плоской фигуры в ее плоскости может быть осуществлено одним поворотом вокруг некоторого центра, который был назван центром поворота. Обозначим эту точку буквой p .

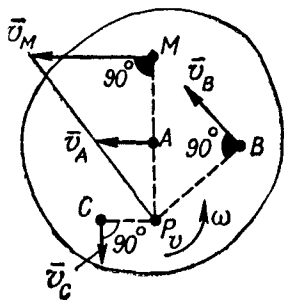


Рис. 18.8.

В каждый момент времени положение точки p как на неподвижной, так и на подвижной плоскости, связанной с телом, изменяется.

Точка плоскости, неизменно связанной с фигурой, скорость которой в данный момент времени равна нулю, называется мгновенным центром скоростей*.

Рассмотрим движение плоской неизменяемой фигуры в ее плоскости.

Выберем полюс в мгновенном центре скоростей ($\bar{v}_p = 0$).

Тогда скорость любой точки M плоской фигуры будет равна

$$\bar{v}_M = \bar{v}_p + \bar{v}_{MP} = \bar{v}_{MP} = \bar{\omega} \times \overline{PM}$$

или, учитывая, что $\omega \perp PM$,

$$|\bar{v}_M| = |\bar{\omega}| \cdot PM. \quad (18.8)$$

Из равенства (18.8) следует, что величина скорости любой точки M плоской фигуры (рис. 18.8), совершающей плоскопараллельное движение, равна модулю угловой скорости фигуры, умноженному на расстояние от точки до мгновенного центра скоростей p_v . Скорость точки направлена в сторону вращения фигуры перпендикулярно радиусу-вектору, проведенному из полюса p_v в точку, скорость которой определяется.

Таким образом, скорости точек фигуры при плоском движении (рис. 18.8) можно рассматривать как вращательные скорости вокруг мгновенного центра скоростей, который является центром вра-

* Мгновенный центр скоростей в дальнейшем будем обозначать p_v .

щения плоской фигуры. Рассмотрим некоторые практические способы определения положения мгновенного центра скоростей.

1. В данный момент времени известны направления скоростей двух точек A и B фигуры, при этом скорости не перпендикулярны

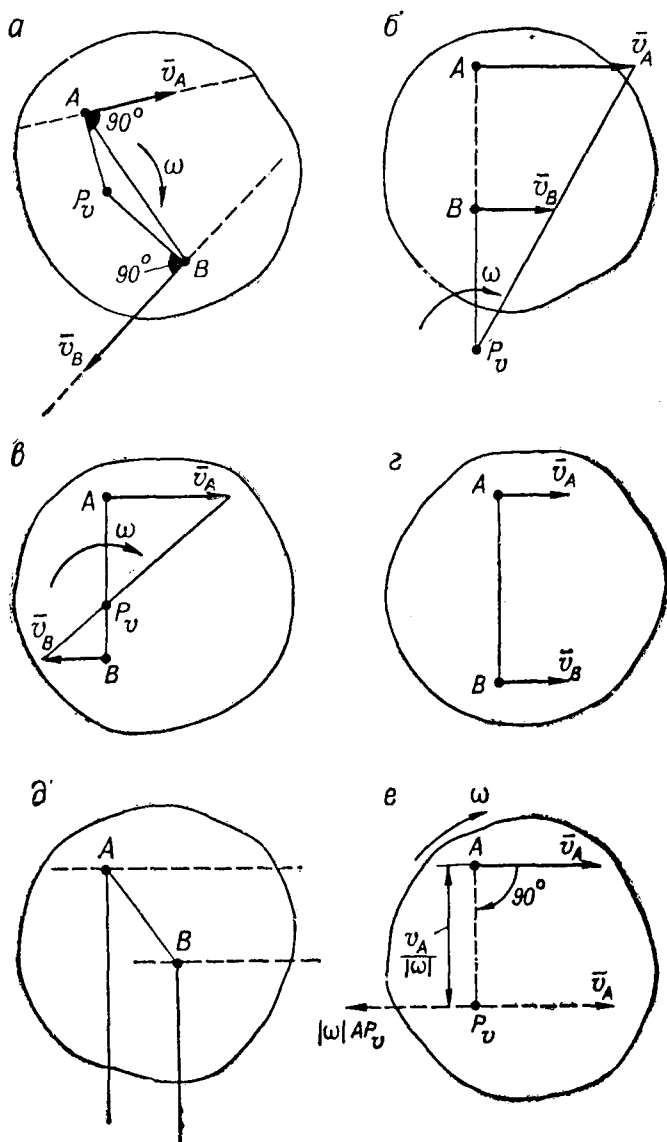


Рис. 18.9.

прямой AB , соединяющей эти точки (рис. 18.9, а). Мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения перпендикуляров к направлениям скоростей \vec{v}_A и \vec{v}_B , восстановленных в точках A и B .

2. В данный момент времени известны скорости двух точек A и B фигуры, при этом \bar{v}_A и \bar{v}_B перпендикулярны прямой AB , соединяющей эти точки, тогда:

а) если скорости \bar{v}_A и \bar{v}_B направлены в одну сторону и не равны друг другу ($v_A \neq v_B$), мгновенный центр скоростей лежит в точке пересечения продолжения AB и прямой, проходящей через концы векторов \bar{v}_A и \bar{v}_B (рис. 18.9, б), при этом

$$AB = Ap_v - p_v B;$$

б) если \bar{v}_A и \bar{v}_B направлены в противоположные стороны (рис. 18.9, в), то мгновенный центр скоростей находится в точке, полученной пересечением прямой AB и прямой, проходящей через концы \bar{v}_A и \bar{v}_B , при этом

$$AB = Ap_v + p_v B;$$

в) если \bar{v}_A и \bar{v}_B направлены в одну сторону и равны между собой в любой момент времени (рис. 18.9, г), фигура движется поступательно. Мгновенный центр скоростей находится в бесконечности.

3. В данный момент времени известны скорости двух точек A и B фигуры, которые параллельны и направлены в одну сторону, но точка B не лежит на перпендикуляре, проведенном к скорости \bar{v}_A в точке A (рис. 18.9, д).

Мгновенный центр скоростей в данный момент времени не существует. Движение называется мгновенно-поступательным, вращение фигуры отсутствует, скорости всех точек фигуры в данный момент времени равны.

4. В данный момент времени заданы скорость одной точки A плоской фигуры, величина (модуль) угловой скорости ω и направление вращения фигуры. Мгновенный центр скоростей p_v расположен на перпендикуляре (рис. 18.9, е) к \bar{v}_A , при этом длина отрезка Ap_v , равная расстоянию от точки A до p_v , определяется из равенства

$$Ap_v = \frac{v_A}{\omega}.$$

Угол, равный $\pi/2$, отсчитывается от \bar{v}_A в направлении, совпадающем с направлением вращения фигуры. В том случае, когда известны скорость какой-либо точки фигуры, например A , и положение мгновенного центра скоростей, величина угловой скорости фигуры определится из равенства

$$\omega = \frac{v_A}{Ap_v}.$$

Скорость любой точки B плоской фигуры по модулю будет равна $v_B = \omega Bp_v$ и направлена в сторону вращения фигуры.

Пример. На рис. 18.10 представлен кривошипно-шатунный механизм (КШМ) в положении, когда кривошип повернут на угол φ . Заданы размеры механизма и угловая скорость ω кривошипа. Определить положение мгновенного центра скоростей P шатуна AB , а также модули и направления скоростей точек B , D и E механизма.

Решение. Определяем положение мгновенного центра скоростей шатуна AB . Направления скоростей точек A и B известны, $\vec{v}_A \perp OA$, скорость \vec{v}_B направлена по OB . Проводим прямые, перпендикулярные скоростям точек A и B . Они пересекаются в точке P , которая является мгновенным центром скоростей шатуна AB .

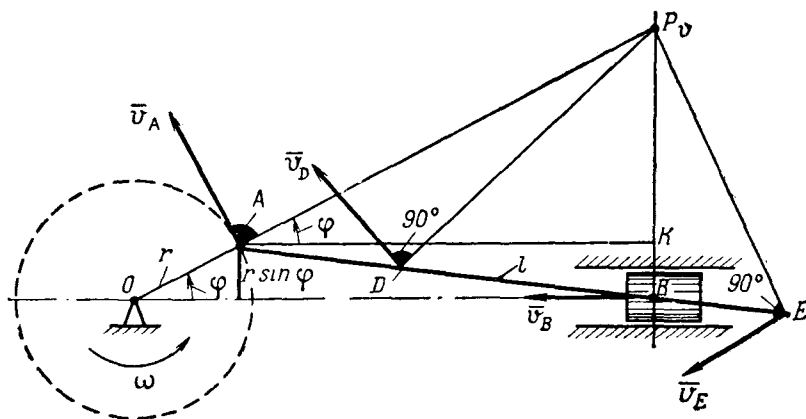


Рис. 18.10.

Определяем величину угловой скорости шатуна ω_{BA} из условия

$$v_A = \omega_{BA} \cdot p_{vA}, \text{ откуда } \omega_{BA} = \frac{v_A}{p_{vA}} = \frac{r\omega}{p_{vA}},$$

где p_{vA} может быть определена из чертежа с учетом масштаба построений либо аналитически:

$$p_{vA} = \frac{AK}{\cos \varphi} = \frac{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi}.$$

После подстановки значения p_{vA} в равенство (18.9), обозначая, как и ранее, $\lambda = \frac{r}{l}$, получим

$$\omega_{AB} = \frac{r\omega \cos \varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\lambda\omega \cos \varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Находим величину \vec{v}_B — скорость точки B поршня, которая направлена так, как показано на рис. 18.10, и численно равна $v_B = |\omega_{AB}| p_{vB}$. Величина p_{vB} также может быть определена либо из чертежа с учетом масштаба, либо аналитически

$$p_{vB} = p_{vK} + KB = p_{vA} \sin \varphi + OA \sin \varphi = \text{tg } \varphi \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi} + r \sin \varphi.$$

Определяем величину v_D ; скорость точки D шатуна перпендикулярна p_{vD} (рис. 18.9) и численно равна $v_D = \omega_{AB} p_{vD}$. Длину p_{vD} определяем из чертежа с учетом масштаба. Значения скоростей точек B , D , E и др. шатуна можно

определить также с помощью следующих равенств, в которые не входит масштаб построений:

$$v_B = v_A \frac{p_v B}{p_v A}; \quad v_D = v_A \frac{p_v D}{p_v A}; \quad v_E = v_A \frac{p_v E}{p_v A}.$$

где $p_v A, p_v B, p_v D, p_v E$ — расстояния от мгновенного центра скоростей до соответствующих точек шатуна, которые берутся из чертежа.

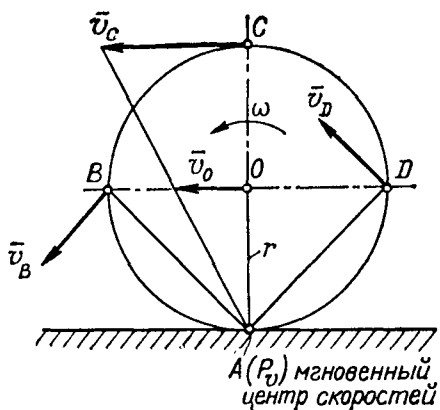


Рис. 18.11.

На практике встречается ряд механизмов, в которых плоские фигуры без скольжения катятся друг по другу. Если одна из этих фигур неподвижна, то мгновенный центр скоростей находится в точке их касания.

Так, на рис. 18.11 представлен цилиндр, который катится без скольжения по плоскости со скоростью v_0 . Мгновенный центр скоростей находится в точке A , так как $\bar{v}_A = 0$. Обозначая величину угловой скорости цилиндра ω , можно записать

$$\omega \cdot r = v_0, \text{ откуда } \omega = \frac{v_0}{r}.$$

Значения скоростей других точек будут соответственно равны:

$$v_B = \omega \cdot AB = \omega r \sqrt{2}; \quad v_C = \omega \cdot CA = \omega \cdot 2r \text{ и т. д.}$$

Направления скоростей представлены на рис. 18.11,

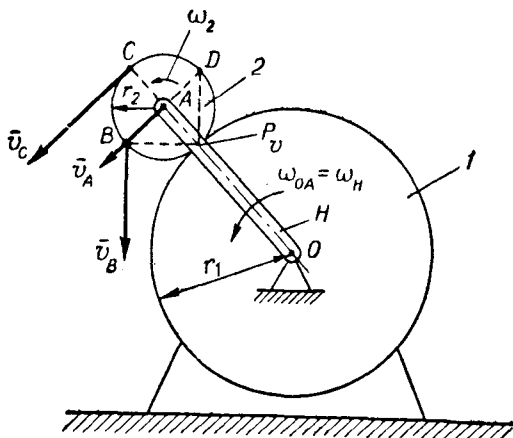


Рис. 18.12.

Пример. Механизм, представленный на рис. 18.12, называется планетарным. Он состоит из двух колес 1 и 2 и водила $H=OA$, связывающего эти

колеса. Колесо 1 радиусом $r_1=0,3$ м неподвижно. Подвижное колесо 2 (сателлит) радиусом $r_2=0,1$ м насажено на палец A водила H и катится без скольжения по неподвижному колесу 1. Определить величину (модуль) угловой скорости ω_2 колеса 2, если угловая скорость водила $\omega_H=5$ рад/с.

Решение. Находим положение мгновенного центра скоростей колеса 2. Оно совпадает с точкой касания колес 1 и 2, скорость которой равна нулю.

Определяем величину скорости точки A пальца водила. Она равна

$$v_A = \omega_H OA = \omega_H (r_1 + r_2) = 5 (0,3 + 0,1) = 2,0 \text{ м/с.}$$

Находим величину угловой скорости $|\omega_2|$ колеса 2; она определяется из равенства

$$v_A = \omega_2 \cdot r_2,$$

откуда

$$\omega_2 = \frac{v_A}{r_2} = \omega_H \frac{r_1 + r_2}{r_2} = 5 \frac{0,3 + 0,1}{0,1} = 20 \text{ рад/с.}$$

Направления вращения колеса 2 и водила H совпадают.

Величины и направления скоростей точек B, C, D колеса 2 определяются подобно тому, как это было выполнено для точек катящегося цилиндра (рис. 18.11).

§ 93. ПЛАН СКОРОСТЕЙ

В параграфе изложен графический метод решения задачи определения скоростей точек плоской фигуры с помощью плана скоростей. Планом скоростей называется диаграмма, на которой изо-

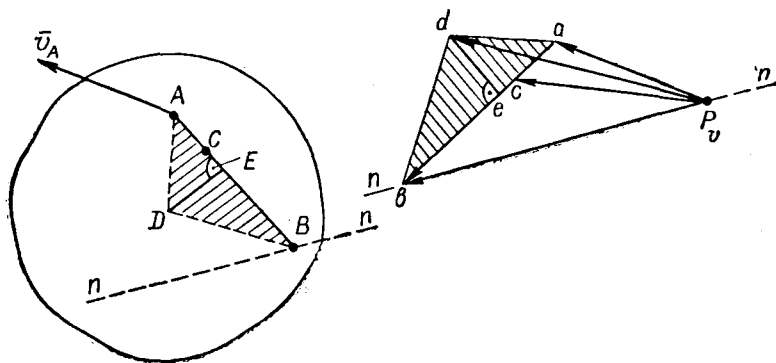


Рис. 18.13.

бражены скорости точек движущейся фигуры в данный момент времени.

Рассмотрим графическое решение следующей задачи. В некоторый момент времени известна скорость v_A точки A движущейся фигуры (рис. 18.13) и прямая $n-n$, вдоль которой направлена скорость другой точки B фигуры. По этим данным должна быть определена скорость точки B и любой другой точки фигуры. Выбираем произвольную точку p_v — полюс вне фигуры и масштаб скоростей μ_v , исходя из величины скорости v_A . Откладываем в выбранном масштабе $p_v a = v_A$.

Далее проводим через полюс линию, параллельную $n-n$, вдоль которой направлена скорость точки B , а через точку a (конец вектора $\overline{p_v a}$) линию, перпендикулярную прямой AB . Точку их пересечения обозначим буквой b . Из построений следует, что

$$\overline{p_v b} = \overline{p_v a} + \overline{ab}. \quad (*)$$

С другой стороны, скорость $\overline{v_B}$, принимая за полюс фигуры точку A в соответствии с формулой (17.4), будет

$$\overline{v_B} = \overline{v_A} + \overline{v_{BA}}. \quad (**)$$

Из сопоставления векторных уравнений (*) и (**) и в соответствии с построениями следует, что $\overline{p_v a} \parallel \overline{v_A}$; $\overline{ab} \parallel \overline{v_{BA}}$; $\overline{p_v b} \parallel \overline{v_B}$. С учетом масштаба $\overline{p_v a} = \overline{v_A}$. Следовательно, в масштабе скоростей

$$\overline{p_v b} = \overline{v_B}; \quad \overline{ab} = \overline{v_{BA}}.$$

Модуль угловой скорости фигуры определяется из условия, что величина скорости точки B во вращательном движении вокруг точки A равна $v_{BA} = \omega \cdot AB$, откуда $\omega = \frac{v_{BA}}{AB}$,

где AB — длина отрезка, соединяющего точки A и B .

Зная угловую скорость фигуры и скорость $\overline{v_A}$, можно определить скорость любой точки фигуры. Так, скорость точки C , лежащей на прямой AB , будет определяться с помощью равенства

$$\overline{v_C} = \overline{v_A} + \overline{v_{CA}},$$

где $v_{CA} = \omega \cdot AC = v_{BA} \frac{AC}{AB}$, т. е. определяется делением отрезка ab в отношении $AC : AB$ (рис. 18.13). Для определения скорости точки D фигуры, не лежащей на прямой AB , производим построения, исходя из того, что $\overline{v_D} = \overline{v_A} + \overline{v_{DA}}$, когда полюс выбираем в точке A ; $\overline{v_D} = \overline{v_B} + \overline{v_{DB}}$, когда полюс выбираем в точке B , где $\overline{v_{DA}} \perp DA$ и $\overline{v_{DB}} \perp DB$.

Продолжая построения, проводим из точки a линию, перпендикулярную DA , а из точки b линию, перпендикулярную DB . Точку пересечения обозначим буквой d . Прямая, соединяющая полюс с точкой, определяет $\overline{v_D}$ в масштабе чертежа. Многоугольник $p_v ab d$ называется планом скоростей звена.

Таким образом, планом скоростей звена называется графическое построение, представляющее собой плоский пучок, лучи которого, выходя из полюса p_v , изображают абсолютные скорости точек звена плоского механизма, а отрезки, соединяющие концы лучей, — относительные скорости соответствующих точек при данном положении звена.

Из построений следует, что любая фигура, полученная на плане скоростей (треугольник, многоугольник) и обозначенная малыми буквами, подобна соответствующей фигуре, обозначенной большими

ми буквами на чертеже тела (звена), и повернута относительно нее на 90° в направлении вращения.

Поэтому для определения скорости любой точки D , не лежащей на AB , достаточно соединить эту точку с точками A и B и построить на плане скоростей треугольник abd , подобный заштрихованному треугольнику ABD тела; вектор $p_v d$ в масштабе чертежа будет соответствовать v_D .

Совокупность планов скоростей звеньев механизма с одним общим полюсом называется планом скоростей механизма.

Такое построение не подобно механизму, хотя каждое звено механизма в отдельности подобно соответствующим отрезкам плана. Положение звеньев во время движения механизма все время изменяется, поэтому для исследования кинематики механизма план скоростей обычно строят для нескольких положений механизма (обычно 8—12) на один цикл.

Пример. Определить с помощью плана скоростей скорости точек B , C и D кривошипно-шатунного механизма (рис. 18.14), если известна величина угловой скорости кривошипа $\omega = \text{const}$ и размеры кривошипно-шатунного механизма. Определить угловую скорость шатуна.

Решение. Строим в масштабе μ_v план кривошипно-шатунного механизма. Определяем величину скорости точки A

$$v_A = \omega \cdot OA.$$

Выбираем масштаб скорости μ_v и полюс p_v . Откладываем из полюса в выбранном масштабе скорость $\bar{v}_A = p_v a$.

Определяем скорость точки B , для чего проводим через полюс прямую, параллельную OB , а через конец a вектора $p_v a$ линию, перпендикулярную AB . Точка их пересечения определяет положение точки b . Скорость точки B шатуна (поршня) механизма будет равно $\bar{v}_B = \mu_v p_v b$.

Определяем скорость точек C и D шатуна в соответствии с правилами, изложенными выше.

Находим величину угловой скорости шатуна по равенству

$$\omega_{BA} = \frac{|\bar{v}_{BA}|}{AB} \text{ рад/с.}$$

Приложив вектор \bar{v}_{BA} к точке B на схеме механизма, определяем направление вращения шатуна.

§ 94. УСКОРЕНИЯ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Рассмотрим, как определить ускорения точек плоской фигуры. В соответствии с определением ускорение точки равно

$$\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt},$$

где \bar{v} — скорость точки M плоской фигуры, она равна (18.6)

$$\bar{v} = \bar{v}_{O_1} + \bar{\omega} \times \bar{r}_1.$$

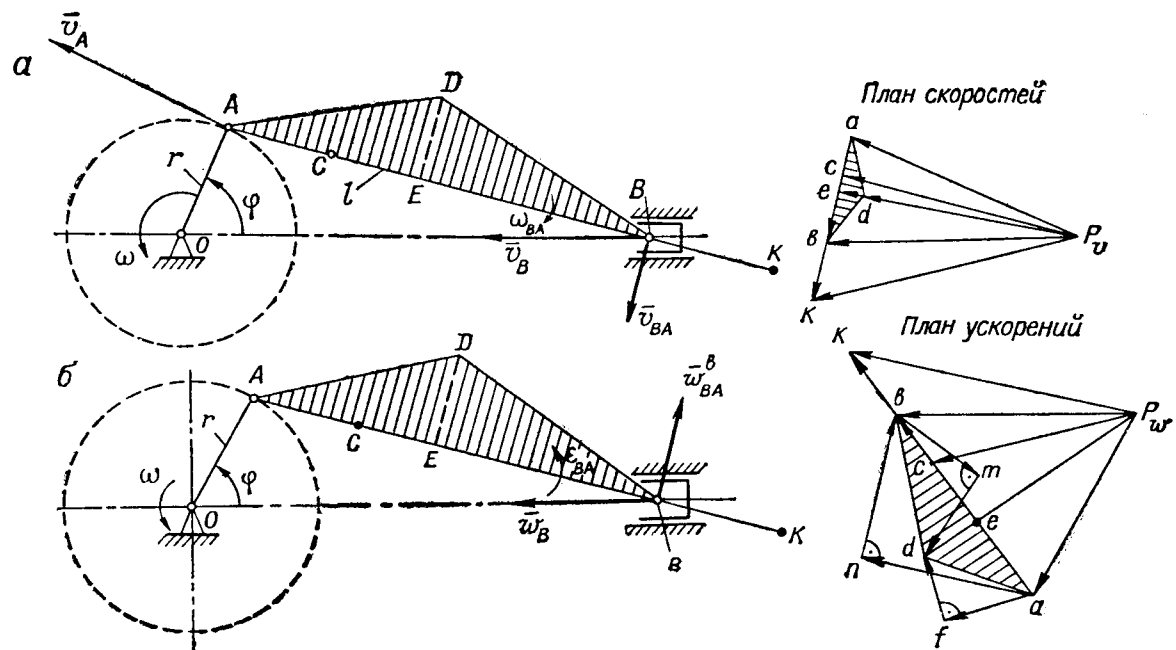


Рис. 18.14.

Следовательно,

$$\bar{\omega} = \frac{d\bar{v}_{O_1}}{dt} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}_1 + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}_1}{dt}$$

или

$$\bar{\omega} = \frac{d\bar{v}_{O_1}}{dt} + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_1 + \bar{\omega} \times \bar{v}_{MO_1}.$$

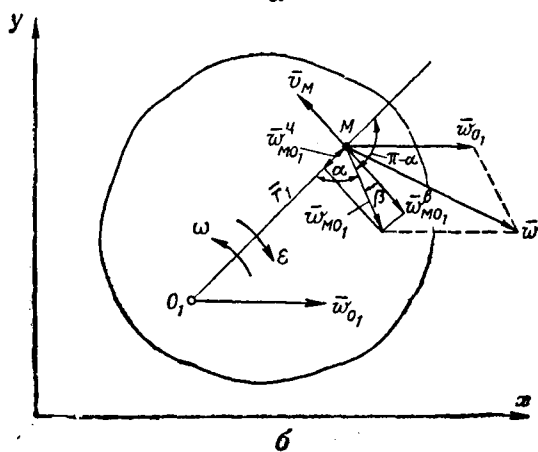
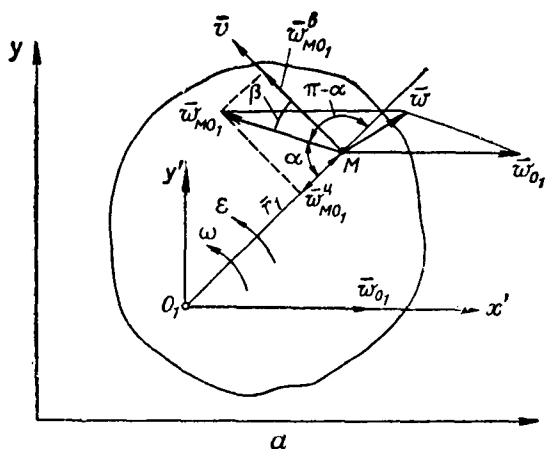


Рис. 18.15.

Обозначим (рис. 18.15):

$\frac{d\bar{v}_{O_1}}{dt} = \bar{\omega}_e = \bar{\omega}_{O_1}$ — переносное ускорение, равное ускорению полюса O_1 ; так как оси $O_1x'y'$ движутся поступательно, то $\bar{\omega}_{O_1}$ является ускорением поступательного движения плоской фигуры;

$\bar{\varepsilon} \times \bar{r}_1 = \bar{\omega}_{MO_1}^B = \bar{\omega}_r^B$ — вращательное ускорение точки M фигуры при ее вращении вокруг полюса O_1 ;

$\bar{\omega} \times \bar{v}_{MO_1} = \bar{\omega}_{MO_1}^u = \bar{\omega}_r^u$ — центростремительное ускорение точки M фигуры при ее вращении вокруг полюса O_1 .

Тогда полное ускорение будет $\bar{w} = \bar{w}_e + \bar{w}_r = \bar{w}_e + \bar{\omega}_e^u + \bar{\omega}_r^B$ или

$$\bar{w} = \bar{w}_{O_1} + \bar{\omega}_{MO_1}^B + \bar{\omega}_{MO_1}^u. \quad (18.9)$$

Ускорение любой точки фигуры, совершающей плоское движение, равно геометрической сумме переносного поступательного ускорения движения всей плоской фигуры, равному ускорению полюса w_{O_1} , и относительного ускорения w_{MO_1} точки M во вращательном движении вокруг полюса.

Вектор вращательного ускорения $\bar{\omega}_{MO_1}^B$ направлен перпендикулярно $\bar{r}_1 = \overline{O_1M}$ и в зависимости от характера движения либо совпадает (рис. 18.15, а) с направлением вектора скорости \bar{v}_{MO_1} (ускоренное движение), либо направлен в противоположную (рис. 18.15, б) сторону (замедленное движение).

Вектор центростремительного ускорения $\bar{\omega}_{MO_1}^u$ направлен всегда от точки M к полюсу O_1 .

Модули составляющих относительного ускорения будут равны:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{MO_1}^u &= \omega^2 r_1; \\ \omega_{MO_1}^B &= |\varepsilon| \cdot r_1, \end{aligned} \right\} \quad (18.9, a)$$

где $\bar{r}_1 = \overline{O_1M}$.

Полное относительное ускорение точки M во вращательном движении вокруг полюса O_1 равно геометрической сумме составляющих

$$\bar{w}_{MO_1} = \bar{\omega}_{MO_1}^u + \bar{\omega}_{MO_1}^B, \quad (18.10)$$

где

$$\bar{\omega}_{MO_1}^u \perp \bar{\omega}_{MO_1}^B.$$

Модуль w_{MO_1} определяется из равенства

$$w_{MO_1} = \sqrt{(\omega_{MO_1}^u)^2 + (\omega_{MO_1}^B)^2}.$$

Учитывая формулы (18.9, а), получим

$$w_{MO_1} = r_1 \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \quad (18.11)$$

Обозначим острый угол между $\overline{\omega}_{MO_1}$ и направлением $\overline{MO_1}$ через α . Тогда (рис. 18.15)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega^B_{MO_1}}{\omega^H_{MO_1}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (18.12)$$

Из формулы (18.12) следует, что в данный момент времени для всех точек фигуры угол α будет одинаковым.

Подставляя из (18.10) в (18.9), получим

$$\overline{\omega}_M = \overline{\omega}_{O_1} + \overline{\omega}_{MO_1}.$$

§ 95. ПОНЯТИЕ О МГНОВЕННОМ ЦЕНТРЕ УСКОРЕНИЙ

В любой момент времени при плоскопараллельном движении может существовать точка плоской фигуры, ускорение которой равно нулю. Эта точка называется мгновенным центром ускорений.

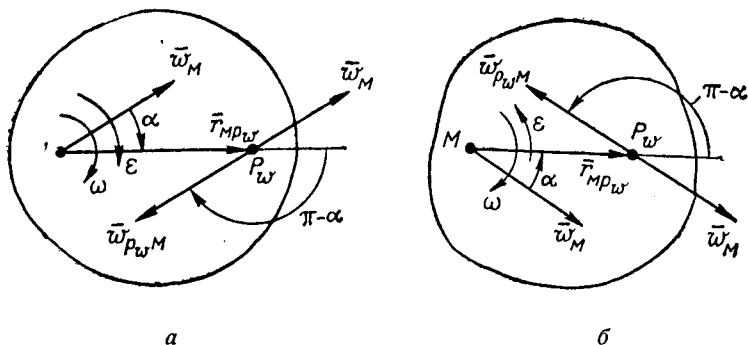


Рис. 18.16.

Убедимся, что такая точка существует, и определим ее положение, если будет известно ускорение какой-либо точки фигуры и угол α , определяемый по формуле (18.12).

Допустим, что нам известно ускорение точки M плоской фигуры ω_M , направление и характер ее вращения, например ускоренное (рис. 18.16, а). Тогда отложим от вектора $\overline{\omega}_M$ под углом α в сторону вращения фигуры отрезок, равный

$$|r_{MP_w}| = \frac{|\omega_M|}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \quad (18.13)$$

Конечная точка этого отрезка и будет мгновенным центром ускорений p_w . Действительно, по формуле (18.11)

$$\omega_{p_w M} = r_{MP_w} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \omega_M.$$

С другой стороны, по построению эти векторы противоположны по направлению. Следовательно,

$$\overline{\omega}_{p_w} = \overline{\omega}_{MP_w} + \overline{\omega}_M = 0,$$

т. е. точка p_w будет мгновенным центром ускорений (МЦУ). На рис. 18.16 представлено, как определять положение точки p_w для ускоренного (рис. 18.16, а) и замедленного (рис. 18.16, б) вращения в том случае, когда задано ускорение одной точки фигуры и угол α .

Определение мгновенного центра ускорений упрощается, если заданы ускорения одновременно двух точек A и B фигуры. Построение представлено на рис. 18.17. Принимаем, что ускорения $\vec{\omega}_A$ и $\vec{\omega}_B$ заданы. Определяем $\vec{\omega}_{BA} = \vec{\omega}_B - \vec{\omega}_A$, а затем угол $\pi - \alpha$, отсчитываемый от \vec{r}_{AB} к $\vec{\omega}_{BA}$.

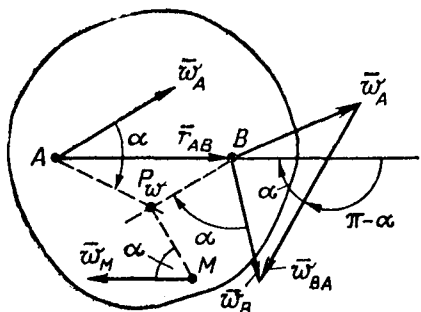


Рис. 18.17.

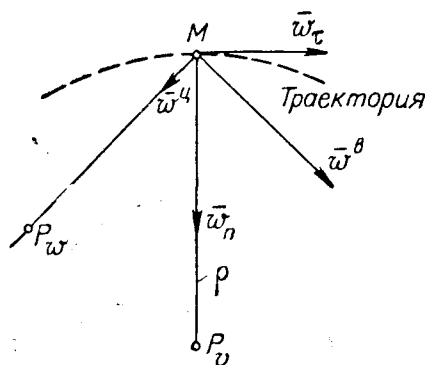


Рис. 18.18.

В этом же направлении в случае ускоренного движения откладываем угол α от $\vec{\omega}_A$ и от $\vec{\omega}_B$ и проводим прямые (показаны пунктиром) до пересечения их в точке p_w — мгновенном центре ускорений. Принимая за полюс точку p_w , получаем, что ускорение любой точки фигуры будет складываться из вращательного и центростремительного ускорений во вращательном движении точки вокруг p_w . Таким образом, например, для точки M фигуры

$$\omega_M = p_w M \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (18.14)$$

Полное ускорение любой точки плоской фигуры в данный момент времени по величине пропорционально расстоянию от этой точки до мгновенного центра ускорений и направлено под одинаковым для всех точек фигуры углом к радиусу-вектору, соединяющему рассматриваемую точку с мгновенным центром ускорений.

Касательное $\vec{\omega}_\tau$ и нормальное $\vec{\omega}_n$ ускорения точки M (рис. 18.18) направлены соответственно по касательной и по главной нормали к траектории, т. е. перпендикулярно и вдоль $p_v M$ (где p_v — мгновенный центр скоростей).

Вращательное $\vec{\omega}^B$ и центростремительное $\vec{\omega}^C$ ускорения направлены соответственно перпендикулярно и вдоль $M p_w$ (где p_w — мгновенный центр ускорений).

§ 96. ПЛАН УСКОРЕНИЙ

Ниже излагается графический метод решения задачи определения ускорений точек плоской фигуры с помощью плана ускорений. Планом ускорений называется диаграмма, на которой изображены ускорения точек фигуры в данный момент времени. Пусть для звена AB известны \vec{v}_A , \vec{v}_B , $\vec{\omega}_A$ — требуется определить $\vec{\omega}_B$ (рис. 18.19).

Неизвестное ускорение точки B звена определяется исходя из векторного равенства (18.9)

$$\vec{\omega}_B = \vec{\omega}_A + \vec{\omega}_{BA}^u + \vec{\omega}_{BA}^b,$$

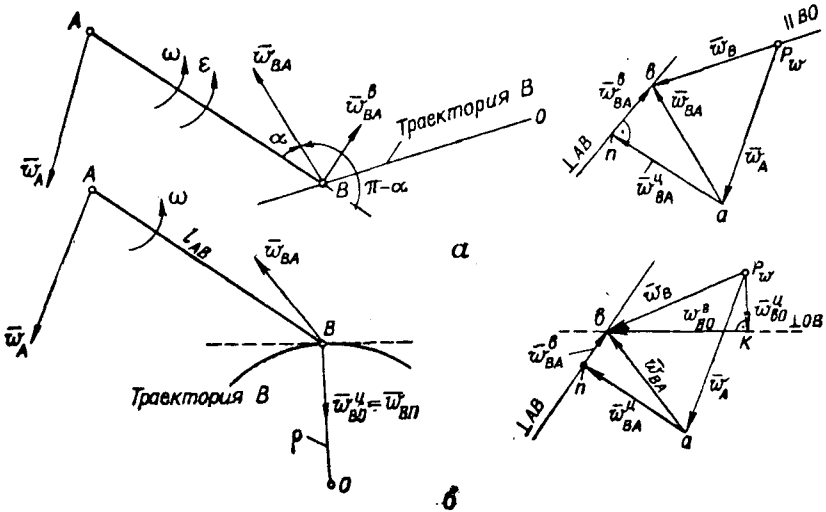


Рис. 18.19.

- где $\vec{\omega}_A$ — вектор ускорения точки A (известен);
 $\vec{\omega}_{BA}^u$ — вектор, направленный от точки B к точке A , величина которого также известна;
 $\omega_{BA}^u = \frac{v_{BA}^2}{AB}$, где \vec{v}_{BA} — скорость точки B во вращательном движении вокруг A , определяется из плана скоростей;
 $\vec{\omega}_{BA}^b$ — вектор, перпендикулярный AB , величина которого неизвестна;
 $\vec{\omega}_B$ — неизвестный вектор ускорения точки B звена AB .

Выбираем полюс p_w плана ускорений вне фигуры и масштаб ускорений μ_w . Отложим в масштабе μ_w из полюса p_w вектор $p_w a$, соответствующий $\vec{\omega}_A$, из точки a вектор an , соответствующий в масштабе ускорению $\vec{\omega}_{BA}^u$. Далее из точки n проводим прямую,

перпендикулярную AB , на которой и должна лежать искомая точка b , соединив которую с полюсом, получим в масштабе ускорения \overline{w}_B точки B .

Для отыскания положения точки b пользуемся дополнительными данными, которые должны быть заданы.

Известна траектория точки B — прямая BO , вдоль которой направлено \overline{w}_B (рис. 18.19, а). Тогда проводим через p_w прямую параллельно направлению ускорения \overline{w}_B , т. е. параллельно OB . Точка пересечения этой прямой с прямой, перпендикулярной AB , определяет положение точки b .

Известен радиус кривизны ρ траектории в точке, в которой находится в данный момент точка B . Тогда, зная величину v_B из плана скоростей, определяем величину центростремительного * ускорения \overline{w}_{BO}^u точки по формуле $\overline{w}_{BO}^u = \frac{v_B^2}{\rho}$, которое направлено к центру кривизны. Откладываем из полюса в масштабе (рис. 18.19, б) вектор $\overline{w}_{BO}^u = p_w k$, а из его конца проводим прямую, перпендикулярную $p_w k$, по этой прямой направлено вращательное * (касательное) ускорение \overline{w}_{BO}^B точки B . Точка пересечения ее с прямой, перпендикулярной AB , определяет положение точки b , т. е. дает в масштабе построений ускорение $\overline{w}_B = \overline{w}_{BO}^u + \overline{w}_{BO}^B$. Величина углового ускорения ϵ_{BA} звена AB определяется из равенства

$$\epsilon_{BA} = \frac{\overline{w}_{BA}^B}{BA} = \frac{nb \nu_w}{BA}. \quad (18.15)$$

Многоугольник $p_w a n b$ называется планом ускорений звена.

Таким образом, планом ускорения звена называется графическое построение, представляющее собой плоский пучок, лучи которого, выходя из полюса p_w , изображают абсолютные ускорения точек звена плоского механизма, а отрезки, соединяющие концы лучей, — относительные ускорения соответствующих точек при данном положении звена.

Из построений следует, что вектор \overline{ab} на плане подобен отрезку AB и повернут на угол $\pi - \alpha$ к AB в направлении вращения тела, если это вращение ускоренное ($\omega \epsilon > 0$) и в противоположном направлении, если вращение замедленное ($\omega \epsilon < 0$), где угол α определяется из построений.

План ускорения механизма представляет совокупность планов ускорений звеньев механизма с одним общим полюсом.

Пример. Определить ускорения точек B, C кривошипно-шатунного механизма, для которых были определены скорости (рис. 18.14) с помощью плана ускорения. Определить величину углового ускорения шатуна ϵ_{BA} .

* В данном случае $\overline{w}_{BO}^B = \overline{w}_{B\tau}$ и $\overline{w}_{BO}^u = \overline{w}_{B\pi}$.

Решение. Определяем ускорение точки A кривошипа по равенству $\overline{w}_A = \overline{w}_A^B + \overline{w}_A^u = \overline{w}_A^u$, где $\overline{w}_A^B = 0$ ($\omega = \text{const}$), а $\overline{w}_A^u = \omega^2 r$.

Выбираем масштаб плана ускорений, задавая длину вектора $\overline{p_w a}$, изображающего \overline{w}_A . Тогда если, например, принять $|\overline{p_w a}| = 40$ мм; $|\overline{w}_A| = 80$ м/с², масштаб μ_w будет

$$\mu_w = \frac{|\overline{w}_A|}{p_w a} = \frac{80}{40} = 2 \text{ мс}^{-2}/\text{мм}.$$

Выбираем полюс p_w (рис. 18.14) и из него откладываем $\overline{p_w a}$. Определяем величину центростремительного ускорения \overline{w}_{BA}^u по формуле

$$\overline{w}_{BA}^u = \frac{v_{BA}^2}{AB},$$

где скорость \overline{v}_{BA} известна из плана скоростей. Откладываем от точки a вектор ускорения \overline{w}_{BA}^u в масштабе μ_w параллельно шатуну в направлении от точки B к точке A . Получаем точку n .

Проводим через точку n прямую, перпендикулярную AB , на которой должна находиться точка b .

Проводим через полюс p_w прямую, параллельную OB , до пересечения с прямой, перпендикулярной AB , учитывая, что точка B шатуна движется горизонтально, а следовательно, ее ускорение будет направлено по горизонтальной прямой OB . Полученную точку пересечения b соединяем с полюсом. Тогда вектор $\overline{p_w b}$ в масштабе чертежа изображает ускорение \overline{w}_B , т. е.

$$\overline{w}_B = \mu_w \cdot \overline{p_w b}.$$

Ускорение точки B относительно A будет

$$\overline{w}_{BA} = \overline{w}_{BA}^u + \overline{w}_{BA}^B. \quad (18.16)$$

\overline{w}_{BA} на чертеже соответствует \overline{ab} , а \overline{w}_{BA}^B соответствует \overline{nb} .

Находим величину (модуль) углового ускорения шатуна из равенства

$$\varepsilon_{BA} = \frac{w_{BA}^B}{l_{AB}} = \frac{\mu_w nb}{l_{AB}},$$

где l_{AB} — длина шатуна.

Отметим, что $\overline{w}_{BA} = \overline{w}_{BA}^u + \overline{w}_{BA}^B$ соответствует на плане ускорений \overline{ab} и по модулю равно

$$w_{BA} = l_{AB} \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}.$$

Определяем ускорение произвольной точки C шатуна, используя геометрическое равенство $\overline{w}_C = \overline{w}_A + \overline{w}_{CA}$, где $w_{CA} = l_{AC} \times \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$.

На плане ускорений отрезок ab делим в отношении $\frac{l_{AC}}{l_{AB}}$, полученную точку C соединяем с полюсом. Вектор $\overline{p_w C}$ в масштабе чертежа изображает $\overline{\omega_C}$.

Для определения ускорения точки D можно пользоваться двумя векторными равенствами, а именно:

$$\left. \begin{aligned} \overline{\omega_D} &= \overline{\omega_A} + \overline{\omega_{DA}} = \overline{\omega_A} + \overline{\omega_{DA}^u} + \overline{\omega_{DA}^b}; \\ \overline{\omega_D} &= \overline{\omega_B} + \overline{\omega_{DB}} = \overline{\omega_B} + \overline{\omega_{DB}^u} + \overline{\omega_{DB}^b}. \end{aligned} \right\} \quad (18.17)$$

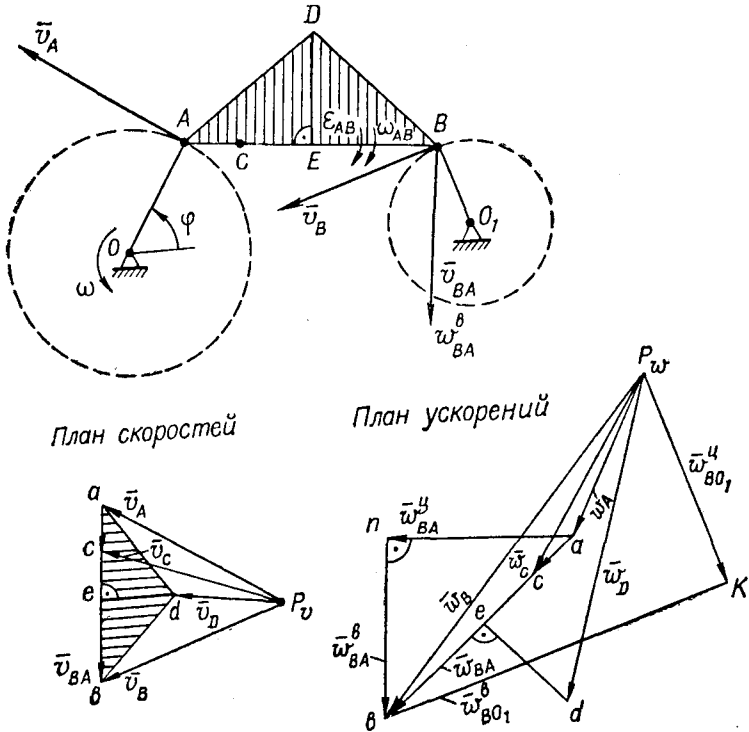


Рис. 18.20.

В этих равенствах известны $\overline{\omega_A}$; $\overline{\omega_B}$; $\overline{\omega_{DA}^u}$ и $\overline{\omega_{DB}^u}$.

Ускорения $\overline{\omega_{DA}^b}$ и $\overline{\omega_{DB}^b}$ неизвестны по величине, но известны их направления. Откладываем в масштабе чертежа $\overline{\omega_{DA}^u} = ae$; $\overline{\omega_{DB}^u} = = bm$, где $\omega_{DA}^u = \frac{v_{DA}^2}{DA}$ и $\omega_{DB}^u = \frac{v_{DB}^2}{DB}$ определяются с помощью плана скоростей.

Из точек m и f проводим прямые, перпендикулярные соответственно bm и af . Точка пересечения d дает возможность определить вектор $\overline{\omega_d}$, который в масштабе построений изображается вектором $\overline{p_w d}$.

Отметим, что если из точки e плана ускорений восстановить перпендикуляр, на котором отложить отрезок ed , величина которого будет $ed = ED \frac{ab}{AB}$, то ускорение

$$\overline{w}_D = \mu_w \overline{P_w d}.$$

Переносим в точку B механизма вектор \overline{nb} , который изображает в масштабе \overline{w}_{BA}^B . Это дает нам возможность определить направление углового ускорения шатуна ϵ_{AB} . Из сопоставления направлений ω_{AB} и ϵ_{AB} видно, что шатун в этом положении движется замедленно, так как $\omega_{AB}\epsilon_{AB} < 0$.

В качестве примера на рис. 18.20 приведен четырехшарнирный механизм, у которого кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = \text{const}$. В соответствии с правилами, изложенными выше, построены план скоростей и план ускорений. Шатун в рассматриваемый момент времени движется ускоренно, так как $\omega_{AB}\epsilon_{AB} > 0$. Ускорения точек механизма, в масштабе построений, показаны на плане ускорений.

§ 97. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ ШАРНИРНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Задачи кинематического анализа плоского шарнирного механизма могут быть решены аналитическим, графоаналитическим (методом планов) и графическим методами.

Аналитический метод. Аналитический способ кинематического исследования механизмов обеспечивает высокую точность и полноту исследования. Особенно роль аналитического метода возросла с появлением электронно-вычислительных машин. Рассмотрим применение аналитического метода к исследованию кривошипно-шатунного механизма.

Пример. Пусть в кривошипно-шатунном механизме требуется аналитически определить положение поршня B и любой точки C шатуна, скорости и ускорения этих точек в зависимости от угла поворота кривошипа OA .

Будем полагать, что кривошип вращается с постоянной угловой скоростью ω рад/с. Обозначим r — радиус кривошипа, l — длину шатуна (рис. 18.21).

Решение. Записываем координаты точки B (поршня):

$$x_B = r \cos \varphi + l \cos \beta; y_B = 0, \quad (18.18)$$

где $\varphi = \omega t$ — угол поворота кривошипа, а $\beta = \beta(t)$ — угол отклонения шатуна.

Выражаем угол β через угол φ из условия, что $AC = r \sin \varphi = l \sin \beta$. Обозначая $\frac{r}{l} = \lambda$, получаем

$$\sin \beta = \frac{r}{l} \sin \varphi = \lambda \sin \omega t, \quad (18.19)$$

откуда

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t}.$$

Используем полученные зависимости и записываем координату точки B в виде

$$x_B = r \cos \omega t + l \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t}. \quad (18.20)$$

Разложим в ряд выражение

$$\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t} = 1 - \frac{\lambda^2}{2} \sin^2 \omega t - \frac{\lambda^4}{8} \sin^4 \omega t - \dots$$

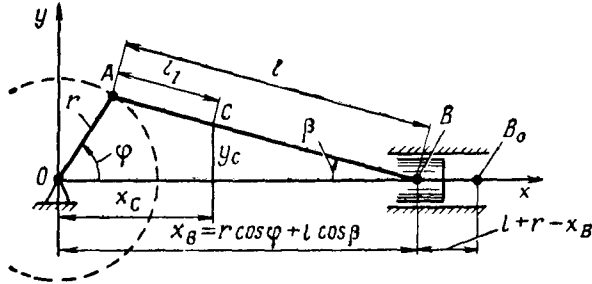


Рис. 18.21.

Для большинства выполненных двигателей $\lambda = \frac{r}{l} = 0,24 \div 0,32$. Учитывая это, а также то, что $\sin \omega t \leq 1$, можно приближенно принять

$$\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t} = 1 - \frac{\lambda^2}{2} \sin^2 \omega t. \quad (18.21)$$

Так, при $\lambda = 0,2$ и $\varphi = |\omega t| = \frac{\pi}{2}$

$$\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t} = 1 - 0,02 - 0,0002 - \dots$$

Таким образом, принимаем, что

$$x_B = r \cos \omega t + l \left(1 - \frac{\lambda^2}{2} \sin^2 \omega t \right). \quad (18.22)$$

Определяем величину скорости точки B (поршня)

$$v_B = \frac{dx}{dt} = -r\omega \sin \omega t - \frac{l\lambda^2}{2} \omega \sin 2\omega t$$

или после преобразования

$$v_B = -r\omega \left(\sin \omega t + \frac{\lambda}{2} \sin 2\omega t \right). \quad (18.23)$$

Скорость направлена в сторону отрицательной полуоси x до тех пор, пока $\omega t = \varphi \leq \pi$, т. е. до момента времени $t_1 = \frac{\pi}{\omega}$ с.

Находим величину ускорения точки B (поршня) по равенству

$$\left. \begin{aligned} w_B &= \frac{dv_B}{dt} = -r\omega^2 (\cos \omega t + \lambda \cos 2\omega t) \\ \text{или} \\ w_B &= -w_A (\cos \omega t + \lambda \cos 2\omega t). \end{aligned} \right\} \quad (18.24)$$

Проведем исследование ускорения точки B :

при $\varphi=0$; $w_B = -r\omega^2(1+\lambda)$;

при $\varphi=\pi$; $w_B = -r\omega^2(-1+\lambda) = r\omega^2(1-\lambda)$.

Таким образом, наибольшая величина ускорения поршня будет

$$|w_{\max}| = r\omega^2(1+\lambda). \quad (18.25)$$

Скорость поршня будет иметь экстремальное значение в момент времени, когда ускорение обратится в нуль, т. е., когда

$$w_B = r\omega^2(\cos \omega t_1 + \lambda \cos 2\omega t_1) = 0.$$

Решая полученное тригонометрическое уравнение, определяем эти моменты времени, а затем и соответствующие им скорости.

Определяем величину угловой скорости шатуна ω_{AB} , для чего дифференцируем по времени равенство (18.19)

$$\frac{d(\sin \beta)}{dt} = \frac{d}{dt}(\lambda \sin \omega t) \quad \text{или} \quad \cos \beta \cdot \frac{d\beta}{dt} = \lambda \omega \cos \omega t,$$

откуда

$$\frac{d\beta}{dt} = \omega_{AB} = \frac{\lambda \omega \cos \omega t}{\cos \beta} = \frac{\lambda \omega \cos \omega t}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t}}.$$

Часто начало координат выбирают в точке B , когда она находится в правом крайнем положении B_0 , и ось x направляют в сторону точки O . Тогда:

$$\left. \begin{aligned} x &= (l+r) - (r \cos \varphi + l \cos \beta) = r(1 - \cos \varphi) + l(1 - \cos \beta) \approx \\ &\approx r(1 - \cos \omega t) + \frac{\lambda r}{2} \sin^2 \omega t; \\ v &= r\omega \left(\sin \omega t + \frac{\lambda}{2} \sin 2\omega t \right) = v_A \left(\sin \omega t + \frac{\lambda}{2} \sin 2\omega t \right); \\ w &= r\omega^2(\cos \omega t + \lambda \cos 2\omega t) = w_A(\cos \omega t + \lambda \cos 2\omega t), \end{aligned} \right\} (18.26)^*$$

где $\varphi = \omega t$; $\sin \beta = \lambda \sin \varphi = \lambda \sin \omega t$.

Отсчитывать ход поршня таким образом важно для тех случаев, когда производят исследование процессов, происходящих в цилиндре двигателя, объем которого изменяется по равенству

$$V_{II} = x \cdot F = rF(1 - \cos \varphi) + lF(1 - \cos \beta),$$

где F — площадь поршня.

Как видно из полученных уравнений, для определения кинематических параметров и построения кривых за цикл $v=f(t)$ и $w=f_1(t)$ необходимо проводить довольно большой объем вычислений.

Более наглядно и проще кинематические параметры движения, правда с меньшей точностью, могут быть определены графоаналитически.

Графоаналитический способ определения кинематических параметров движения. При использовании этих способов необходимо изображать план механизма и кинематические параметры в виде отрезков в определенных масштабах.

* Зная, что $x_C = r \cos \varphi + l_1 \cos \beta$ и $y_C = r \sin \varphi - l_1 \sin \beta$, можно определить скорость и ускорение точки C шатуна.

Построение планов положений механизмов и разметка траекторий точек звеньев. Построение планов положений механизмов и траекторий отдельных точек механизма за цикл производится методом засечек. Проследим, как построить траектории точек A , B , C , D кривошипно-шатунного механизма и план положений механизма (рис. 18.22).

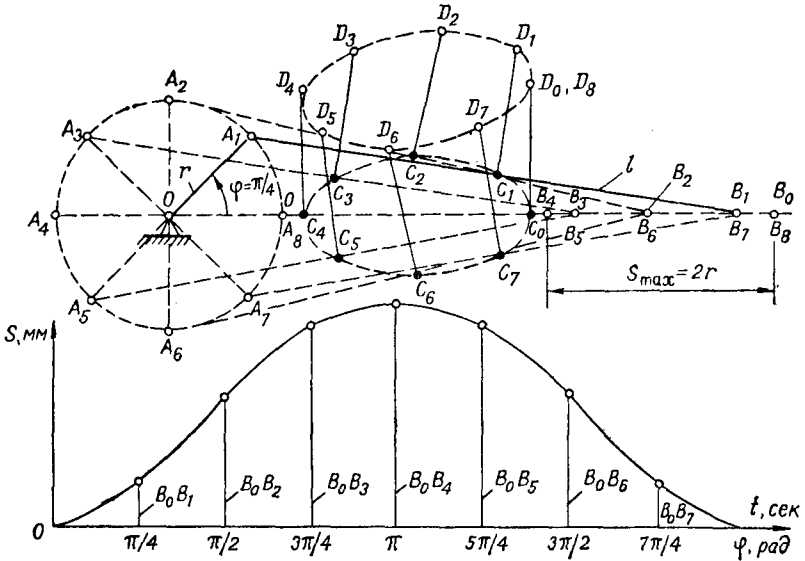


Рис. 18.22.

Траектория точки A — окружность радиуса $r=OA$, траектория точки B (ползун, поршень) — прямая линия. Для определения положений механизма и траекторий точек C и D делим окружность радиуса $r=OA$ на равное количество k участков (8, 12, 16, 24 и т. д.). Пусть $k=8$. Тогда $\varphi = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ рад. Проводим (рис. 18.22) прямоугольную систему координат Ots . Определяем масштаб времени μ_t по заданному числу оборотов (n об/мин) или угловой скорости $\omega = \frac{\pi n}{30}$ рад/с = const.

Из равенства $\varphi = \omega t$ определяем время одного цикла

$$t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{\varphi \cdot 30}{\pi n} \text{ с.}$$

Выбираем отрезок, соответствующий $\varphi = \frac{\pi}{4}$, равным, например, $m=10$ мм. Тогда масштаб времени будет равен (при $n=300 \frac{\text{об}}{\text{мин}}$), $\mu_t = \frac{30 \cdot \pi/4}{\pi \cdot 300 \cdot 10} = \frac{1}{400}$ с/мм, т. е. 1 мм чертежа соответствует $\frac{1}{400}$ с.

Определяем масштаб перемещения. Полный ход поршня равен $s_{\max} = 2r$ в метрах. Изображаем его отрезком m_1 в миллиметрах. Тогда

$$\mu_s = \frac{2r}{m_1} \text{ м/мм.}$$

Выбираем оси координат $O\varphi s$ или Ots . По оси абсцисс откладываем φ (или t), по оси ординат s .

Откладываем с учетом масштабов отрезки, полученные методом засечек: для $\varphi_1(t_1)$ перемещение B_0B_1 , для φ_2 — B_0B_2 и т. д. Концы отрезков соединяем плавной кривой, которая и будет искомой:

$$s = s(t) \text{ или } s = s(\varphi).$$

Для определения величин скорости и ускорения точки B (поршня), движущейся прямолинейно, по зависимости $s = s(t)$, заданной графически, нужно уметь графически определять производные:

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad w = \frac{dv}{dt}.$$

Графическое дифференцирование. Сущность метода графического дифференцирования заключается в следующем. Пусть (рис. 18.23, а) за малый промежуток времени Δt перемещение точки изменяется по кривой AB в системе координат Ots .

Проводим хорду AB , длина которой, учитывая малость Δt , близка к длине дуги.

Выбираем полюс p_v по оси t . Расстояние H называется полюсным.

Проводим $p_vD \parallel AB$. Из подобия треугольников p_vDO и ABC следует

$$OD = \frac{BC}{AC} \cdot H.$$

С учетом масштабов $BC = \frac{\Delta s}{\mu_s}$, $AC = \frac{\Delta t}{\mu_t}$, тогда

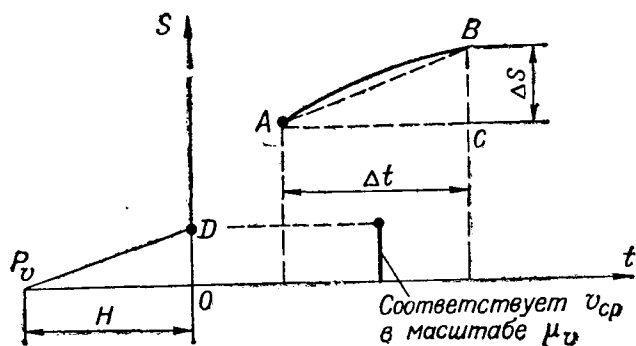
$$OD = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{\mu_t}{\mu_s} \cdot H = v_{\text{ср}} \cdot \frac{\mu_t}{\mu_s} \cdot H, \quad (18.27)$$

где $v_{\text{ср}}$ — средняя величина скорости за время Δt . Следовательно,

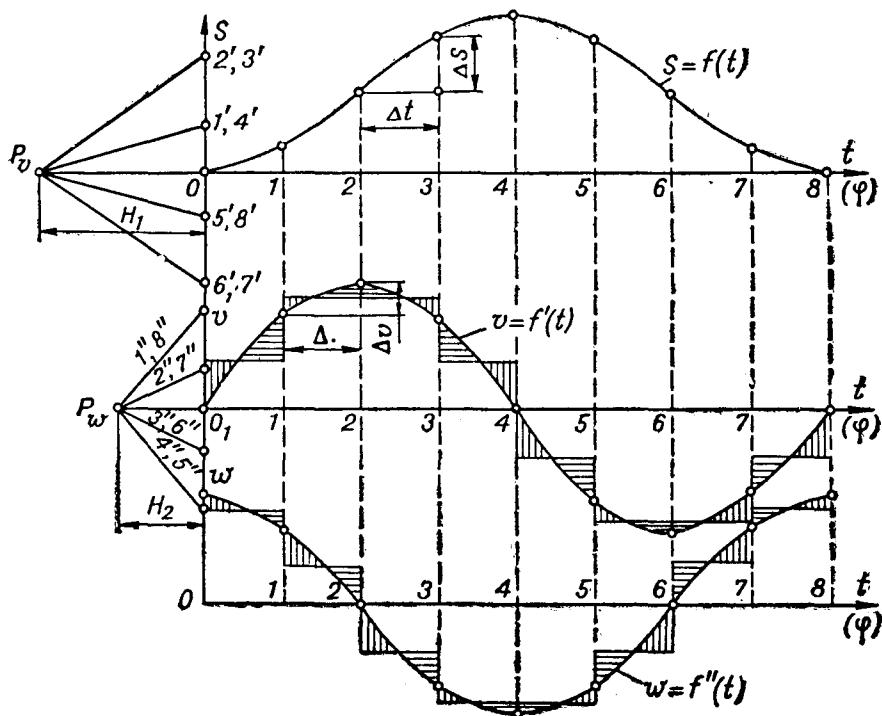
$$v_{\text{ср}} = OD \cdot \frac{\mu_s}{\mu_t \cdot H}.$$

Так, если масштабы будут $\mu_s = 0,01$ м/мм, т. е. 1 мм чертежа соответствует 0,01 м перемещения, $\mu_t = 0,001$ с/мм, т. е. 1 мм чертежа соответствует 0,001 с, полюсное расстояние $H = 40$ мм, тогда $v_{\text{ср}} = OD \cdot \frac{\mu_s}{\mu_t \cdot H} = OD \cdot \frac{0,01}{0,001 \cdot 40} = 0,25 \cdot OD$ м/(с·мм), где OD принимается в мм.

Коэффициент $\frac{\mu_s}{\mu_t \cdot H} = \mu_v$ называется масштабом скорости. В рассматриваемом примере $\mu_v = 0,25$ м/(с/мм). Исходя из вышеизло-



а



б

Рис. 18.23.

женного рекомендуется следующая последовательность дифференцирования кривой $s(t)$ методом хорд (рис. 18.23, б).

Делим абсциссу на n частей. На участках, где кривизна кривой

$s(t)$ резко изменяется, рекомендуется их делить на более мелкие участки.

Проводим из полученных точек ординаты до пересечения с кривой $s(t)$.

Соединяем полученные точки прямыми (хордами). Затем:

— откладываем от начала координат влево полюсное расстояние $Op_v = H_1$;

— проводим из p_v прямые лучи, параллельные соответствующим хордам, до пересечения с ординатой Os ;

— строим ниже систему координат O_1tv (рис. 18.23, б); из середин участков O_1-1 , $1-2$, $2-3$ и т. д. проводим ординаты, равные $01'$, $02'$ и т. д.;

— соединяем концы ординат плавной кривой так, чтобы заштрихованные площадки, лежащие слева и справа от точки пересечения ординаты и кривой, были равны между собой; полученная кривая является диаграммой скоростей $v(t)$ в масштабе μ_v .

Диаграмма ускорений $\omega(t)$ строится путем графического дифференцирования диаграммы скоростей $v(t)$ в последовательности, рассмотренной выше.

Новое полюсное расстояние H_2 может отличаться от H_1 . Масштаб построения диаграммы $\omega = \omega(t)$ равен $\mu_\omega = \frac{\mu_v}{\mu_t \cdot H_2}$. Проведем кинематический анализ и синтез механизма, включающего высшую кинематическую пару, какой являются кулачковые механизмы, которые получили распространение в машинах, счетно-вычислительных устройствах, приборах, автоматах и т. д.

§ 98. КУЛАЧКОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ

Назначение и классификация кулачковых механизмов. Кулачковыми механизмами называются такие, у которых основным элементом является кулачок. Кулачком называется твердое тело, рабочая поверхность которого очерчена по определенному закону, т. е. звено, элемент которого имеет переменную кривизну. Кулачки могут быть вращающиеся (18.24, а), качающиеся (18.24, б) (часто применяемые в приборах управления стрельбой) и движущиеся поступательно (рис. 18.25, а). Кулачковые механизмы разделяются на плоские и пространственные (коноидные). Наибольшее распространение получили плоские кулачковые механизмы.

Простейший плоский кулачковый механизм (рис. 18.24, а) состоит из кулачка 1, толкателя 2, стойки 3 и предназначен для преобразования вращательного движения кулачка в прямолинейное возвратно-поступательное (реже качательное) движение толкателя. Пружина 4 обеспечивает контакт кулачка с толкателем. Конструкции некоторых кулачковых механизмов приведены на рис. 18.25.

Если направление движения толкателя, а следовательно, и линия действий векторов скорости проходит через центр вращения кулачка, то такой кулачковый механизм называется центральным.

В противном случае он будет смещенным, внецентренным кулачковым механизмом (рис. 18.25, в, д). При этом величину смещения e называют эксцентриситетом. В структурном отношении кулачковый механизм является трехзвенным, состоящим из двух низших пар (толкатель—стойка, кулачок—стойка) и одной высшей пары (кулачок—толкатель).

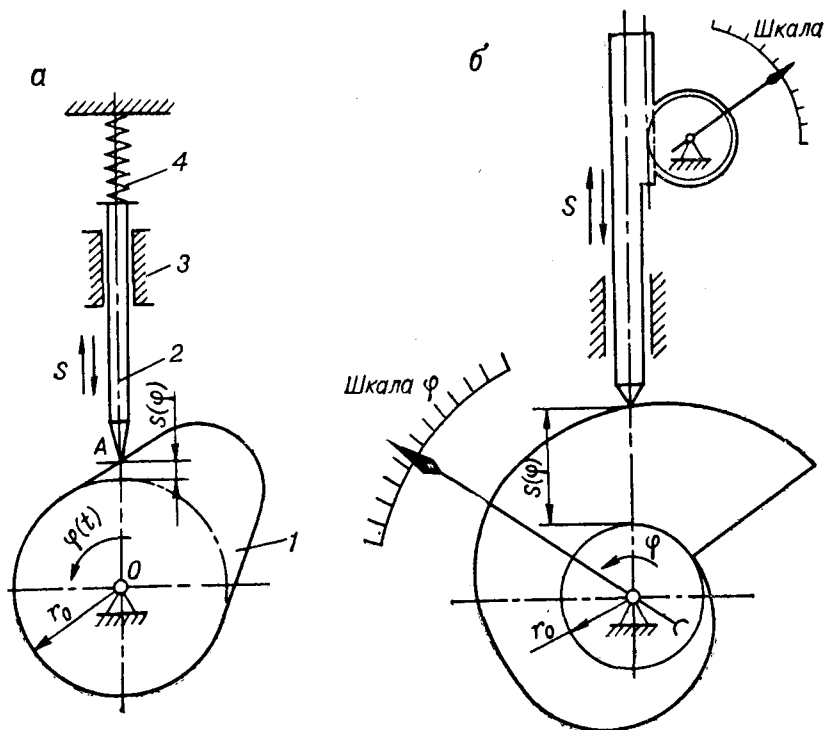


Рис. 18.24.

Степень подвижности механизма по формуле (18.2)

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1,$$

где $n=3$ — число подвижных звеньев; $p_5=2$ — число пар 5-го класса; $p_4=1$ — число пар 4-го класса.

Кулачковые механизмы позволяют воспроизводить движение ведомого звена по наперед заданному закону путем выбора соответствующего профиля (очертания) кулачка.

Сила давления \bar{P}_d кулачка на толкатель (рис. 18.26) действует по нормали к профилю кулачка и образует с направлением движения толкателя угол давления α . Угол $90^\circ - \alpha$ называется углом передачи.

Движение толкателя осуществляет составляющая, величина которой $Y = P_d \cos \alpha$. Другая составляющая $X = P_d \sin \alpha$ вызывает

появление в направляющих подшипниках толкателя реакции \bar{N}_1 и \bar{N}_2 и, следовательно, появление сил трения. Поэтому следует стремиться к уменьшению угла давления α . Обычно принимают для механизмов со стержневым толкателем $\alpha = 30^\circ \div 40^\circ$, для механизмов с коромыслом $\alpha = 45^\circ \div 50^\circ$.

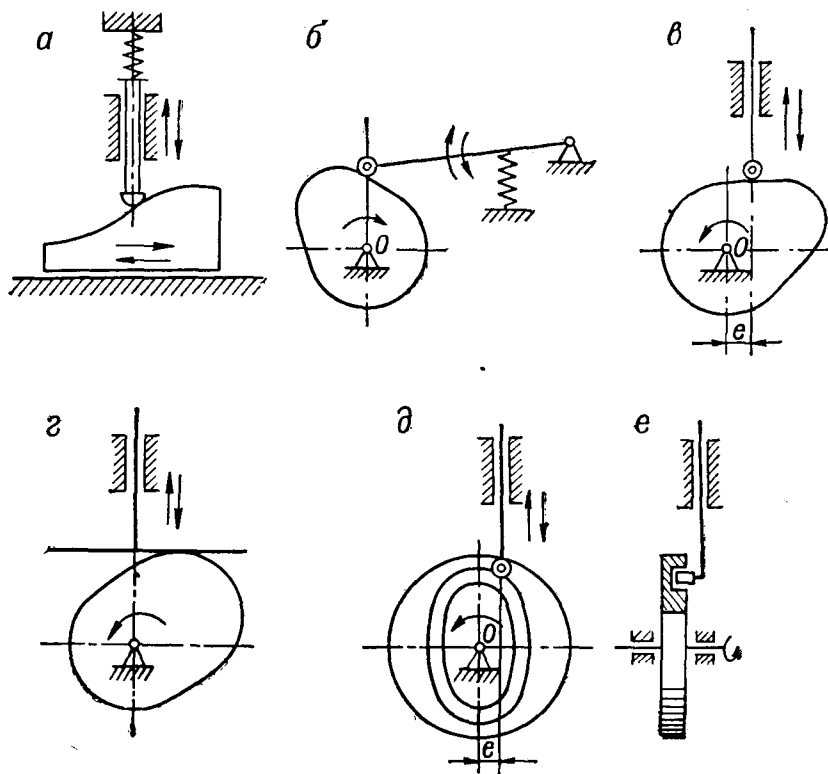


Рис. 18.25.

Для уменьшения силы трения между толкателем и кулачком, а следовательно, и износа сопряженный с кулачком конец толкателя часто снабжается роликом (рис. 18.25, б, в). В связи с этим отличают теоретический (на рис. 18.28 показан пунктиром) и действительный (сплошной линией) профили кулачка, который является эквидистантным (равноотстоящим). Иногда конец толкателя оформляется в виде грибка (рис. 18.25, а) или ему придается форма плоской тарелки (рис. 18.25, г).

Основные определения, связанные с профилем кулачка (рис. 18.27):

- φ_y — угол удаления (подъема) толкателя;
- φ_d — угол дальнего стояния толкателя;
- φ_v — угол возвращения (опускания) толкателя;
- φ_b — угол ближнего стояния,

Окружность радиуса r_0 называется основной окружностью, а соответствующий ей цилиндр основной шайбой. Угол поворота кулачка, при котором толкатель находится в движении и в дальнейшем стоянии, называется рабочим фазовым углом поворота, который численно равен профильному рабочему φ_p

$$\varphi_p = \varphi_y + \varphi_d + \varphi_v.$$

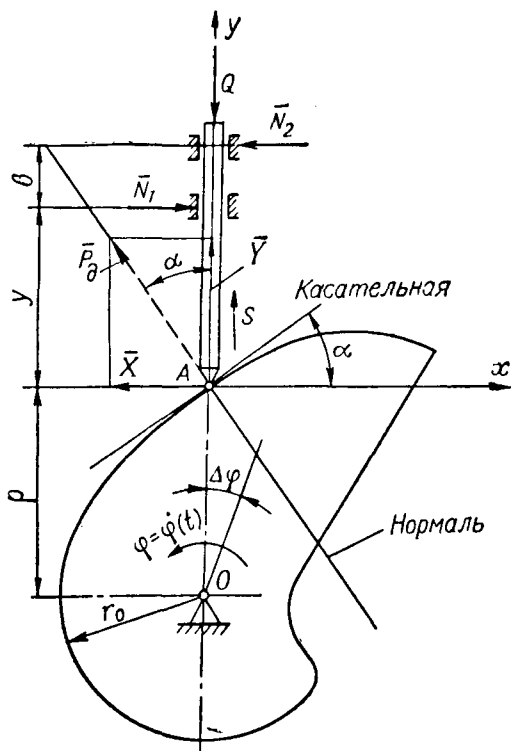


Рис. 18.26.

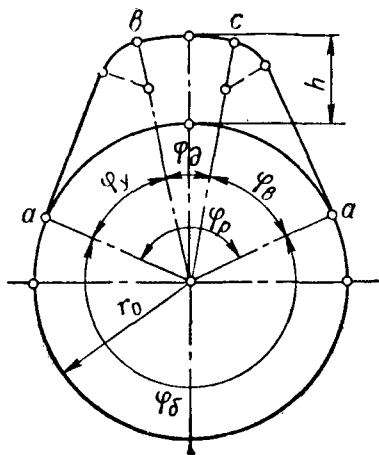


Рис. 18.27.

Время, соответствующее рабочему углу поворота, будет

$$T_p = T_y + T_d + T_v.$$

Очевидно, $\varphi = \varphi_y + \varphi_d + \varphi_v = 2\pi$, т. е. полному обороту кулачка.

Продолжительность одного оборота кулачка или полного цикла ведомого звена (толкателя) при $\omega = \text{const}$

$$t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{2\pi \cdot 30}{\pi \cdot n} = \frac{60}{n} \text{ с.} \quad (18.28)$$

В высокооборотных кулачках величина φ_d меньше, чем в малооборотных, а иногда и вовсе отсутствует. Вызывается это стремлением избежать появления больших ускорений и сил инерции, возникающих при резком подъеме и опускании толкателя,

Кинематический анализ кулачковых механизмов. Кулачковый механизм является трехзвенным и включает в себя высшую пару— кулачок и толкатель. Однако путем замены высшей пары низшей парой и дополнительным звеном (шатунном) трехзвенный механизм с высшей парой превращается в кинематически эквивалентный четырехзвенный механизм с низшими шарнирными парами. При этом шарнир, соединяющий шатун с кривошипом, должен находиться в центре кривизны O той точки профиля кулачка, с которой в данный момент касается толкатель A .

Методы исследования кулачковых механизмов поэтому те же, что и у шарнирных механизмов с низшими парами, т. е. графический и аналитический.

Кинематический синтез кулачковых механизмов. При изготовлении кулачка задаются законом движения толкателя и по нему строится профиль кулачка. Закон движения толкателя может быть задан графически в виде диаграммы ускорений (скоростей, расстояний) или аналитически.

При графическом синтезе, т. е. определении профиля кулачка, целесообразно исходить из задания диаграммы ускорений, так как последняя определяет силы инерции, которые приходится учитывать при расчете напряжений в частях механизма. Очевидно, чем плавнее изменяется ускорение, тем меньше будут силы инерции в кулачковом механизме. Для клапанных механизмов двигателей важно, чтобы начало подъема и посадки клапана происходило без удара, т. е. при скорости, равной нулю. Поэтому начальная и конечная скорости на диаграмме скоростей должны быть равны нулю.

Кулачковые механизмы, у которых диаграмма ускорений изменяется постепенно (синусоидальная, трапецеидальная), называются безударными. Механизмы, у которых диаграмма ускорений изменяется скачкообразно, но на конечную сравнительно небольшую величину (линейно-убывающая, линейно-возрастающая, косинусоидальная), работают с мягким ударом. Механизмы, диаграмма ускорений которых изменяется скачкообразно от $+\infty$ до $-\infty$, работают с жестким ударом.

Профилирование кулачка по диаграмме ускорений толкателя производится методом графического интегрирования. Первое интегрирование диаграммы ускорений дает диаграмму скоростей, а второе интегрирование — диаграмму расстояний (путей). Последняя и является исходной для построения профиля кулачка. В качестве примера рассмотрим графический синтез кулачка с трапецеидальным законом изменения ускорения толкателя (рис. 18.28).

Движение толкателя задано диаграммой ускорений в виде ломаной линии $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. При этом пусть промежутки времени будут

$$t_1 = t_4 = t_7 = \frac{1}{7} T; \quad t_2 = t_6 = \frac{1}{14} T; \quad t_3 = t_5 = \frac{3}{14} T,$$

где T — период, соответствующий фазовому рабочему углу поворота.

Положительные и отрицательные площадки равны друг другу, что необходимо для того, чтобы скорость толкателя в конце хода равнялась нулю.

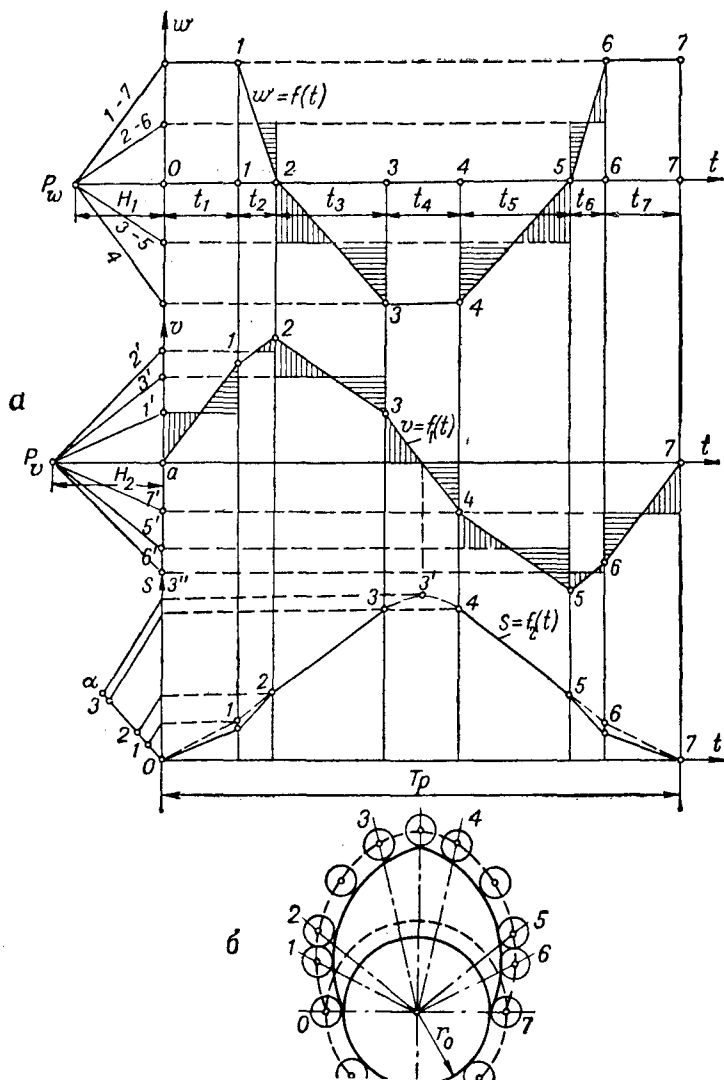


Рис. 18.28.

Величина скорости, например в точке 1 диаграммы ускорений, определится по формуле

$$v_1 = \int_0^1 \omega dt = \mu_w \mu_t F_1,$$

где F_1 является площадью диаграммы между ординатами в точках 0 и 1 ; μ_w и μ_t — соответственно масштабы ускорений и времени.

Для построения диаграммы скоростей сносим на ось ординат середины участков $0-1, 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-7$ и из полюса p_w проводим лучи $1, 2, 3, 4, 5, 6$ и 7 .

Под системой координат $O\omega t$ проводим систему координат $Ov t$ и строим в ней «веревочную» кривую $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ путем последовательного проведения прямых, параллельных лучам $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ на диаграмме ускорений с последующим скруглением. Полученная кривая и является диаграммой скоростей $v=f(t)$.

Диаграмма расстояний строится аналогично диаграмме скоростей. Сносим на ось ординат v центры отрезков $0-1, 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-7$ «веревочной» кривой скоростей и из полюса p_v проводим лучи $1', 2', 3', 4', 5', 6'$ и $7'$. Под системой координат $O\omega t$ проводим систему координат Ost и строим в ней «веревочную» кривую $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ и 7 путем проведения последовательных прямых, параллельных лучам $1', 2', 3', 4', 5', 6'$ и $7'$. Полученная кривая является диаграммой расстояний $s=f(t)$.

Для построения профиля кулачка следует (рис. 18.28, б):

- провести заданным радиусом r_0 основную шайбу;
- разделить заданный рабочий угол φ_p на шайбе на части, пропорциональные делениям $t_1, t_2, t_3, \dots, t_7$ на диаграмме ускорений;
- на радиусах, проведенных через точки деления шайбы в заданном масштабе, отложить от поверхности основной шайбы ординаты кривой расстояний;
- концы ординат соединить плавной кривой, которая и будет профилем кулачка.

Перенос ординат с диаграммы расстояний прямо на кулачковую шайбу допускается в том случае, если схема механизма вычерчена в масштабе расстояний μ_s . Масштабы чертежа кулачка и диаграммы расстояний разные, и, чтобы перейти от одного масштаба к другому, используем метод пропорционального деления отрезков. Для этого откладывают от точки O — начала координат $s-t$ (рис. 18.28) под любым углом к оси s отрезок Oa , равный ходу h толкателя в масштабе кулачка на чертеже. Точки $1, 2, 3, 4, 5, 6$ и 7 сносятся на ось s . Точка $3''$ соединяется с концом a отрезка Oa , затем параллельно линии $3''a$ проводят линии из точек $1, 2$ и 3 . Полученную на прямой Oa разметку переносят на шайбу кулачка и строят его рабочую часть, соответствующую углу φ_p .

Обычно толкатель снабжается роликом, который при вращении кулачка катится по нему, в то же время обеспечивая толкателю возвратно-поступательное, прямолинейное или качательное движение. Применением ролика трение скольжения между толкателем и кулачком заменяется значительно меньшим трением качения.

При наличии ролика кроме теоретического профиля следует найти действительный профиль кулачка, который помещается вну-

три теоретического и является огибающей ряда последовательных окружностей, проведенных радиусом ролика из центров, расположенных на теоретическом профиле.

Синтез кулачка с эксцентриситетом e включает в себя построение профиля кулачка по задаваемым закону движения толкателя $s(t)$, эксцентриситету e и радиусу шайбы r_0 (рис. 18.29). Пусть заданы положения толкателя в зависимости от φ графически.

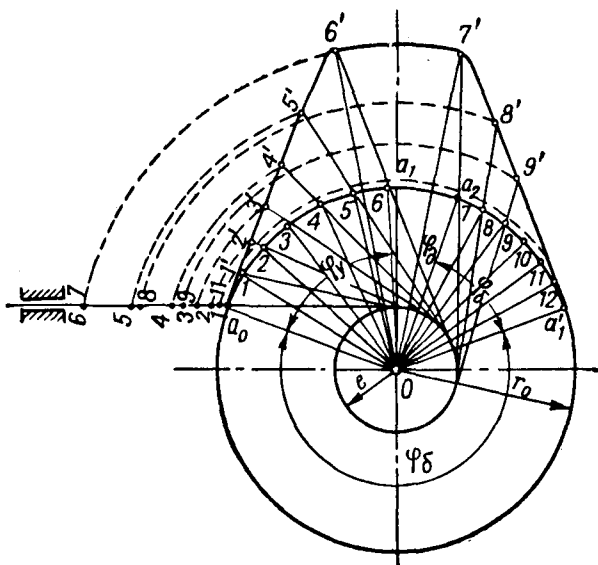


Рис. 18.29.

Проводят окружности радиусами e и r_0 . Толкатель при обратном движении вокруг кулачка всегда своим продолжением является касательной к окружности радиуса e . Откладывают от точки a_0 в направлении, обратном вращению кулачка, последовательно углы φ_u , φ_d , φ_v и φ_b . Углы φ_u и φ_b делят на столько частей, сколько их на диаграмме $s(t)$, и через точки деления на окружности r_0 проводят касательные к окружности радиуса e . Из этих точек вдоль продолжения касательных откладывают соответствующие отрезки, равные ординатам диаграммы $s(t)$. Полученные точки $1', 2', 3' \dots$ соединяют и получают части профиля кулачка, соответствующие углам φ_u и φ_b . Части профиля, соответствующие углам φ_b и φ_d , очерчиваются соответствующими дугами радиусов r_0 и $r_0 + s_{\max}$.

Аналитический метод. Синтез кулачкового механизма аналитическим способом произведем на примере синусоидального кулачкового механизма, в котором ускорение толкателя задано в виде синусоидальной функции времени. Профиль такой формы обеспечи-

ваёт появление незначительных динамических давлений на кулачок. Период удаления кулачка принимаем равным T_y . Тогда

$$\omega = \omega_{\max} \sin\left(\frac{2\pi}{T_y} t\right) \quad (18.29)$$

при $t = \frac{T_y}{4}$; $\omega = \omega_{\max}$.

Интегрируя выражение (18.29), получаем значение скорости

$$v = \int_0^t \omega dt = \omega_{\max} \int_0^t \sin\left(\frac{2\pi}{T_y} t\right) dt = \frac{\omega_{\max} T_y}{2\pi} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{T_y} t\right)$$

при $t = \frac{T_y}{2}$; $v = v_{\max} = \frac{\omega_{\max} T_y}{\pi}$. Тогда

$$v = \frac{v_{\max}}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{T_y} t\right). \quad (18.30)$$

Интегрируя выражение (18.30), получаем уравнение движения толкателя

$$s = \frac{v_{\max}}{2} \int_0^t \left(1 - \cos \frac{2\pi}{T_y} t\right) dt = \frac{v_{\max}}{2} \left[t - \frac{T_y}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{T_y} t\right] \quad (18.31)$$

при $t = T_y$; $s = s_{\max} = \frac{v_{\max} T_y}{2}$.

Подставляя значение s_{\max} , приходим к уравнению подъема толкателя в виде

$$s = s_{\max} \left(\frac{t}{T_y} - \frac{\sin \frac{2\pi}{T_y} t}{2\pi}\right). \quad (18.32)$$

Для периода возвращения T_b кулачка аналогично предыдущему получаем следующие выражения для ускорения, скорости и перемещения:

$$\omega = \omega_{\max} \sin \frac{2\pi}{T_b} t; \quad v = \frac{v_{\max}}{T_b} \left(-1 + \cos \frac{2\pi}{T_b} t\right);$$

$$s = s_{\max} \left(1 - \frac{t}{T_b} + \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{T_b} t\right).$$

Далее по $s(t)$ строится кулачок в последовательности, указанной ранее.

§ 99. ПОНЯТИЕ О КОНОИДАХ

Коноидом называется пространственный кулачок, который имеет два различных очертания по образующей и в каждом сечении (по профилю), соответствующие двум переменным.

Коноидный механизм состоит из ряда деталей, основными из которых являются (рис. 18.30) коноид 2 с валом 1, толкатель 3 и система валов и зубчатых передач. Коноидный механизм, представленный на рис. 18.30, обеспечивает две степени свободы коноиду: вращение вокруг оси, которое передается через зубчатую передачу 6, и осевое перемещение коноида вместе с осью с помощью винтовой передачи 7.

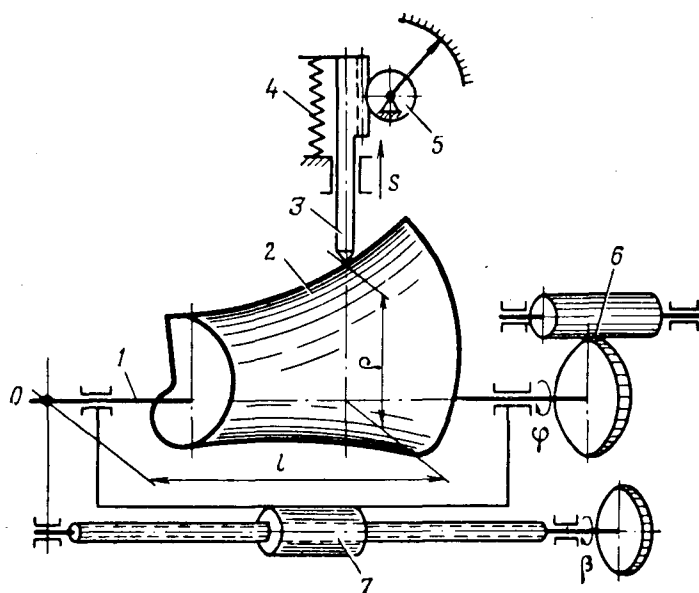


Рис. 18.30.

Поэтому если обозначить физические величины, вводимые через 6 и 7, соответственно x и y , то подъем толкателя будет соответствовать переменной z , являющейся функцией двух переменных; $z = z(x, y)$.

Обозначим масштабные коэффициенты вводимых величин через μ_x и μ_y , а выходной — через μ_z . Тогда

$$\varphi = \frac{x}{\mu_x}; \quad \beta = \frac{y}{\mu_y}; \quad s = \frac{z}{\mu_z},$$

где φ — угол поворота вала; β — угол поворота винта; s — подъем толкателя — функция переменных φ и β :

$$s = \frac{z(\mu_x \cdot \varphi \cdot \mu_y \cdot \beta)}{\mu_z}. \quad (18.33)$$

Коноидные механизмы получили большое распространение в счетно-решающих механизмах, в автоматических системах и других устройствах. Они обладают высокой степенью надежности при относительной простоте.

Считая, что коноид образован совокупностью различных тонких плоских кулачков, с точки зрения анализа или синтеза коноида можно применять методы, изложенные для плоских кулачков.

Одним из условий нормального действия коноидного механизма является получение малых углов давления α , обеспечивающих отсутствие заклинивания.

РАЗДЕЛ III

ДИНАМИКА

§ 100. ВВЕДЕНИЕ

Динамикой называется раздел механики, в котором изучается механическое движение в связи с силами, приложенными к движущимся объектам.

В динамике расширяются уже известные основные понятия механики и вводятся новые (масса, количество движения, кинетическая энергия и т. д.).

ГЛАВА 19

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ. ДВЕ ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

§ 101. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ

Основоположителем динамики считают Галилея (1564—1642 гг.), который впервые установил законы падения тел в пустоте, в частности, что тело в пустоте движется по параболе, если оно было брошено под некоторым углом к горизонту. Галилей сформулировал первый закон динамики. В дальнейшем основные законы динамики были впервые отчетливо сформулированы И. Ньютоном (1643—1727 гг.) в его работе «Математические начала натуральной философии» (1687 г.).

Первый закон — закон инерции. Если равнодействующая всех сил, приложенных к свободной материальной точке, равна нулю, то точка находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения. Такое кинематическое состояние точки иногда называют состоянием инерции.

Система отсчета, относительно которой справедлив закон инерции, т. е. по отношению к которой всякая свободная материальная точка под действием взаимно уравновешенных сил совершает прямолинейное и равномерное движение, называется инерциальной. Для нашей Солнечной системы за инерциальную принимают систему отсчета, начало которой совпадает с центром Солнца и

осями, проходящими через три звезды, принимаемые «неподвижными». Если при решении задач можно пренебречь годовым движением Земли вокруг Солнца и ее суточным вращением, инерциальной можно считать систему отсчета, связанную с Землей.

В дальнейшем при решении большинства технических задач (за исключением, например, задач, связанных с движением гирокомпасов, спутников Земли, ракет дальнего действия и т. д.) систему координат, связанную с Землей, мы будем считать абсолютно неподвижной, по отношению к которой справедлив закон инерции.

Отметим, что любая система координат, движущаяся по отношению к инерциальной поступательно и равномерно, также является инерциальной (принцип относительности Галилея). Если система сил, приложенная к материальной точке, не является уравновешенной, то вектор скорости (по величине и направлению) не постоянен, т. е. вектор полного ускорения не равен нулю. Количественную зависимость между силой, действующей на материальную точку, и ее ускорением устанавливает второй (основной) закон динамики.

Второй закон — закон пропорциональности силы и ускорения. Если к свободной материальной точке приложена сила \vec{P} , движение не будет инерциальным, она будет двигаться с ускорением. Опытным путем установлено, что одна и та же сила, приложенная к различным свободным материальным точкам, вызывает различные по модулю ускорения. В этом случае говорят, что материальные точки обладают различной инертностью. Величина, характеризующая инертность, называется массой. Закон, устанавливающий связь между массой материальной точки, приложенной к ней силой и вызываемым ею ускорением, гласит: ускорение свободной материальной точки пропорционально приложенной к ней движущей силе и имеет одинаковое с ней направление (рис. 19.1)

$$\vec{P} = m\vec{w} \text{ или } \vec{w} = \frac{\vec{P}}{m}, \quad (19.1)$$

где \vec{P} — сила, действующая на материальную точку;

m — масса материальной точки, а \vec{w} — ее ускорение, вызываемое силой \vec{P} .

Из второго, основного, закона динамики непосредственно следует, что при $\vec{P} = 0$ $\vec{w} = 0$, т. е. $\vec{v} = \text{const}$. Материальная точка движется равномерно, прямолинейно либо остается в покое, когда $\vec{v} = 0$. Первый и второй законы динамики справедливы при движении материальной точки относительно инерциальной системы отсчета.

Векторное уравнение (19.1) называется основным уравнением динамики точки. Масса материальной точки является величиной скалярной, зависящей от скорости точки. Однако при скоростях

материальной точки, значительно меньших скорости света, этой зависимостью можно пренебречь. С понятием «сила» мы подробно ознакомились в разделе «Статика». Сила, действуя статически на неподвижное упругое тело, вызывает его деформацию. Однако сила может проявлять себя и динамически; свободная материальная точка под действием силы получает ускорение. В свойстве данной материальной точки получать ускорение под действием

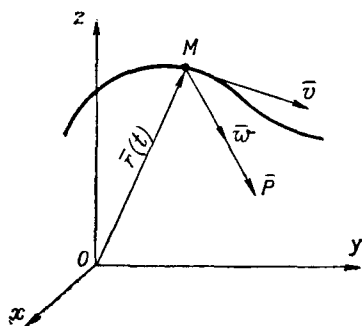


Рис. 19.1.

приложенной к ней силы проявляется инертность материальной точки. Используя основное уравнение динамики (19.1), можно записать следующее скалярное равенство:

$$m\omega = P \quad (19.2)$$

или

$$m = \frac{P}{\omega}, \quad (19.3)$$

т. е. масса материальной точки равна отношению модуля силы, действующей на данную материальную точку, к модулю вызываемого ею ускорения.

В частности, для силы притяжения Земли

$$m = \frac{G}{g}, \quad (19.3a)$$

где G — сила тяжести или вес материальной точки, а g — ускорение свободной материальной точки, вызываемое силой тяжести, или ускорение силы тяжести.

Отметим, что величина g зависит от географической широты земной поверхности и от высоты над уровнем моря, убывая по мере возрастания высоты или по мере перемещения от полюса к экватору. Важно, что величина силы тяжести материальной точ-

ки изменяется в такой же зависимости от высоты и места наблюдения, что и величина ускорения силы тяжести g , так что их отношение, т. е. масса материальной точки, в соответствии с (19.3а) остается постоянной. Ускорение силы тяжести называют также ускорением свободного падения в данном месте Земли. Отметим, что под свободным падением материальной точки следует понимать такое движение, при котором на материальную точку действует только сила тяжести.

Системы единиц. Международная система единиц СИ. Ее основные механические единицы: единица длины — метр (м), единица массы — килограмм (кг), единица времени — секунда (с).

Единица силы является производной и определяется из второго закона динамики (19.2).

За единицу силы в системе СИ принимают ньютон (Н), т. е. такую силу, которая свободной материальной точке массой в 1 кг сообщает ускорение 1 м/с^2 .

Система МКГСС (техническая система). Ее основные единицы: метр (м) — единица длины, секунда (с) — единица времени и килограмм-сила (кгс) — единица силы.

За единицу силы принимают такую силу, которая сообщает свободной материальной точке массой в 1 кг ускорение $9,81 \text{ м/с}^2$. Единица массы является производной и определяется из (19.3):

$[m] = \frac{[P]}{[w]}$ или 1 единица массы = $1 \text{ кгс/м/с}^2 = 1 \text{ кгс} \cdot \text{с}^2/\text{м}$, которую иногда называют т. е. м. — техническая единица массы.

За единицу массы в системе МКГСС принимают массу такой материальной точки, которая под действием силы в 1 кгс получает ускорение 1 м/с^2 .

Третий закон — закон равенства действия и противодействия. Взаемному действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие. Иначе говоря, силы, с которыми взаимодействуют две материальные точки, равны по модулю и направлены вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны. Этот закон лежит в основе динамики системы материальных точек. Силы действия и противодействия приложены к разным точкам, поэтому они не уравновешиваются.

Четвертый закон — закон независимости действия сил. Если на свободную материальную точку одновременно действует несколько сил, то ее ускорение равно геометрической сумме тех ускорений, которые вызываются каждой силой в отдельности.

Обозначим силы, одновременно действующие на материальную точку, через $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$, а \vec{w} — ускорение, вызываемое этими силами. Тогда в соответствии с четвертым законом динамики

$$\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \dots + \vec{w}_n, \quad (19.4)$$

где $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n$ — ускорения материальной точки, вызываемые соответственно силами $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$.

Умножая обе части равенства (19.4) на массу материальной точки, получим

$$m\bar{\omega} = m\bar{\omega}_1 + m\bar{\omega}_2 + \dots + m\bar{\omega}_n \text{ или}$$

$$m\bar{\omega} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \dots + \bar{P}_n = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i. \quad (19.5)$$

Векторное равенство (19.5) является уравнением динамики материальной точки, на которую одновременно действует несколько сил.

Обозначим равнодействующую всех сил, приложенных к материальной точке, через \bar{P} . В соответствии с уравнением (19.1) $m\bar{\omega} = \bar{P}$. Сопоставляя это уравнение с формулой (19.5), видим, что

$$\bar{P} = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i,$$

т. е. равнодействующая сил, приложенных к материальной точке, равна их геометрической сумме и приложена в той же точке. Правило, которое в статике принималось как аксиома.

§ 102. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

В соответствии со вторым законом динамики (19.1)

$$m\bar{\omega} = \bar{P}.$$

Из кинематики известно, что

$$\bar{\omega} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}.$$

Следовательно, уравнение (19.1) можно переписать в виде

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = m \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{P}, \quad (19.6)$$

где \bar{v} и \bar{r} — скорость и радиус-вектор материальной точки;

$\bar{P} = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i$ — равнодействующая всех сил, действующих на материальную точку.

Дифференциальное уравнение (19.6) может быть записано в проекциях на оси различных систем координат следующим образом.

Прямоугольная (декартова) система координат:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} &= m \frac{d^2x}{dt^2} = X; \\ m \frac{dv_y}{dt} &= m \frac{d^2y}{dt^2} = Y; \\ m \frac{dv_z}{dt} &= m \frac{d^2z}{dt^2} = Z, \end{aligned} \right\} \quad (19.7)$$

где x, y, z — координаты материальной точки;

$\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ — проекции ускорения;

X, Y, Z — проекции равнодействующей сил на соответствующие оси прямоугольной системы координат.

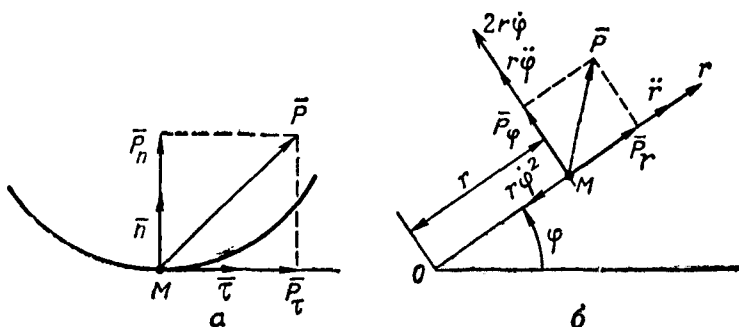


Рис. 19.2.

Естественные оси координат. Проектируя обе части уравнения (19.7) на оси натурального триэдра: касательную τ , нормаль n и бинормаль b , получим следующие уравнения (рис. 19.2):

$$\left. \begin{aligned} m\omega_\tau &= m \frac{dv}{dt} = P_\tau, \\ m\omega_n &= m \frac{v^2}{\rho} = P_n, \\ m\omega_b &= 0 = P_b, \end{aligned} \right\} \quad (19.8)$$

где $\omega_\tau, \omega_n, \omega_b$ — проекции ускорения и равнодействующей на P_τ, P_n, P_b — соответствующие естественные оси координат.

$\omega_b = 0, P_b = 0$, так как, как известно из кинематики, ускорение материальной точки, а следовательно, и равнодействующая сила, приложенная к этой точке, лежат в соприкасающейся плоскости, проведенной в данной точке траектории.

Последнее уравнение системы (19.8) свидетельствует о том, что составляющие сил, действующих на материальную точку вдоль бинормали, уравновешены. При движении по плоской кривой есте-

ственные уравнения движения материальной точки будут иметь вид (рис. 19.2, а):

$$\left. \begin{aligned} m\omega_{\tau} &= m \frac{dv}{dt} = P_{\tau}; \\ m \frac{v^2}{\rho} &= P_n. \end{aligned} \right\} \quad (19.9)$$

Из второго уравнения системы (19.9) видно, что проекция равнодействующей, приложенной к материальной точке, на нормаль всегда положительна, т. е. \overline{P}_n всегда направлена к центру кривизны. Следовательно, равнодействующая \overline{P} и ускорение $\overline{\omega}$ направлены в сторону вогнутости траектории.

Полярная система координат на плоскости. Соответствующие проекции ускорения были определены в кинематике, а проекции силы представлены на рис. 19.2, б. Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r) &= P_r; \\ m(\ddot{\varphi} r + 2\dot{\varphi} \dot{r}) &= P_{\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (19.10)$$

Полученные дифференциальные уравнения движения материальной точки позволяют поставить и решить две основные задачи динамики материальной точки.

Первая (прямая) задача: при заданном законе или уравнениях движения и заданной массе материальной точки определить силу, действующую на точку.

Вторая (обратная) задача: при заданных силах, массе материальной точки и заданных начальных условиях определить уравнения ее движения.

§ 103. ПЕРВАЯ ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ

В данном параграфе будет рассмотрена первая задача динамики материальной точки. Пусть кинематические уравнения движения заданы в прямоугольной декартовой неподвижной системе координат:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t).$$

Тогда в соответствии с (19.7) проекции равнодействующей, приложенной к материальной точке массой m , будут:

$$X = m \frac{d^2 x}{dt^2}; \quad Y = m \frac{d^2 y}{dt^2}; \quad Z = m \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Величина и направляющие косинусы равнодействующей определяются так:

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2};$$

$$\cos(\hat{i}, \hat{P}) = \frac{X}{P}; \quad \cos(\hat{j}, \hat{P}) = \frac{Y}{P}; \quad \cos(\hat{k}, \hat{P}) = \frac{Z}{P}. \quad (19.11)$$

При естественном способе задания движения материальной точки дифференциальные уравнения движения ее будут выглядеть следующим образом:

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = P_\tau; \quad m \frac{v^2}{\rho} = P_n; \quad P_b = 0,$$

где

$$v = v_\tau = \frac{ds}{dt}; \quad \frac{dv_\tau}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

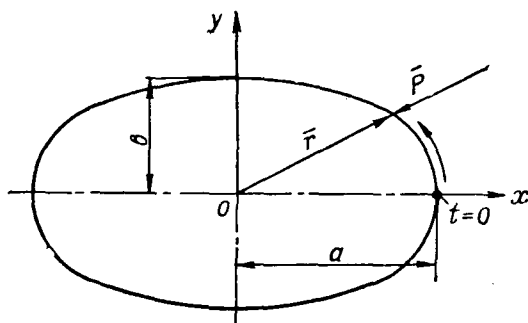


Рис. 19.3.

Величина силы, направляющие косинусы определяются по равенствам:

$$P = \sqrt{P_\tau^2 + P_n^2};$$

$$\cos(\hat{\tau}, \hat{P}) = \frac{P_\tau}{P}; \quad \cos(\hat{n}, \hat{P}) = \frac{P_n}{P}; \quad \cos(\hat{b}, \hat{P}) = \frac{P_b}{P} = 0.$$

Пример. Подводная лодка (рис. 19.3), которую в дальнейшем мы принимаем за материальную точку массой m , движется в соответствии с уравнениями:

$$\begin{cases} x = a \cos \omega t; \\ y = b \sin \omega t, \end{cases}$$

где a , b и ω — постоянные. Определить равнодействующую сил, приложенных к подводной лодке.

Решение. Определяем уравнение траектории ПЛ в виде $y=f(x)$, для чего исключаем время из уравнений движения. В результате получаем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

т. е. траектория подводной лодки — эллипс.

Определяем проекции ускорения на оси прямоугольной неподвижной системы координат:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -a\omega^2 \cos \omega t; \\ \ddot{y} &= -b\omega^2 \sin \omega t. \end{aligned}$$

Вычисляем проекции равнодействующей силы на координатные оси, а затем ее величину и направление:

$$X = m\ddot{x} = -m\omega^2 \cos \omega t = -m\omega^2 x;$$

$$Y = m\ddot{y} = -m\omega^2 \sin \omega t = -m\omega^2 y,$$

откуда

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2} = m\omega^2 \sqrt{x^2 + y^2} = m\omega^2 r;$$

$$\cos(\hat{i}, \hat{P}) = -\frac{x}{r}; \quad \cos(\hat{j}, \hat{P}) = -\frac{y}{r}.$$

Отметим, что

$$\cos(\hat{i}, \hat{r}) = \frac{x}{r}; \quad \cos(\hat{j}, \hat{r}) = \frac{y}{r}.$$

Следовательно, векторы \hat{r} и \hat{P} направлены в противоположные стороны; на подводную лодку действует сила \hat{P} , которая называется центральной, направленная к центру — началу координат и зависящая от удаления ПЛ от центра.

Пример. Торпеда загружается в отсек через торпедопогрузочный люк, имея начальную скорость, равную нулю, и двигаясь по лотку (рис. 19.4), установленному под углом α к горизонту. Движение считать равнопеременным ($w = \text{const}$). Определить силу торможения $\hat{F}_{\text{СК}}$, принимая торпеду за материальную точку массой m .

Решение. Выбираем направленные оси прямоугольных координат: ось x направляем вдоль лотка, а ось y перпендикулярно ему. Записываем уравнения движения торпеды вдоль лотка:

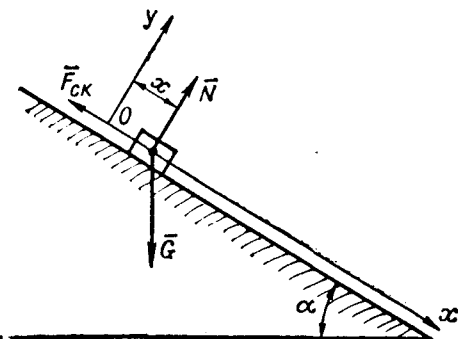


Рис. 19.4.

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x} \cdot t + \frac{w_x t^2}{2}, \text{ откуда } \ddot{x} = w_x = w = \text{const}; \\ y = 0 & \ddot{y} = 0. \end{cases}$$

В соответствии с (19.7)

$$m\ddot{x} = X; \quad m\ddot{y} = Y,$$

где

$$X = G \sin \alpha - F_{\text{СК}} \quad \text{и} \quad Y = -G \cos \alpha + N.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} mw = G \sin \alpha - F_{\text{СК}}; \\ 0 = -G \cos \alpha + N. \end{cases}$$

Из первого уравнения полученной системы определяем, что

$$F_{\text{СК}} = G \sin \alpha - mw.$$

Из второго

$$N = G \cos \alpha.$$

Из статики известно, что коэффициент трения скольжения равен

$$f_{\text{ск}} = \frac{F_{\text{ск}}}{N}.$$

Для рассматриваемого случая

$$f_{\text{ск}} = \frac{G \sin \alpha - m\omega}{G \cos \alpha}.$$

Учитывая, что $m = \frac{G}{g}$, получим

$$f_{\text{ск}} = \frac{G \sin \alpha - \frac{G}{g} \omega}{G \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha - \frac{\omega}{g \cos \alpha}. \quad (*)$$

Из полученного равенства (*) следует, что подбором коэффициента $f_{\text{ск}}$ и угла α можно получить требуемую величину ω . Для состояния покоя $\omega=0$ и из полученной формулы (*) следует, что $f_n \leq \operatorname{tg} \alpha$.

§ 104. ВТОРАЯ ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ

Силы, действующие на материальную точку, известны. Одна из них, например, может изменяться как функция времени, другая — функция скорости, третья — функция координаты и т. д. Следовательно, в общем случае равнодействующая этих сил является явной функцией времени t , положения точки \vec{r} и ее скорости \vec{v} . Задача сводится к определению уравнений движения материальной точки путем интегрирования системы дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= P_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= P_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= P_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{aligned} \right\} \quad (19.12)$$

Шесть постоянных интегрирования определяются по начальным условиям движения. Обычно при $t=t_0$ известны координаты x_0, y_0, z_0 и проекции начальной скорости материальной точки $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$.

Подставляя начальные условия в интегралы дифференциальных уравнений системы (19.12), получим шесть уравнений, из которых и определяются постоянные интегрирования.

Рекомендуется вторую задачу динамики решать путем интегрирования дифференциальных уравнений в такой последовательности:

— выбрать систему координат, начало которой часто целесообразно совместить с начальным положением точки ($t=0$), а направление одной из осей — с направлением движения. Пусть точка в какой-то момент времени находится в положении статического

равновесия. Целесообразно, чтобы этому положению соответствовало начало отсчета времени;

— показать силы, действующие на материальную точку в произвольный момент времени t ;

— записать правую часть системы уравнений (19.12), выразив все силы через переменные, от которых они зависят; при этом правая часть может в частных случаях быть постоянной, функцией только времени, от положения (координат) материальной точки, ее скорости, или функцией нескольких переменных;

— проинтегрировать полученные дифференциальные уравнения;

— определить постоянные интегрирования, используя начальные условия задачи;

— исследовать полученные уравнения движения, найти искомые величины.

Рассмотрим примеры интегрирования дифференциального уравнения движения материальной точки.

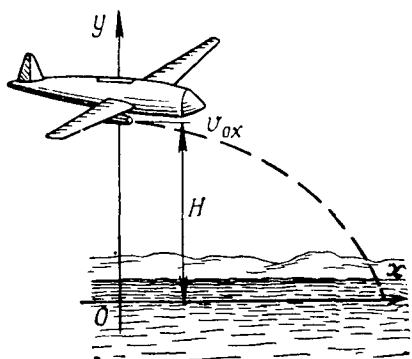


Рис. 19.5.

Пример. С горизонтально летящего самолета (рис. 19.5) производится торпедометание. Определить уравнения движения и траекторию торпеды, время от начала торпедометания до приведения торпеды, если горизонтальная скорость самолета $v_{0x}=100$ м/с и торпедометание производится с высоты $H=60$ м. Торпеда в воздухе движется поступательно. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Принимаем торпеду за материальную точку. Определяем, что на торпеду действует при полете в воздухе сила тяжести G .

Выбираем оси прямоугольной системы неподвижных координат Oxy , связанные с Землей.

Записываем уравнения движения торпеды в проекциях на оси выбранной системы координат:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0; \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -G \quad \text{или} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g.$$

Интегрируем дифференциальные уравнения два раза:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= C_1; & \dot{y} &= -gt + C_3; \\ x &= C_1 t + C_2; & y &= -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4. \end{aligned}$$

Определяем постоянные интегрирования из следующих начальных условий: $t=0$, $v_x=v_{0x}$, откуда $C_1=v_{0x}$; $t=0$, $v_y=v_{0y}=0$, откуда $C_3=0$; $t=0$, $x=0$, откуда $C_2=0$; $t=0$, $y=H$, откуда $C_4=H$, следовательно, $x=v_{0x} \cdot t$; $y=H-\frac{gt^2}{2}$.

Траекторию торпеды $y=f(x)$ получаем, исключая из уравнений движения время t :

$$t = \frac{x}{v_{0x}}; \quad y = H - \frac{g(x/v_{0x})^2}{2} \quad \text{или} \quad y = H - \frac{gx^2}{2v_{0x}^2}.$$

Определяем время t_1 от начала торпедометания до приведения из условия, что при приведении $y = H - \frac{gt_1^2}{2} = 0$, откуда

$$t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 60}{9,81}} \approx 3,5 \text{ с.}$$

Находим расстояние, которое пролетает торпеда по горизонтали до места приведения; оно равно

$$x_1 = v_{0x} \cdot t_1 = 100 \cdot 3,5 = 350 \text{ м.}$$

Пример. На катер, принимаемый за материальную точку массой m , при отходе от пирса действует горизонтальная движущая сила, величина которой изменяется по уравнению $P=kt$, где k — постоянный коэффициент. Найти закон движения катера, считая, что он движется по прямой, при этом начальные условия следующие: при $t=0$ $x_0=0$, $v_0=0$.

Решение. Проводим ось Ox , начало которой совпадает с начальным положением катера. Отмечаем на оси Ox положение катера в произвольный момент времени t и силу, действующую на него.

Записываем дифференциальное уравнение движения катера в виде

$$m \frac{dv_x}{dt} = kt \text{ или } m dv_x = kt dt.$$

Интегрируем два раза:

$$mv_x = \frac{kt^2}{2} + C_1;$$

учитывая, что $v_x = \frac{dx}{dt}$,

$$mdx = \left(\frac{kt^2}{2} + C_1 \right) dt \text{ и } mx = \frac{kt^3}{6} + C_1 t + C_2.$$

Определяем постоянные интегрирования из начальных условий:

$$C_1 = 0; C_2 = 0.$$

Следовательно, до тех пор пока можно пренебречь сопротивлением воды,

$$x = \frac{kt^3}{6m}; v_x = \frac{k}{2m} t^2.$$

Пример*. Подводная лодка, не имеющая хода, получает отрицательную плавучесть p и начинает погружение, двигаясь поступательно. Под отрицательной плавучестью понимают разность между водоизмещением и выталкивающей силой, определяемой по закону Архимеда. При небольшой отрицательной плавучести принять сопротивление пропорциональным скорости погружения, т. е. $\bar{R} = -kF\bar{v}$, где F — площадь горизонтальной проекции лодки, а k — постоянный коэффициент. Определить закон погружения, если при $t=0$ $v_0=0$; $y_0=0$.

Решение. Проводим вертикально ось координат y с началом в центре тяжести M подводной лодки при $t=0$. Отмечаем промежуточное положение подводной лодки в произвольный момент времени t и силы, действующие на нее (рис. 19.6).

Составляем уравнения движения в виде

$$m \frac{dv_y}{dt} = p - kFv_y \text{ или, учитывая, что } m \neq 0, \frac{dv_y}{dt} = \frac{p}{m} - \frac{kFv_y}{m},$$

где $p > kFv_y$.

* Заимствован из задачника И. В. Мещерского «Сборник задач по теоретической механике».

Обозначаем:

$$\frac{p}{m} = Q; \quad \frac{kF}{m} = \mu.$$

Тогда

$$\frac{dv_y}{dt} = Q - \mu v_y$$

или

$$dt = \frac{dv_y}{Q - \mu v_y}.$$

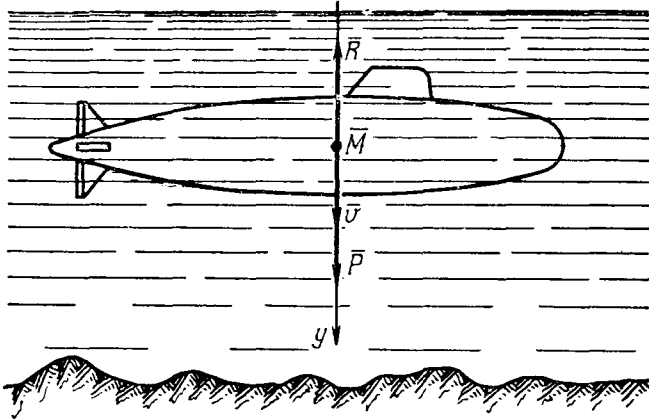


Рис. 19.6.

Интегрируем полученное дифференциальное уравнение

$$-\frac{1}{\mu} \ln(Q - \mu v_y) = t + C_1.$$

Из начального условия $t=0$; $v_0=0$ определяем C_1 :

$$-\frac{1}{\mu} \ln Q = C_1.$$

Следовательно,

$$-\frac{1}{\mu} [\ln(Q - \mu v_y) - \ln Q] = t$$

или $-\frac{1}{\mu} \ln \frac{Q - \mu v_y}{Q} = t$, откуда $1 - \frac{\mu}{Q} v_y = e^{-\mu t}$.

После алгебраических преобразований и подстановки значений Q и μ имеем

$$v_y = \frac{Q}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) = \frac{p}{kF} \left(1 - e^{-\frac{kF}{m} t} \right). \quad (*)$$

Перепишем полученное уравнение в виде

$$\frac{dy}{dt} = \frac{Q}{\mu} (1 - e^{-\mu t})$$

и интегрируем его. В результате получаем

$$y = \frac{Q}{\mu} \left(t + \frac{1}{\mu} e^{-\mu t} \right) + C_2.$$

Учитывая, что при $t=0$ $y_0=0$, находим $C_2 = -\frac{Q}{\mu^2}$. После подстановки значения C_2 расстояние y , пройденное подводной лодкой к моменту времени t , будет

$$y = \frac{Q}{\mu} \left(t + \frac{1}{\mu} e^{-\mu t} \right) - \frac{Q}{\mu^2} = \frac{Q}{\mu} \left[t - \frac{1}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) \right]$$

или

$$y = \frac{p}{kF} \left[t - \frac{m}{kF} \left(1 - e^{-\frac{kF}{m} t} \right) \right].$$

Из полученных уравнений следует, что при достаточно большом промежутке времени t движение близко к равномерному

$$v_{t \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{p}{kF} = \text{const.}$$

§ 105. ГАРМОНИЧЕСКИЕ (СВОБОДНЫЕ) КОЛЕБАНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Пусть тело массой $m = \frac{G}{g}$, которое в дальнейшем принимаем за материальную точку, подвешено на пружине (рис. 19.7). Установим уравнение движения материальной точки $y=f(t)$ после того, как она будет выведена из положения равновесия, если известно, что при $t=0$ $y=y_0$ и $v=v_0$. Массой пружины пренебречь. Коэффициент жесткости или жесткость пружины принять равным c .

Жесткостью называют величину силы, которую необходимо приложить для удлинения либо укорочения пружины на единицу длины (Н/м, кгс/см и т. д.).

Направляем ось y вниз (рис. 19.7, б), при этом ее начало выбираем в точке, совпадающей с центром тяжести груза в положении его статического равновесия. Обозначим статическое удлинение пружины буквой $f_{ст}$. Тогда $cf_{ст} = G$.

Изобразим груз в момент времени t (рис. 19.7, в, г). На него действует вниз сила тяжести (вес), вверх — сила \bar{F} , создаваемая пружинной, величина которой будет $c(f_{ст} + y)$ и которая называется восстановливающей силой.

Под действием неуравновешенной системы сил груз движется. Записываем уравнение движения груза

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = G - c(f_{ст} + y) = G - cf_{ст} - cy$$

или, учитывая, что $cf_{ст} = G$, получим

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -cy.$$

Разделим обе части уравнения на массу m и обозначим

$$\frac{c}{m} = k^2, \quad (19.13)$$

тогда

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + k^2 y = 0.$$

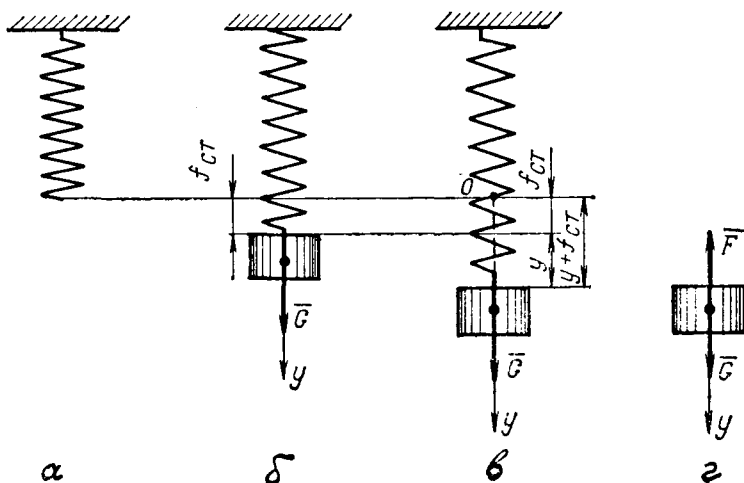


Рис. 19.7.

Полученное дифференциальное уравнение имеет решение

$$y = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Используем начальные условия для определения постоянных интегрирования. При $t=0$ $y=y_0=C_1$; $\dot{y}=\dot{y}_0=C_2k$, откуда $C_2 = \frac{v_0}{k} = \frac{v_0}{k}$. Следовательно, $y = y_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt$.

Последнее уравнение можно записать иначе. Так, полагая, что $y_0 = a \sin \delta$ и $\frac{v_0}{k} = a \cos \delta$, получим

$$y = a (\sin \delta \cos kt + \cos \delta \sin kt) = a \sin (kt + \delta), \quad (19.14)$$

где $\operatorname{tg} \delta = \frac{y_0 k}{v_0}$, а δ — фазовый угол.

Материальная точка совершает колебания, которые являются гармоническими и называются свободными или собственными.

Исследуем полученное равенство (19.14).

Функция $\sin(kt + \delta)$ — периодическая. Период колебаний T определяется из условия, что

$$\sin [k(t + T) + \delta] = \sin(kt + \delta)$$

или

$$[k(t + T) + \delta] - [kt + \delta] = 2\pi,$$

откуда

$$T = \frac{2\pi}{k} c.$$

Круговая частота будет $k = \frac{2\pi}{T}$ рад/с.

Учитывая, что $k^2 = \frac{c}{m} = \frac{cg}{G} = \frac{Gg}{f_{ст}G} = \frac{g}{f_{ст}}$, получаем

$$k = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{f_{ст}}} \quad (19.15)$$

или

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{f_{ст}}{g}}. \quad (19.15a)$$

Число колебаний в секунду обозначают ν и определяют по формуле

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{f_{ст}}} \text{ кол/с (Гц)}. \quad (19.16)$$

Число колебаний в минуту определяют по равенству

$$N = \frac{60}{T} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{f_{ст}}}.$$

При $g = 981 \text{ см/с}^2$, $\pi = 3,14$ и $[f_{ст}]$ в см получаем

$$N \approx \frac{300}{\sqrt{f_{ст}}} \text{ кол/мин.} \quad (19.17)$$

Частота и период колебаний не зависят от начальных условий, что объясняется линейным характером восстанавливающей силы. Формулы (19.16) и (19.17) могут быть использованы для определения собственных частот стержней и балок. Следует учесть, что, когда собственная частота совпадает с частотой возмущающей силы или кратна ей, имеет место резонанс, при котором амплитуды колебаний могут иметь недопустимо большие величины.

Пример. На две швеллерные двухопорные балки, у которых расстояние между опорами равно $l = 2 \text{ м}$, должен быть установлен электромотор весом $G = 2 \text{ тс}$ (19,6 кН) с частотой вращения $n = 560 \text{ об/мин}$ (рис. 19.8). Подобрать размеры сечения балок из условия прочности. Определить число собственных колебаний мотора, установленного на балки, и сопоставить его с числом оборо-

тов мотора. Вес балок не учитывать. Допускаемое напряжение принять равным

$$[\sigma] = 1000 \text{ кгс/см}^2 = 98,1 \text{ МН/м}^2.$$

Решение. Вычисляем значение максимального изгибающего момента для балки (посередине пролета), на которую действует половина веса электромотора

$$M_{\max} = \frac{1}{2} \frac{Gl}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2000 \cdot 200}{4} = 50 \cdot 10^3 \text{ кгс} \cdot \text{см} \approx 50 \cdot 10^2 \text{ Нм}.$$

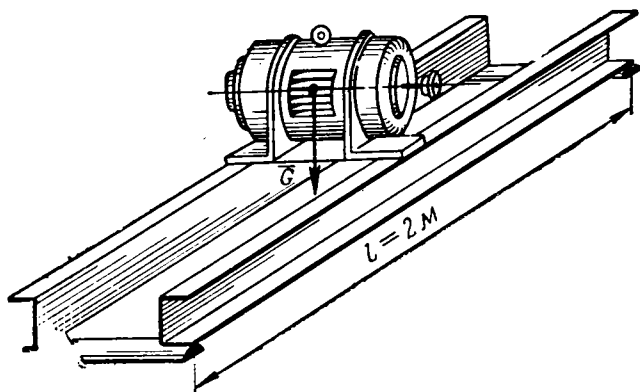


Рис. 19.8

Определяем из условия прочности необходимый осевой момент сопротивления

$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{50 \cdot 10^3}{10^3} = 50 \text{ см}^3.$$

Находим по ГОСТ 8240—56, что швеллер № 12 имеет $w = 50,6 \text{ см}^3$ и $I = 304 \text{ см}^4$.

Определяем статический прогиб балки посередине пролета, где установлен мотор, по формуле

$$f_{\text{ст}} = \frac{1}{48} \frac{Gl^3}{EI} = \frac{1}{48} \cdot \frac{2000 \cdot 200^3}{2 \cdot 10^6 \cdot 304} = 0,274 \text{ см}.$$

Вычисляем по формуле (19.17) частоту собственных колебаний

$$N = \frac{300}{\sqrt{f_{\text{ст}}}} = \frac{300}{\sqrt{0,274}} = 575 \text{ кол/мин}.$$

При числе оборотов двигателя $n = 560 \text{ об/мин}$ следует опасаться резонанса. Действительно, можно показать, что для учета массы балки нужно к весу $\frac{G}{2}$ прибавить $\frac{17}{35}$ веса балки. Тогда частота собственных колебаний будет несколько ниже полученной. Поэтому, несмотря на то, что с точки зрения прочности размеры сечения балок подобраны правильно, однако с целью избежания резонансных колебаний они должны быть при прочих равных условиях изме-

нены. Для повышения числа собственных колебаний $N > 575$ колеб/мин следует уменьшить $f_{ст}$, т. е. увеличить размеры сечения балок, либо уменьшить их длину l .

Рассмотрим пример интегрирования дифференциального уравнения движения при криволинейном движении материальной точки.

Пример. Траекторию ракеты или ракетного снаряда от начала движения до момента взрыва (или падения) обычно делят на два участка: участок активного полета (полет с работающим двигателем) и участок пассивного полета (полет с неработающим двигателем).

Рассматривая ракету на участке пассивного полета как материальную точку постоянной массы, определить уравнения движения ракеты, ее траекторию, максимальную высоту и дальность полета, а также время пассивного (свобод-

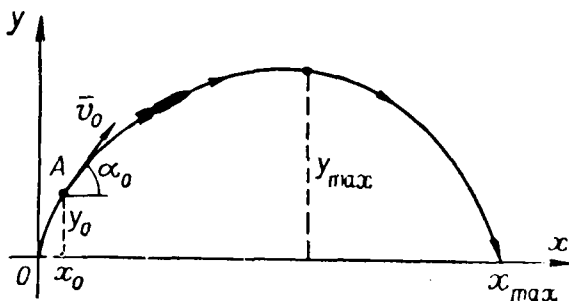


Рис. 19.9.

ного) полета до момента поражения цели на поверхности воды. Соппротивлением воздуха и изменением ускорения свободного падения g с изменением координат ракеты пренебречь и считать силу тяжести $\vec{G} = \text{const}$. Принять, что к концу участка активного полета координаты ракеты были $x_0 = 2000$ м, $y_0 = 4000$ м, величина скорости $\bar{v}_0 = 1200$ м/с, направление скорости \bar{v}_0 составляло с осью Ox угол $\alpha_0 = 45^\circ$ (рис. 19.9).

Решение. Проводим неподвижную систему прямоугольных координат Oxy , условно связанную с Землей. Плоскость Oxy совпадает с плоскостью, проходящей через \bar{v}_0 и силу притяжения Земли \vec{G} , при этом принимаем, что \vec{G} сохраняет свое вертикальное направление во все время движения ракеты.

Записываем дифференциальные уравнения движения ракеты в виде $m \frac{d^2x}{dt^2} = 0$; $m \frac{d^2y}{dt^2} = -G$, которые после сокращений будут иметь вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g.$$

Интегралы дифференциальных уравнений движения будут

$$\begin{aligned} \dot{x} &= c_1, & \dot{y} &= -gt + c_3, \\ x &= c_1t + c_2; & y &= -\frac{gt^2}{2} + c_3t + c_4. \end{aligned}$$

Используем начальные условия для определения постоянных интегрирования:

$$\text{при } t = 0 \quad \begin{cases} x = x_0 = c_2; & y = y_0 = c_4; \\ \dot{x} = v_0 \cos \alpha_0 = c_1; & \dot{y} = v_0 \sin \alpha_0 = c_3. \end{cases}$$

Записываем уравнения движения ракеты в проекциях на неподвижные оси прямоугольной системы координат

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + (v_0 \cos \alpha_0) t; \\ y &= y_0 + (v_0 \sin \alpha_0) t - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (19.18)$$

Устанавливаем траекторию движения ракеты $y=f(x)$ на участке пассивного полета. Для этого находим из первого уравнения движения время, равное $t = \frac{x - x_0}{v_0 \cos \alpha_0}$ и, подставляя его значение во второе уравнение системы (19.18), получаем уравнение траектории в виде

$$y = y_0 + v_0 \operatorname{tg} \alpha_0 (x - x_0) - \frac{g(x - x_0)^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha_0}.$$

Определяем максимальную высоту подъема ракеты из условия, что в этой точке траектории $v_y = 0$ или $-gt_1 + v_0 \sin \alpha_0 = 0$, откуда $t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g}$.

Подставляя значение t_1 во второе уравнение системы, имеем

$$y = y_0 + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{g} - \frac{g v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2g^2} = y_0 + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2g}.$$

При принятых числовых данных находим, что

$$t_1 = \frac{1200 \sqrt{2}}{2 \cdot 9,81} = 86,2 \text{ с}; \quad y_{\max} = 4000 + \frac{1200^2 \cdot 1/2}{2 \cdot 9,81} \approx 40800 \text{ м} = 40,8 \text{ км}.$$

Определяем время t_2 полета ракеты до поражения цели из условия, что в этот момент времени $y=0$, или

$$0 = y_0 + v_0 \sin \alpha_0 \cdot t_2 - \frac{gt_2^2}{2},$$

или

$$t_2^2 - \frac{2v_0 \sin \alpha_0 \cdot t_2}{g} - \frac{2y_0}{g} = 0,$$

откуда

$$t_2 = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{g^2} + \frac{2y_0}{g}}.$$

Подставляя числовые данные, получим

$$t_2 = \frac{1200 \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 9,81} + \sqrt{\frac{1200^2 \cdot 1/2}{9,81^2} + \frac{4000 \cdot 2}{9,81}} = 86,5 + 91,2 = 177,7 \text{ с} \approx 178 \text{ с}.$$

Следовательно, горизонтальная дальность полета ракеты будет

$$\begin{aligned} x_{\max} &= (v_0 \cos \alpha_0) t_2 + x_0 = 1200 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 178 + 2000 \approx \\ &\approx 151000 + 2000 = 153000 \text{ м} = 153 \text{ км}. \end{aligned}$$

**ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС.
ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ
МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ**

§ 106. ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Совокупность взаимодействующих материальных точек или тел, в которой положение или движение каждой из них не является независимым от положения или движения остальных, называется механической системой.

В дальнейшем в динамике будут рассматриваться в основном механические системы, которые для краткости иногда будут называться системами.

На систему действуют силы внутренние и внешние. Внутренними силами \bar{P}^i называют силы взаимодействия между точками или телами данной системы. Внешними силами \bar{P}^e называют силы, действующие на данную систему со стороны точек (тел) другой системы; при этом должно быть указано, какие точки (тела) входят в данную систему. Иногда внутренние силы для одной системы являются внешними для другой. Например, для ракеты сила притяжения Земли является внешней, а для системы «ракета — земля» — внутренней.

Отметим важное свойство внутренних сил: в соответствии с третьим законом Ньютона две точки данной системы взаимодействуют друг с другом; при этом силы взаимодействия равны по модулю, лежат на прямой, соединяющей эти точки, и противоположны по направлению. Таким образом, геометрическая сумма внутренних сил, которая называется главным вектором внутренних сил \bar{R}^i , в любой системе материальных точек равна нулю, т. е.

$$\bar{R}^i = \sum_{k=1}^n \bar{P}_k^i = 0. \quad (20.1)$$

Кроме того, из свойств внутренних сил следует, что геометрическая сумма моментов внутренних сил, которая называется г л а в

ным моментом внутренних сил, относительно любого полюса, в любой системе материальных точек также равна нулю:

$$\overline{M}_0^i = \sum_{k=1}^n \overline{m}_k (\overline{P}_k^i) = 0. \quad (20.2)$$

Отметим, что внутренние силы приложены к разным материальным точкам данной системы.

Система материальных точек или тел называется свободной, если каждая точка или тело системы может получить некоторое достаточно малое перемещение в любом направлении и некоторый поворот вокруг любой оси.

Система не свободна, если хотя бы на одну материальную точку системы наложены связи, ограничивающие ее движение.

Силы, действующие на механическую систему, делят на активные и реакции связей, иначе называемые пассивными силами.

Активными силами называются такие, которые продолжают действовать на систему после ее освобождения от связей; они не зависят от других сил, приложенных к системе. Активные силы могут быть функциями времени t , положения \overline{r}_k точек системы, скорости \overline{v}_k и т. д.

Реакции связей зависят от устройства связей, от активных сил и движения механической системы, поэтому они до определения движения остаются неизвестными.

Особо следует отметить то, что активные силы и реакции связей могут быть как внешними, так и внутренними. Так, силы веса, приложенные к точкам тела, являются активными внешними силами, а в Солнечной системе силы взаимного притяжения являются активными, но внутренними.

Рассмотрим k -ю материальную точку системы, движущуюся в инерциальной системе отсчета $Oxyz$. На точку, масса которой m_k , действуют равнодействующие внешних \overline{P}_k^e и внутренних \overline{P}_k^i сил.

Тогда уравнение ее движения будет

$$m_k \overline{\omega}_k = \overline{P}_k^e + \overline{P}_k^i, \quad (20.3)$$

где $k=1, 2, 3, \dots, n$ — число точек системы.

В проекциях на оси координат:

$$\left. \begin{aligned} m_k \ddot{x}_k &= X_k^e + X_k^i, \\ m_k \ddot{y}_k &= Y_k^e + Y_k^i, \\ m_k \ddot{z}_k &= Z_k^e + Z_k^i. \end{aligned} \right\} \quad (20.4)$$

Уравнения (20.4) являются дифференциальными уравнениями движения материальных точек системы в проекциях на оси неподвижной прямоугольной системы координат $Oxyz$.

Для определения движения системы необходимо проинтегрировать систему $3n$ дифференциальных уравнений. Задача эта весьма сложная, особенно с учетом того, что правая часть системы может являться функцией времени, положения и скорости этих точек.

При решении большинства практических задач достаточно определить суммарные характеристики движения системы в целом. К таким характеристикам относятся количество движения, главный момент количества движения и кинетическая энергия системы.

Для их определения используют так называемые общие теоремы динамики системы материальных точек. В частном случае, когда $k=1$, приходят к теоремам динамики материальной точки.

§ 107. ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС СИСТЕМЫ

Радиус-вектор центра тяжести тела, как известно из статики, определяется равенством

$$\bar{r}_c = \frac{\sum \bar{r}_k \cdot G_k}{\sum G_k},$$

где G_k — веса отдельных частей тела;

\bar{r}_k — радиус-вектор центра тяжести k -й части тела весом G_k .

Учитывая, что $G_k = m_k g$, получаем

$$\bar{r}_c = \frac{\sum \bar{r}_k m_k}{\sum m_k} = \frac{\sum \bar{r}_k \cdot m_k}{M}, \quad (20.5)$$

где $M = \sum m_k$ — масса тела.

Геометрическая точка, совпадающая с точкой C , радиус-вектор которой определяется формулой (20.5), называется центром масс. Понятие «центр масс» более общее, чем понятие «центр тяжести», так как оно характеризует распределение масс в теле и не связано с природой сил, действующих на точки тела.

Понятие «центр масс» может быть распространено на систему материальных точек. Радиус-вектор центра масс системы определяется по равенству (20.5) и зависит от распределения масс в системе. Вектор \bar{r}_c является функцией времени. Дифференцируя его два раза по времени, получим

$$\frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2} = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} \cdot m_k}{M} \quad (20.6)$$

или, учитывая, что $\frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2} = \bar{\omega}_c$ и $\frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \bar{\omega}_k$, имеем

$$M \bar{\omega}_c = \sum_{k=1}^n m_k \bar{\omega}_k. \quad (20.7)$$

Запишем правую часть равенства (20.7) с учетом (20.3) в виде

$$\sum_{k=1}^n m_k \bar{\omega}_k = \sum_{k=1}^n \bar{P}_k^e + \sum_{k=1}^n \bar{P}_k^i = \bar{R}^e + \bar{R}^i,$$

где

$\sum_{k=1}^n \bar{P}_k^e = \bar{R}^e$ — главный вектор внешних сил;

$\sum_{k=1}^n \bar{P}_k^i = \bar{R}^i$ — главный вектор внутренних сил.

Таким образом, с учетом (20.1)

$$M \bar{\omega}_c = \bar{R}^e. \quad (20.8)$$

Полученное равенство выражает теорему о движении центра масс.

Центр масс системы движется так, как двигалась бы материальная точка, масса которой равна массе всей системы и к которой приложена сила, равная главному вектору внешних сил, действующих на систему. Проектируя векторное равенство (20.8) на оси неподвижной прямоугольной системы координат, получим:

$$M \dot{x}_c = R_x^e; \quad M \dot{y}_c = R_y^e; \quad M \dot{z}_c = R_z^e. \quad (20.9)$$

Из формул (20.8) и (20.9) следует, что внутренние силы не влияют на движение центра масс и при поступательном движении тела его можно рассматривать как материальную точку с массой, равной массе тела.

Пусть $\bar{R}^e = 0$, тогда $\bar{\omega}_c = 0$ или $\bar{v} = \overline{\text{const}}$. Таким образом, если главный вектор внешних сил, действующих на систему, равен нулю, то центр масс движется равномерно и прямолинейно. Если же вначале центр масс находился в покое, тогда его покой при $\bar{R}^e = 0$ не нарушится. В частности, если проекция \bar{R}^e на какую-либо ось координат равна нулю, то проекция скорости центра масс системы на эту ось постоянна. В зависимости от начальных условий центр масс в направлении этой оси либо движется равномерно прямолинейно, либо находится в состоянии покоя. При взрыве ракеты или снаряда в безвоздушном пространстве центр масс осколков будет двигаться по той же траектории, по которой двигался бы центр масс неразорвавшегося снаряда или ракеты. Отметим, что на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости движение человека было бы вдоль плоскости невозможным, так как отсутствовали бы внешние горизонтальные силы (сила трения). При решении задач может встретиться частный случай, когда к покоящемуся твердому телу будет приложена пара сил. В этом случае центр масс будет неподвижен и тело, выходя из состояния покоя, будет вращаться вокруг оси, проходящей через центр масс.

Пример. На подводной лодке водоизмещением G_1 из кормы в нос перемещают груз весом G_2 на расстояние l (рис. 20.1). Определить перемещение подводной лодки, пренебрегая сопротивлением воды. Принять, что начальные скорости подводной лодки и груза были равны нулю.

Решение. Направим ось x горизонтально. На систему действуют три силы: силы тяжести подводной лодки и груза и сила от гидростатического давления, проекции которых на ось x равны нулю. Поэтому в соответствии с (20.9)

имеем $M\ddot{x}_c = R_x^e = 0$ или $v_{c,x} = \frac{dx_c}{dt} = \text{const.}$ Согласно условию задачи

$v_{c,x} |_{t=0} = 0$. Следовательно, $\frac{dx_c}{dt} = 0$ или $x_c = \text{const.}$

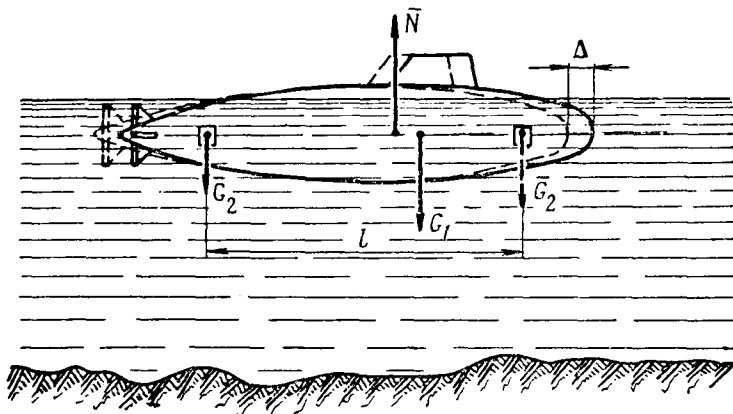


Рис. 20.1.

Обозначим искомое перемещение подводной лодки буквой Δ . Тогда до перемещения груза координата центра тяжести была $x_c^{(1)} = \frac{G_1 x_1 + G_2 x_2}{G_1 + G_2}$, после перемещения груза G_1 на величину l и перемещения подводной лодки на величину Δ

$$x_c^{(2)} = \frac{G_2(x_2 + l + \Delta) + G_1(x_1 + \Delta)}{G_1 + G_2}.$$

Абсцисса общего центра тяжести не изменилась, так как $R_x^e = 0$ и, следовательно, $x_c^{(1)} = x_c^{(2)}$. Подставляя их значения, получим

$$G_1 x_1 + G_2 x_2 = G_2(x_2 + l + \Delta) + G_1(x_1 + \Delta),$$

откуда

$$\Delta = - \frac{G_2 l}{G_1 + G_2}.$$

Отрицательный знак показывает, что подводная лодка переместится в сторону, противоположную перемещению груза.

§ 108. КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ

Количеством движения материальной точки называется векторная величина \vec{k} , равная произ-

ведению массы точки на ее скорость. Следовательно,

$$\bar{k} = m\bar{v}. \quad (20.10)$$

Вектор количества движения совпадает по направлению с вектором скорости (рис. 20.2). Единица измерения количества движения: в системе СИ — $1 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1}$; в системе МКГСС — $1 \frac{\text{кгс}}{\text{м/с}^2} \cdot 1 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 1 \text{ кгс} \cdot \text{с}$.

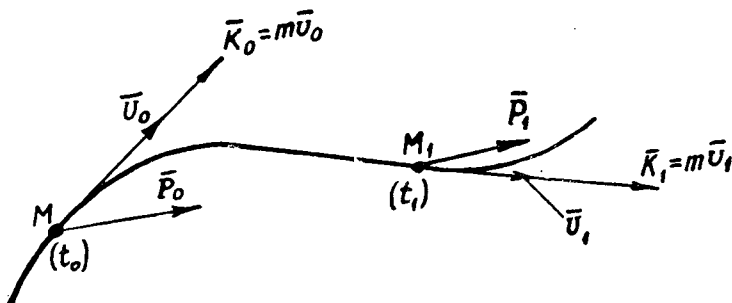


Рис. 20.2.

Количеством движения системы материальных точек или главным вектором количества движения системы называется векторная величина, равная геометрической сумме количеств движения материальных точек, входящих в данную систему:

$$\bar{K} = \sum_{j=1}^n \bar{k}_j = \sum_{i=1}^n m_j \bar{v}_j, \quad (20.11)$$

где m_j и v_j — масса и соответственно скорость j -й материальной точки, а n — число точек системы.

При любом и в частном случае при плоскопараллельном (плоском) движении твердого тела скорость любой его точки равна $\bar{v}_j = \bar{v}_c + \bar{v}_{rj}$, где \bar{v}_c — скорость центра масс, а \bar{v}_{rj} — скорость j -й точки в ее относительном движении вокруг центра масс. Тогда

$$\begin{aligned} \bar{K} &= \sum_{j=1}^n m_j (\bar{v}_c + \bar{v}_{rj}) = \sum_{j=1}^n m_j \bar{v}_c + \sum_{j=1}^n m_j \bar{v}_{rj} = \\ &= M \bar{v}_c + \sum_{j=1}^n m_j \frac{d\bar{r}_{1j}}{dt}, \end{aligned}$$

где M — масса твердого тела, а \bar{r}_{1j} — радиус-вектор j -й точки с началом в центре масс.

Перепишем последнее слагаемое правой части полученного равенства с учетом (20.5) в виде

$$\sum_{j=1}^n m_j \frac{d\bar{r}_{1j}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_j \bar{r}_{1j} = \frac{d}{dt} M\bar{r}_{1c} = 0, \text{ так как } \bar{r}_{1c} = 0.$$

Следовательно, количество движения твердого тела равно произведению его массы на скорость центра масс:

$$\bar{K} = M\bar{v}_c. \quad (20.12)$$

§ 109. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Перепишем основное уравнение (19.1) динамики материальной точки постоянной массы в виде

$$m\bar{w} = \frac{m d\bar{v}}{dt} = \frac{d(m\bar{v})}{dt} = \bar{P}.$$

Учитывая, что $m\bar{w} = \bar{k}$, где \bar{k} — количество движения материальной точки, получаем

$$\frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{P}. \quad (20.13)$$

Формула (20.13) выражает теорему об изменении количества движения материальной точки в дифференциальной форме: производная по времени от количества движения материальной точки равна равнодействующей всех сил, действующих на эту точку.

Из (20.13) следует:

$$\left. \begin{aligned} d(m\bar{v}) &= \bar{P} dt = d\bar{S}; \\ d\bar{k} &= \bar{P} dt = d\bar{S}, \end{aligned} \right\} \quad (20.14)$$

где $\bar{P} dt = d\bar{S}$ называют элементарным импульсом силы \bar{P} . Направления векторов $d\bar{S}$ и \bar{P} совпадают. Если $\bar{P} = \text{const}$, $\bar{S} = \bar{P}t$. Рассмотрим конечный промежуток времени, в течение которого действует переменная сила $\bar{P}(t)$. В каждый элементарный промежуток Δt_i импульс силы будет $\bar{P}_i \Delta t_i$. За конечный рассматриваемый промежуток времени от момента t_1 до момента t_2

$$\bar{S} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \bar{P}_i \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} \bar{P} dt,$$

где в правой части стоит интеграл от векторной функции скалярного аргумента t . Геометрическая сумма импульсов нескольких сил, действующих на материальную точку, равна импульсу равнодей-

ствующей этих сил за тот же промежуток времени. Интегрируя (20.14), получаем

$$\bar{k}_2 - \bar{k}_1 = m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1 = \bar{S}. \quad (20.15)$$

Полученное равенство выражает теорему об изменении количества движения материальной точки в интегральной (конечной) форме или теорему импульсов.

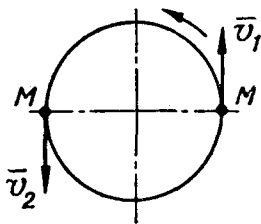


Рис. 20.3.

Изменение количества движения материальной точки за определенный промежуток времени равно импульсу силы, действующей на эту точку за тот же промежуток времени.

В том случае, когда на материальную точку одновременно действует несколько сил, изменение количества движения будет равно импульсу равнодействующей этих сил.

Уравнение (20.15) в проекциях на оси неподвижной системы прямоугольных координат записывается в виде:

$$\left. \begin{aligned} mv_{2x} - mv_{1x} &= S_x = \int_{t_1}^{t_2} X dt; \\ mv_{2y} - mv_{1y} &= S_y = \int_{t_1}^{t_2} Y dt; \\ mv_{2z} - mv_{1z} &= S_z = \int_{t_1}^{t_2} Z dt. \end{aligned} \right\} \quad (20.16)$$

Пример. Определить импульс силы, действующей на катер, за время, в течение которого катер, совершая циркуляцию по окружности с постоянной по модулю скоростью v , пройдет половину окружности (рис. 20.3). Катер принять за материальную точку массой m .

Решение. Отметим, что определить $\bar{S} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{P} dt$ нельзя, так как неизвестны ни сила \bar{P} , ни время t ее действия. Воспользуемся теоремой о изменении количества движения в конечной форме.

Подставляем значения скоростей в формулу (20.15), учитывая, что

$$\bar{v}_1 = -\bar{v}_2 \text{ и } |\bar{v}_1| = |\bar{v}_2| = v.$$

Тогда

$$\bar{S} = m\bar{v}_2 - (-m\bar{v}_2) = 2m\bar{v}_2.$$

Таким образом, направление импульса силы \bar{S} совпадает с направлением \bar{v}_2 и по величине он равен $S = 2mv$.

Пример. На флоте широкое распространение получили так называемые свободпоршневые дизель-компрессоры (СПДК). В цилиндре СПДК находятся два поршня, рис. 20.4, а, которые при сгорании топлива во внутренней полости движутся в противоположных направлениях и сжимают воздух во внешних компрессорных полостях. Схематически процесс происходит следующим образом.

Когда поршни сближаются и находятся вблизи так называемой внутренней мертвой точки, воздух, заключенный между ними, сжат и нагрет. При впрыске топлива в этот объем оно воспламеняется и начинается процесс горения. Давление в объеме между поршнями резко повышается, и поршни начинают двигаться в противоположных направлениях, сжимая воздух в компрессорных полостях. Вблизи наружных мертвых точек происходит интенсивное истечение продуктов сгорания, очистка и наполнение рабочего цилиндра воздухом через специальные окна. Давление внутри цилиндра падает. Поршни после мгновенной остановки начинают движение к внутренней мертвой точке, сжимая свежий заряд воздуха. В требуемый момент времени впрыскивается топливо, и процесс повторяется. Каждый поршень СПДК можно принять за материальную точку, движущуюся

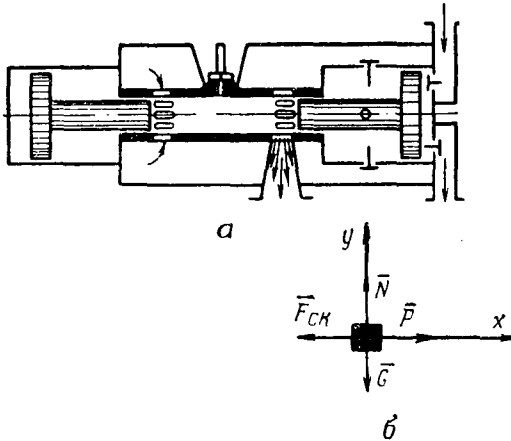


Рис. 20.4.

по горизонтальной прямой, на которую одновременно действуют (рис. 20.4, б) по ходу расширения следующие силы: движущая сила \bar{P} (разность между силами, создаваемыми давлением газов во внутренней и давлением воздуха в наружной полостях), условно принимаем по величине $P = P_0 \cos \omega t$ ($P_0, \omega = \text{const}$), вес поршня \bar{G} , реакция плоскости \bar{N} и сила трения скольжения $\bar{F}_{СК}$ ($F_{СК} = f_{СК} \cdot N$). Определить с помощью теоремы об изменении количества движения скорость поршня по ходу расширения газов в цилиндре в любой момент времени, и в частности для $t_0 = \frac{\pi}{2\omega}$.

Решение. Прикладываем к поршню, рассматриваемому как точку массой m , действующие силы ($\bar{P}, \bar{F}_{СК}, \bar{N}, \bar{G}$).

Записываем уравнение (20.15) в проекции на ось x

$$mv_{2x} - mv_{1x} = S_x,$$

в котором

$$m = \frac{G}{g}; v_{2x} = v; v_{1x} = 0; S_x = \int_0^t (P_0 \cos \omega t - f_{СК} N) dt.$$

Определяем скорость поршня в любой момент времени

$$v = \frac{1}{m} \int_0^t (P_0 \cos \omega t - f_{СК} N) dt = \frac{1}{m} \left(\frac{P_0}{\omega} \sin \omega t - f_{СК} N t \right).$$

Условием начала движения ($t=0$) будет $P_0 > f_{\text{ск}} N$. Учитывая, что $N=G$, получим

$$v = \frac{P_0}{G} \frac{g}{\omega} \sin \omega t - f_{\text{ск}} g t.$$

Определяем координату поршня, учитывая, что $v = \frac{dx}{dt}$:

$$x = \int_0^t \left(\frac{P_0 g}{G \omega} \sin \omega t - f_{\text{ск}} g t \right) dt = \frac{P_0 g}{G \omega^2} (1 - \cos \omega t) - f_{\text{ск}} g \frac{t^2}{2}.$$

В частности, для $t_0 = \frac{\pi}{2\omega}$

$$\sin \omega \frac{\pi}{2\omega} = 1; \quad \cos \omega \frac{\pi}{2\omega} = 0$$

и, следовательно,

$$v \Big|_{t_0} = \frac{P_0 g}{G \omega} - f_{\text{ск}} g \frac{\pi}{2\omega}; \quad x \Big|_{t_0} = \frac{P_0 g}{G \omega^2} - f_{\text{ск}} g \frac{\pi^2}{8\omega^2}.$$

Время t_1 движения поршня до остановки в наружных мертвых точках определится из условия, что $v=0$, т. е. из равенства

$$\frac{P_0 g}{G \omega} \sin \omega t_1 - f_{\text{ск}} g t_1 = 0 \quad \text{или} \quad \sin \omega t_1 = \frac{G \omega f_{\text{ск}} t_1}{P_0}.$$

Последнее уравнение решается графически или методом подбора. После мгновенной остановки поршни начнут сближаться.

§ 110. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим движение механической системы относительно инерциальной (неподвижной) системы координат. Выделим из данной системы одну j -ю точку, масса и ускорение которой будут соответственно m_j и $\bar{a}_j = \frac{d\bar{v}_j}{dt}$. Для рассматриваемой материальной точки, на которую действуют равнодействующие внешних и внутренних сил, в соответствии с (19.5) можно записать

$$m_j \bar{a}_j = \frac{d}{dt} (m_j \bar{v}_j) = \bar{P}_j^e + \bar{P}_j^i \quad (j=1, 2, 3, \dots, n).$$

Записывая подобные равенства для всех точек системы и затем их геометрически суммируя, получаем

$$\sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} (m_j \bar{v}_j) = \sum_{j=1}^n \bar{P}_j^e + \sum_{j=1}^n \bar{P}_j^i,$$

где

$$\sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} (m_j \bar{v}_j) = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n m_j \bar{v}_j = \frac{d\bar{K}}{dt}.$$

Тогда

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \sum_{j=1}^n \bar{P}_j^e = \bar{R}^e, \quad (20.17)$$

где $\bar{K} = \sum_{j=1}^n m_j \bar{v}_j$ — количество движения системы;

$\bar{R}^e = \sum_{j=1}^n \bar{P}_j^e$ — главный вектор внешних сил, приложенных к системе;

$\bar{R}^i = \sum_{j=1}^n \bar{P}_j^i = 0$ — главный вектор внутренних сил.

Уравнение (20.17) выражает теорему об изменении количества движения системы в дифференциальной форме: производная от количества движения системы материальных точек по времени равна геометрической сумме (главному вектору) приложенных к ней внешних сил.

В проекциях на оси прямоугольных координат уравнение (20.17) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dK_x}{dt} = \sum_{j=1}^n X_j^e = R_x^e, \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum_{j=1}^n Y_j^e = R_y^e; \\ \frac{dK_z}{dt} = \sum_{j=1}^n Z_j^e = R_z^e, \end{aligned} \quad (20.18)$$

где R_x^e , R_y^e и R_z^e — проекции главного вектора внешних сил на оси прямоугольной неподвижной системы координат.

Из (20.17) следует, что $d\bar{K} = \bar{R}^e dt$, или, интегрируя, получим

$$\bar{K}_2 - \bar{K}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^n \bar{P}_j^e \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \bar{R}^e dt.$$

Обозначим

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{R}^e dt = \bar{S}^e,$$

где

$$\sum_{j=1}^n \bar{P}_j^e = \bar{R}^e.$$

Тогда

$$\bar{K}_2 - \bar{K}_1 = \sum_{j=1}^n \bar{S}_j^e = \bar{S}^e. \quad (20.19)$$

Формула (20.19) выражает теорему о изменении количества движения системы в интегральной (конечной) форме.

Изменение количества движения механической системы за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов всех приложенных к ней внешних сил (импульсу главного вектора внешних сил) за тот же промежуток времени.

Теорема об изменении количества движения системы позволяет исключить из рассмотрения внутренние силы, которые, как правило, неизвестны. Теорема используется, в частности, при исследовании движения сплошных сред (жидкости, газы), в динамике точки переменной массы, при исследовании удара и т. д.

Условием сохранения постоянства количества движения системы будет равенство нулю главного вектора внешних сил, действующих на систему, т. е. $\overline{R^e} = 0$. При этом $\frac{d\overline{K}}{dt} = 0$ или $\overline{K} = \overline{\text{const}}$, где $\overline{\text{const}}$ — векторная постоянная интегрирования, которая определяется из начальных условий. Так, если при $t=0$ $\overline{K} = \overline{K}_0$, тогда $\overline{\text{const}} = \overline{K}_0$.

Таким образом, количество движения механической системы остается постоянным, если главный вектор внешних сил, действующих на систему, равен нулю (закон сохранения количества движения). В частном случае все внешние силы порознь могут быть равны нулю.

Уравнение (20.19) в проекциях на оси неподвижной прямоугольной системы координат записывается в виде:

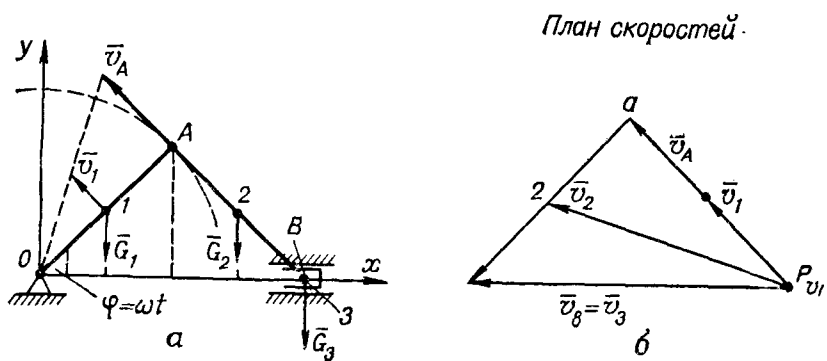
$$\begin{aligned} K_{2x} - K_{1x} &= \sum_{j=1}^n S_{jx}^e; & K_{2y} - K_{1y} &= \sum_{j=1}^n S_{jy}^e; \\ K_{2z} - K_{1z} &= \sum_{j=1}^n S_{jz}^e. \end{aligned} \quad (20.20)$$

Условием сохранения проекции количества движения механической системы на какую-либо неподвижную ось прямоугольной системы координат, например на ось x , является равенство нулю проекции главного вектора внешних сил на эту ось, т. е. если $R_x^e = 0$, то $K_x = \text{const}$ — закон сохранения количества движения.

Внутренние силы изменить количество движения системы не могут, хотя количество движения отдельных точек системы под действием внутренних сил может изменяться. Однако это изменение может происходить только таким образом, чтобы количество движения всей системы осталось неизменным.

Пример. Определить количество движения кривошипно-шатунного механизма, у которого длина кривошипа равна длине шатуна. Принять, что кривошип

вращается с постоянной угловой скоростью ω , стержни однородны и постоянного сечения и их центры масс совпадают с серединами стержней (рис. 20.5).



$OA=AB=r$ Определение \bar{K} графически

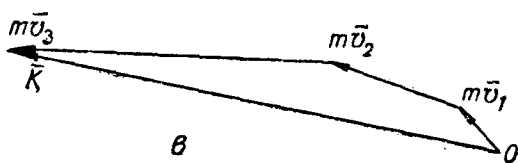


Рис. 20.5.

Решение. Определяем в произвольный момент времени ($\varphi = \omega t$) координаты центров масс звеньев: кривошипа 1, шатуна 2 и поршня 3 и соответствующие проекции скоростей. Результаты помещаем в табл. 7.

Таблица 7

Координаты и проекции скоростей центров масс звеньев	Центр масс звеньев		
	1	2	3
x	$\frac{r}{2} \cos \omega t$	$\frac{3r}{2} \cos \omega t$	$2r \cos \omega t$
y	$\frac{r}{2} \sin \omega t$	$\frac{r}{2} \sin \omega t$	0
$v_x = \dot{x}$	$-\frac{r\omega}{2} \sin \omega t$	$-\frac{3r\omega}{2} \sin \omega t$	$-2r\omega \sin \omega t$
$v_y = \dot{y}$	$\frac{r\omega}{2} \cos \omega t$	$\frac{r\omega}{2} \cos \omega t$	0

Определяем проекцию количества движения на ось x

$$K_x = \sum_{j=1}^3 K_{jx} = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + m_3 v_{3x} = \frac{G_1}{g} \left(-\frac{r\omega}{2} \sin \omega t \right) + \frac{G_2}{g} \left(-\frac{3r\omega}{2} \sin \omega t \right) + \frac{G_3}{g} (-2r\omega \sin \omega t) =$$

$$= -\frac{r\omega}{2g} (G_1 + 3G_2 + 4G_3) \sin \omega t.$$

Определяем проекцию количества движения на ось y :

$$K_y = \sum_{j=1}^3 K_{jy} = m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} + m_3 v_{3y} =$$

$$= \frac{G_1}{g} \left(\frac{r\omega}{2} \cos \omega t \right) + \frac{G_2}{g} \left(\frac{r\omega}{2} \cos \omega t \right) + \frac{G_3}{g} \cdot 0 = \frac{r\omega}{2g} (G_1 + G_2) \cos \omega t.$$

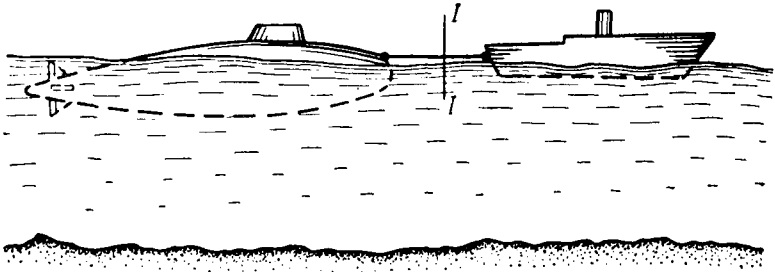


Рис. 20.6.

Количество движения системы в момент, когда кривошип повернут на угол $\varphi = \omega t$, будет:

$$K = \sqrt{K_x^2 + K_y^2} =$$

$$= \frac{r\omega}{2g} \sqrt{(G_1 + 3G_2 + 4G_3)^2 \sin^2 \omega t + (G_1 + G_2)^2 \cos^2 \omega t}.$$

Направление вектора \vec{K} определяется из равенств: $\cos(\vec{i}, \hat{K}) = \frac{K_x}{K}$;
 $\cos(\vec{j}, \hat{K}) = \frac{K_y}{K}$. В частности, при $t=0$ $K_x=0$; $K_y = \frac{r\omega}{g} (G_1 + G_2)$, т. е. $K|_{t=0}$ направлен по оси y .

При графическом решении задачи вначале строят план скоростей, определяют $\vec{K}_j = m_j \vec{v}_j$ каждого стержня, которые затем геометрически складывают (рис. 20.5).

Пример. Буксир (рис. 20.6) водоизмещением 600 т, величина скорости которого $v_6 = 1,5$ м/с, начинает буксировать с помощью троса подводную лодку водоизмещением 1200 т. Определить: 1) величину общей скорости лодки и буксира $v_{обш}$, если движущая сила и сила сопротивления воды уравновешиваются; 2) натяжение троса, если движение подводной лодки до достижения общей скорости продолжалось 1 с и было равноускоренным.

Решение. Определяем $v_{общ}$ из уравнения $K_{2x} - K_{1x} = \int_{t_1}^{t_2} R_x^e dt = 0$,

откуда следует, что $K_{2x} = K_{1x}$, где $K_{1x} = m_6 v_6 + 0$ — количество движения системы (буксир + ПЛ) до натяжения троса; $K_{2x} = (m_6 + m_{ПЛ}) v_{общ}$ — количество движения системы (буксир + ПЛ) после натяжения троса.

Следовательно,

$$m_6 v_6 = (m_6 + m_{ПЛ}) v_{общ}, \quad \text{откуда} \quad v_{общ} = \frac{m_6 v_6}{m_6 + m_{ПЛ}} = \frac{600 \cdot 1,5}{1200 + 600} = 0,5 \text{ м/с.}$$

Усилия, действующие в сечениях троса, являются внутренними и на количество движения системы не влияют. Однако с точки зрения прочности троса, если натяжение превысит предельное, может произойти обрыв троса. Для определения продольной силы N мысленно рассечем трос сечением $I-I$ и рассмотрим систему «ПЛ+трос» (рис. 20.6), для которой N является внешней силой.

Определяем натяжение троса из равенства

$$m_{ПЛ} \omega_{ПЛ} = N,$$

где при равнопеременном движении

$$\omega_{ПЛ} = \frac{v_{общ}}{t} = \frac{0,5}{1} = 0,5 \text{ м/с}^2.$$

Следовательно,

$$N = \frac{1200 \cdot 10^3}{9,81} \cdot 0,5 = 60\,000 \text{ кгс} = 60 \text{ тс.}$$

Натяжение троса можно определить, применяя теорему об изменении количества движения к системе «буксир — трос».

Тогда

$$m_6 v_2 - m_6 v_1 = N_{ср} t,$$

откуда

$$N_{ср} = \frac{m_6 (v_2 - v_1)}{t} = \frac{600 \cdot 10^3}{9,81} \cdot (0,5 - 1,5) = -60 \cdot 10^3 \text{ кгс} = -60 \text{ тс.}$$

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

§ 111. ПОНЯТИЕ О ТЕЛЕ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Рассмотрим систему материальных точек, каждая из которых имеет постоянную массу. Однако массу всей системы будем считать переменной за счет изменения ее состава. Примером такой системы является ракета: к концу активного участка траектории она теряет большую часть своей первоначальной массы. Реактивный самолет также является примером такой системы. Масса самолета изменяется как за счет расхода топлива, так и за счет сбрасывания, например, парашютного десанта, бомбовой нагрузки, стрельбы снарядами и т. п. С движением тел переменной массы имеют дело при исследовании процесса обледенения, при движении барабана со сматывающимся тросом и т. д.

Телом переменной массы мы будем в дальнейшем называть такое тело, масса которого изменяется в процессе движения вследствие присоединения к нему или отбрасывания (удаления) от него элементарных частиц. Точки, изменяющие массу тела, не возникают и не исчезают, а вводятся в рассмотрение или исключаются из него.

Если при рассмотрении движения тела переменной массы кинематическими элементами вращательного движения его можно пренебречь по сравнению с элементами поступательного движения, то такое тело называется материальной точкой переменной массы.

Создателями теории движения точки переменной массы являются русские механики И. В. Мещерский и К. Э. Циолковский.

Проф. И. В. Мещерский в 1897 г. опубликовал работу в этой области — «Динамика точки переменной массы», а в 1904 г. другую — «Уравнения движения точки переменной массы в общем случае», в которой рассмотрел общий случай движения точки переменной массы.

К. Э. Циолковский в 1903 г. опубликовал работу «Исследование мировых пространств реактивными приборами», в которой изложил результаты исследования прямолинейного движения тел переменной массы (ракеты). Он показал, что при достаточно вы-

соких относительных скоростях отбрасывания частиц и больших отношениях начальной массы к конечной можно добиться весьма высоких скоростей полета. К. Э. Циолковский разработал также основы теории многоступенчатых ракет.

Советские ученые в последние годы добились исключительных успехов в области реактивной техники.

При исследовании движения материальной точки переменной массы делаем следующие допущения.

Масса материальной точки изменяется за счет непрерывного присоединения или отделения частичек, массы которых постоянны и весьма малы по сравнению с массой материальной точки.

Взаимодействие материальной точки и присоединяющихся (отделяющихся) частиц происходит в момент присоединения (отделения). Частицы, присоединяющиеся к материальной точке, начинают двигаться с той же скоростью, что и точка. Начальная скорость отделяющихся частиц равна скорости материальной точки.

Эти допущения И. В. Мещерский сформулировал следующим образом: к системе непрерывно присоединяются (или отбрасываются) частицы бесконечно малых масс таким образом, что скорости точек системы изменяются непрерывно, тогда как скорости присоединяющихся частиц изменяются на конечные величины в моменты их присоединения к системе.

Таким образом, масса материальной точки m предполагается изменяющейся непрерывно $m = m(t)$ и является дифференцируемой функцией времени. Отметим, что центр масс поступательно движущегося тела переменной массы изменяет свое положение относительно тела, что не учитывается при исследовании движения материальной точки переменной массы.

§ 112. ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ. УРАВНЕНИЕ И. В. МЕЩЕРСКОГО

Рассмотрим общий случай движения материальной точки переменной массы, когда частицы одновременно присоединяются к материальной точке и отделяются от нее. Обозначим (рис. 21.1):

\bar{v} — вектор абсолютной скорости материальной точки;
 \bar{u}_1, \bar{u}_2 — соответственно векторы абсолютной скорости присоединяющейся и отделяющейся элементарных частиц;

$m, \Delta m_1, \Delta m_2$ — соответствующие массы материальной точки присоединяющейся и отделяющейся частиц.

Для исследования движения материальной точки переменной массы используем теорему об изменении количества движения системы в дифференциальной форме.

В произвольный момент времени t количество движения системы (точки и частицы)

$$\bar{K}_1 = m\bar{v}(t) + \Delta m_1\bar{u}_1(t). \quad (21.1)$$

После присоединения и одновременного отделения частиц к моменту времени $t + \Delta t$

$$\bar{K}_2 = (m + \Delta m_1 - \Delta m_2) \bar{v}(t + \Delta t) + \Delta m_2 \bar{u}_2(t + \Delta t). \quad (21.2)$$

Таким образом, изменение количества движения системы

$$\begin{aligned} \Delta \bar{K} = \bar{K}_2 - \bar{K}_1 = m [\bar{v}(t + \Delta t) - \bar{v}(t)] - \\ - \Delta m_2 [\bar{v}(t + \Delta t) - \bar{u}_2(t + \Delta t)] + \Delta m_1 [\bar{v}(t + \Delta t) - \bar{u}_1(t)]. \end{aligned}$$

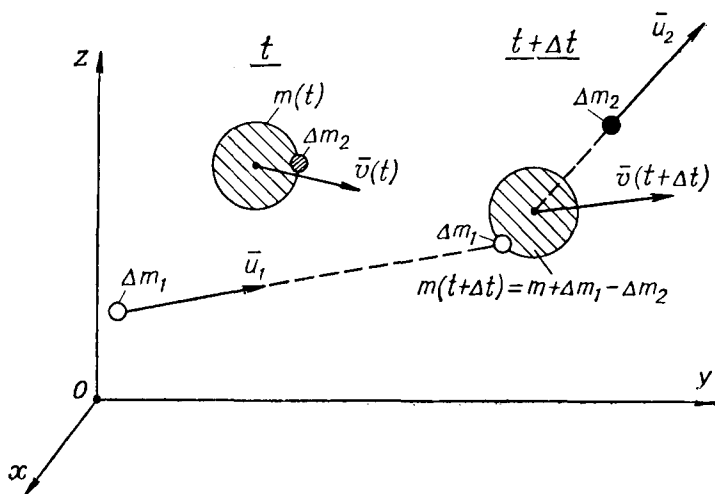


Рис. 21.1.

Скорость и масса материальной точки являются непрерывными функциями времени; при $\Delta t \rightarrow 0$ $\Delta \bar{v} \rightarrow 0$, $\Delta m_1 \rightarrow 0$, $\Delta m_2 \rightarrow 0$. Поэтому теорему об изменении количества движения можно записать в виде

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{K}}{\Delta t} = \frac{d\bar{K}}{dt} = m \frac{d\bar{v}}{dt} - \frac{dm_2}{dt} (\bar{v} - \bar{u}_2) + \frac{dm_1}{dt} (\bar{v} - \bar{u}_1) = \bar{R}^e \quad (21.3)$$

или

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{R}^e + \frac{dm_1}{dt} (\bar{u}_1 - \bar{v}) - \frac{dm_2}{dt} (\bar{u}_2 - \bar{v}), \quad (21.4)$$

где \bar{R}^e — главный вектор внешних сил, приложенных к системе.

Пренебрегаем внешними силами, действующими на присоединяемые и отделяемые частицы, а также принимаем, что силы, приложенные к точке переменной массы, приводятся к равнодействующей \bar{P} . Тогда $\bar{R}^e = \bar{P}$ и уравнение движения точки переменной массы будет

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{P} + (\bar{u}_1 - \bar{v}) \frac{dm_1}{dt} - (\bar{u}_2 - \bar{v}) \frac{dm_2}{dt}. \quad (21.5)$$

Полученное уравнение называется обобщенным уравнением Мещерского.

Рассмотрим момент времени, когда масса материальной точки будет равна

$$m = m_0 + m_1 - m_2,$$

где m_0 — начальная масса. Массовый секундный расход $m_c = \frac{dm}{dt} = \frac{dm_1}{dt} - \frac{dm_2}{dt}$.

Если масса точки изменяется только вследствие присоединения частиц, то $\frac{dm_2}{dt} = 0$ и $\frac{dm}{dt} = \frac{dm_1}{dt}$. Если же имеет место только отделение частиц, то $\frac{dm_1}{dt} = 0$ и $\frac{dm}{dt} = -\frac{dm_2}{dt}$. Обозначим $\bar{u}_1 - \bar{v} = \bar{u}_r^{(1)}$ и $\bar{u}_2 - \bar{v} = \bar{u}_r^{(2)}$, где $\bar{u}_r^{(1)}$ и $\bar{u}_r^{(2)}$ — относительные скорости соответственно присоединяющихся и отделяющихся частиц.

Тогда дифференциальное уравнение движения материальной точки переменной массы как для случая только присоединения, так и для случая только отделения частиц можно записать в форме

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{P} + \bar{u}_r \frac{dm}{dt}. \quad (21.6)$$

В случае присоединения частиц $m_c = \frac{dm}{dt} > 0$, при отделении $m_c = \frac{dm}{dt} < 0$.

Обозначим в равенстве (21.5)

$$\left. \begin{aligned} &(\bar{u}_1 - \bar{v}) \frac{dm_1}{dt} - (\bar{u}_2 - \bar{v}) \frac{dm_2}{dt} = \bar{\Phi} \\ \text{или} &\bar{u}_r^{(1)} \frac{dm_1}{dt} - \bar{u}_r^{(2)} \frac{dm_2}{dt} = \bar{\Phi}, \end{aligned} \right\} \quad (21.7)$$

где $\bar{\Phi}$ называется реактивной силой. Тогда

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{P} + \bar{\Phi}. \quad (21.8)$$

Таким образом, дифференциальное уравнение движения точки переменной массы приводится по форме к дифференциальному уравнению движения точки постоянной массы, в правой части которого к равнодействующей внешних сил, действующих на точку, должна быть присоединена реактивная сила. Отметим, что даже при отсутствии внешних сил материальная точка переменной массы может двигаться с ускорением под действием реактивной силы.

§ 113. РЕАКТИВНАЯ СИЛА

Остановимся несколько подробнее на исследовании реактивной силы $\bar{\Phi}$, которая существенно зависит от относительной скорости (соответственно присоединяющихся или отделяющихся частиц), т. е. от величины $\bar{u}_r = \bar{u} - \bar{v}$.

При одновременном присоединении и отделении частиц реактивная сила равна нулю, если

$$\frac{dm_1}{dt} (\bar{u}_1 - \bar{v}) = \frac{dm_2}{dt} (\bar{u}_2 - \bar{v}).$$

Заметим, что если массовый секундный расход присоединяющихся и отделяющихся частиц будет одинаков, т. е. $\frac{dm_1}{dt} = \frac{dm_2}{dt} = \frac{dm}{dt}$, то

$$\bar{\Phi} = \frac{dm}{dt} (\bar{u}_1 - \bar{v}) - \frac{dm}{dt} (\bar{u}_2 - \bar{v}) = \frac{dm}{dt} (\bar{u}_1 - \bar{u}_2). \quad (21.9)$$

Из полученного уравнения (21.9) следует, что появление реактивной силы при $\frac{dm_1}{dt} = \frac{dm_2}{dt}$ обуславливается геометрической разностью скоростей присоединяющихся и отделяющихся частиц. В том случае, когда $\bar{u}_r^{(2)} = \bar{u}_2 - \bar{v} = 0$ и абсолютная скорость присоединяющихся частиц $\bar{u}_1 = 0$, из (21.4) следует, что

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{P} - \bar{v} \frac{dm}{dt},$$

откуда

$$\frac{d(m\bar{v})}{dt} = \bar{P}. \quad (21.10)$$

В формуле (21.10) масса является переменной величиной. Рассмотрим более подробно случай только отделения частиц, т. е. когда в уравнении (21.6) $\frac{dm}{dt} < 0$:

$$\bar{\Phi} = \frac{dm}{dt} \bar{u}_r,$$

т. е. $\bar{\Phi}$ направлена в сторону, противоположную \bar{u}_r .

В том случае, когда отделение происходит в направлении, противоположном скорости \bar{v} :

$$\bar{\Phi} = \frac{dm}{dt} (-u - v) = -\frac{dm}{dt} (u + v) = -\frac{dm}{dt} u_r > 0,$$

т. е. реактивная сила направлена по скорости движения \bar{v} , является движущей силой и имеет наибольшее значение.

Когда отделение частиц происходит в направлении скорости \bar{v} ,

$$\bar{\Phi} = \frac{dm}{dt} u_r < 0,$$

т. е. реактивная сила направлена против направления скорости и является тормозящей.

Реактивная сила обращается в нуль, если:

- а) $\frac{dm}{dt} = 0$, т. е. масса материальной точки постоянна;
- б) $u_r = 0$, т. е. когда относительная скорость равна нулю.

Численные значения реактивной силы зависят от массового секундного расхода и относительной скорости \bar{u}_r отбрасываемых частиц. Так, если принять время сгорания горючего весом $G = 13,5$ кН равным 10 с и относительную скорость $u_r = 1500$ м/с, получим среднее значение реактивной силы:

$$\Phi = \frac{G}{gt} u_r = \frac{13,5}{9,81 \cdot 10} \cdot 1500 \approx 206 \text{ кН.}$$

Обратим внимание на то, что в данном примере реактивная сила по модулю превосходит вес топлива ($\Phi > G$).

§ 114. ФОРМУЛА К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО

Рассмотрим движение ракеты (рис. 21.2), состоящей из постоянной массы m_k — ракеты без горючего, и переменной массы горю-

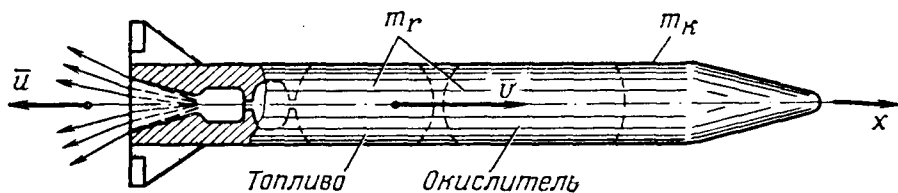


Рис. 21.2.

чего m_r . Тогда $m = m_k + m_r$. Масса газов, выходящих из сопла в секунду (массовый расход), определяется по равенству

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm_k}{dt} + \frac{dm_r}{dt} = \frac{dm_r}{dt}.$$

В дальнейшем предполагаем, что ракета движется прямолинейно. Относительная скорость истечения газов постоянна ($\bar{u}_r = \text{const}$) и направлена в сторону, противоположную \bar{v} .

Сопротивлением воздуха и силой тяжести по отношению к реактивной силе можно в первом приближении пренебречь. Отметим, что это справедливо лишь при достаточно большом удалении ракеты от Земли. Тогда уравнение движения ракеты будет иметь вид

$$m \frac{dv}{dt} = - \frac{dm}{dt} u_r \quad (21.11)$$

или

$$m dv = -u_r dm,$$

откуда

$$dv = -u_r \frac{dm}{m}.$$

Интегрируя, получим

$$\int_{v_0}^v dv = -u_r \int_{m_0}^m \frac{dm}{m}$$

или

$$v - v_0 = -u_r \ln \frac{m}{m_0} = u_r \ln \frac{m_0}{m}, \text{ где } m_0 = m_k + m_{r0}$$

— начальная масса ракеты.

Выражение, определяющее скорость ракеты в любой момент времени,

$$v = v_0 + u_r \ln \frac{m_k + m_{r0}}{m_k + m_r}. \quad (21.12)$$

Максимальная скорость в конце активного участка, когда $m_r = 0$, определяется из равенства

$$v_{\max} = v_0 + u_r \ln \frac{m_k + m_{r0}}{m_k}. \quad (21.13)$$

Обозначим

$$\frac{m_0}{m_k} = \frac{m_k + m_{r0}}{m_k} = 1 + \frac{m_{r0}}{m_k} = z, \quad (21.14)$$

где z называется числом Циолковского. Тогда так называемая идеальная (характеристическая) скорость будет

$$v_{\max} = v_0 + u_r \ln z. \quad (21.15)$$

Уравнение (21.15) впервые было получено К. Э. Циолковским и является первой формулой Циолковского. Из формулы (21.15) следует, что наибольшая скорость ракеты зависит от ее начальной скорости v_0 , от относительной скорости истечения продуктов сгорания u_r и от числа Циолковского z , т. е. от относительного запаса топлива.

Важно отметить, что скорость ракеты в конце активного участка при сделанных предположениях не зависит от того, насколько быстро сгорает топливо, т. е. от закона горения.

Формула Циолковского указывает пути получения больших скоростей. Увеличение u_r и $\frac{m_0}{m_k}$ связано с видом топлива и конструкцией ракеты.

У крупных ракет $\frac{m_0}{m_k} = 3 \div 4$ и более, $u_r = 2000-2500$ м/с. Первую космическую скорость, равную 7,9 км/с, можно получить в одноступенчатой ракете при $v_0 = 0$ для $\frac{m_0}{m_k} = 3 \div 4$ при $u_r = 6000$ м/с. Формула Циолковского указывает, что $v_{\max} = 7,9$ м/с может быть достигнута за счет увеличения v_0 . Это достигается путем создания многоступенчатой ракеты, части (ступени) которой по мере израсходования топлива, содержащегося в них, автоматически отделяются.

Учитывая, что $v = \frac{dx}{dt}$ и при $t=0$ $x_0=0$, пользуясь равенством (21.12), запишем

$$dx = v_0 dt + u_r \ln \frac{m_0}{m} dt,$$

откуда

$$x = v_0 t + u_r \int_0^t \ln \frac{m_0}{m} dt, \quad (21.16)$$

где

$m_0 = m_k + m_{r0}$ — начальная масса ракеты;

$m = m_k + m_r$ — масса ракеты в момент времени t .

Из равенства (21.16) следует, что расстояние x , проходимое ракетой, существенно зависит от закона изменения ее массы, т. е. от закона сгорания топлива.

Рассмотрим в качестве примеров два закона изменения массы ракеты:

а) $m = m_0 e^{-\beta t}$ — экспоненциальный (показательный) закон.

Тогда

$$\ln \frac{m}{m_0} = -\beta t, \text{ откуда } t = \frac{\ln \frac{m_0}{m}}{\beta}. \quad (21.17)$$

Время полета ракеты на активном участке траектории

$$t_1 = \frac{\ln \frac{m_0}{m_k}}{\beta} = \frac{\ln z}{\beta} = 2,3 \frac{\lg z}{\beta}. \quad (21.18)$$

Координата x определяется из (21.16):

$$x = v_0 t + u_r \int_0^t \beta t dt = v_0 t + u_r \frac{\beta t^2}{2}. \quad (21.19)$$

Из (21.19) следует, что движение ракеты равноускоренное,

б) $m = m_0 (1 - at)$ — линейный закон.

Тогда $\ln \frac{m_0}{m} = -\ln (1 - at)$

и

$$\begin{aligned}x &= v_0 t - u_r \int_0^t \ln(1 - at) dt = \\ &= v_0 t + \frac{u_r}{a} [(1 - at) \ln(1 - at) + at].\end{aligned}\quad (21.20)$$

Вторая формула Циолковского. Учитывая вес ракеты, дифференциальное уравнение движения будет иметь вид

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - u_r \frac{dm}{dt},$$

откуда

$$dv = -g dt - u_r \frac{dm}{m}.$$

Принимаем $g = \text{const}$ и $u_r = \text{const}$. Тогда после интегрирования получаем

$$v - v_0 = -gt + u_r \ln \frac{m_0}{m}. \quad (21.21)$$

Максимальная скорость (при $m = m_k$) определится по формуле

$$v_{\max} = v_0 - gt + u_r \ln \frac{m_0}{m_k} = v_0 - gt + u_r \ln z. \quad (21.22)$$

Это и есть вторая формула Циолковского.

Учитывая, что

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 - gt + u_r \ln \frac{m_0}{m},$$

находим координату x . Полагаем, что при $t=0$ $x_0=0$. Тогда

$$x = v_0 t - \frac{gt^2}{2} + u_r \int_0^t \ln \frac{m_0}{m} dt. \quad (21.23)$$

Как и ранее, координата x является функцией закона сгорания, т. е. изменения массы ракеты.

Так, например, при показательном законе изменения массы из (21.17) и (21.23) следует

$$x = v_0 t - \frac{gt^2}{2} + u_r \int_0^t \beta t dt = v_0 t - (u_r \beta - g) \frac{t^2}{2}. \quad (21.24)$$

Очевидно, длина активного участка траектории определяется из равенства

$$x_{\max} = v_0 t_1 + (u_r \beta - g) \frac{t_1^2}{2}, \quad (21.25)$$

где t_1 находим из равенства (21.18).

При принятых допущениях высота вертикального подъема ракеты после активного участка определяется из равенства

$$h_1 = \frac{v_{\max}^2}{2g}.$$

Следовательно, общая высота подъема, например, метеорологической ракеты равна

$$H = x_{\max} + h_1 = x_{\max} + \frac{v_{\max}^2}{2g}. \quad (21.26)$$

Во второй формуле Циолковского принято, что $\bar{g} = \overline{\text{const}}$. В действительности g изменяется. Используем для определения зависимости g от высоты закон всемирного тяготения, который записывается в виде

$$P = k \frac{mM}{r^2},$$

где P — величина силы, действующей между материальной точкой и Землей;

m и M — массы материальной точки и Земли;

r — расстояние между центром Земли и точкой;

k — постоянный коэффициент.

Обозначим средний радиус Земли через R_0 . На поверхности Земли сила притяжения будет $P = mg_0 = \frac{kmM}{R_0^2}$, откуда $k = \frac{g_0 R_0^2}{M}$.

Следовательно,

$$P = \frac{g_0 R_0^2}{M} \cdot \frac{mM}{r^2} = g_0 \frac{mR_0^2}{r^2}.$$

Подставляя $P = mg$, после сокращений получаем

$$g = g_0 \frac{R_0^2}{r^2} = g_0 \frac{R_0^2}{(x + R_0)^2},$$

что и следует учитывать при уточнении второй формулы Циолковского.

Пример. Полная масса ракеты 12,5 т, масса горючего 8,8 т. Определить максимальную высоту вертикального подъема ракеты, максимальную скорость и мощность двигателей в конце активного участка, если принять закон изменения массы в виде $m = m_0 e^{-0,02t}$ и величину относительной скорости истечения газов равной $u_r = 2000$ м/с = const. Сопротивлением воздуха и изменением ускорения g пренебречь.

Решение. Определяем число Циолковского по равенству (21.14)

$$z = \frac{m_0}{m_k} = \frac{12500}{12500 - 8800} = 3,38.$$

По формуле (21.18) определяем продолжительность полета по активному участку траектории

$$t_1 = 2,3 \frac{\lg z}{\beta} = 2,3 \frac{\lg 3,38}{0,02} \approx 61 \text{ с.}$$

По формулам (21.22) и (21.25) находим при $v_0=0$:

$$\begin{aligned} v_{\max} &= -gt_1 + u_r \ln z = -9,81 \cdot 61 + 2000 \ln 3,38 = \\ &= -600 + 2000 \cdot 1,22 = 1840 \text{ м/с;} \end{aligned}$$

$$x_{\max} = (u_r \beta - g) \frac{t_1^2}{2} = (2000 \cdot 0,02 - 9,81) \frac{61^2}{2} \approx 55100 \text{ м} = 55,1 \text{ км.}$$

Общая высота подъема ракеты по формуле (21.26)

$$H = x_{\max} + \frac{v_{\max}^2}{2g} = 55100 + \frac{1840^2}{2 \cdot 9,81} \approx 227 \text{ км.}$$

В действительности с учетом сопротивления воздуха v_{\max} и x_{\max} будут меньше.

Мощность, развиваемая реактивной силой к концу активного участка траектории, будет равна

$$N = \Phi \cdot v_{\max},$$

где $\Phi = -u_r \frac{dm}{dt}$.

При принятом законе изменения массы

$$\Phi = -u_r \frac{d}{dt} (m_0 e^{-\beta t}) = u_r \beta m_0 e^{-\beta t}.$$

В конце активного участка $m_0 e^{-\beta t_1} = m_k$ и, следовательно,

$$N = u_r \cdot \beta \cdot m_k \cdot v_{\max} = \frac{2000 \cdot 0,02 \cdot 3700 \cdot 1840}{1000} = 272000 \text{ кВт.}$$

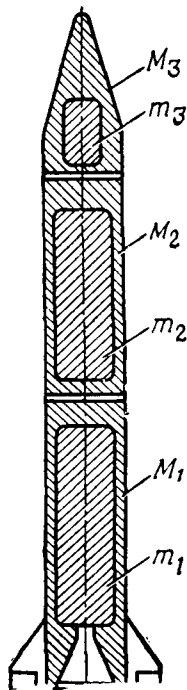


Рис. 21.3.

Пример *. В трехступенчатой ракете принять массы корпусов по ступеням соответственно $M_1, M_2=0,5 M_1, M_3=0,5 M_2$ (рис. 21.3). Числа Циолковского по первой и второй ступеням принять равными $z_1=z_2=4$. Величина относительной скорости истечения $u_r=2000 \text{ м/с}=\text{const}$, начальная скорость ракеты $v_0=0$.

Массы горючего по ступеням обозначим соответственно m_1, m_2 и m_3 . Определить суммарную массу горючего, потребную при запуске трехступенчатой ракеты, и сопоставить ее с массой одноступенчатой, если для обеспечения выхода на орбиту вокруг Земли необходимо, чтобы $v_{\max}=8 \text{ км/с}$.

Решение. Согласно уравнению Циолковского

$$v_{1 \max} = u_r \ln z_1 = u_r \ln \frac{M_1 + M_2 + M_3 + m_1 + m_2 + m_3}{M_1 + M_2 + M_3 + m_2 + m_3},$$

* Н. А. Бражниченко и др. Сборник задач по теоретической механике.

где $v_{1 \max}$ — скорость в конце первого активного участка (непосредственно перед отделением первой ступени);

$$v_{2 \max} = v_{1 \max} + u_r \ln z_2 = \frac{M_2 + M_3 + m_2 + m_1}{M_2 + M_3 + m_3},$$

где $v_{2 \max}$ — скорость в конце второго активного участка (без отделившейся первой ступени).

Скорость $v_{3 \max}$ в конце третьего активного участка (после отделения второй ступени) будет

$$v_{3 \max} = u_r \ln z_3 + v_{2 \max} = u_r \ln z_1 + u_r \ln z_2 + u_r \ln z_3 = u_r \ln z_1 z_2 z_3,$$

где $z_3 = \frac{M_3 + m_3}{M_3} = 1 + \frac{m_3}{M_3}$.

Из последнего равенства следует, что

$$\ln z_1 z_2 z_3 = \frac{v_{3 \max}}{u_r} \quad \text{или} \quad z_1 z_2 z_3 = e^{\frac{v_{3 \max}}{u_r}}.$$

Следовательно,

$$z_3 = \frac{e^{\frac{v_{3 \max}}{u_r}}}{z_1 z_2} = \frac{e^{\frac{8000}{2000}}}{4 \cdot 4} = 3,41.$$

Зная число Циолковского для третьей ступени, находим m_3 :

$$m_3 = (z_3 - 1) M_3 = (z_3 - 1) 0,25 M_1 = (3,41 - 1) 0,25 M_1 = 0,6025 M_1.$$

Определяем m_2 , зная из условия задачи, что

$$z_2 = \frac{M_2 + M_3 + m_2 + m_1}{M_2 + M_3 + m_3} = 1 + \frac{m_2}{M_2 + M_3 + m_3} = 4,$$

откуда

$$m_2 = (4 - 1) (M_2 + M_3 + m_3) = 3 (0,5 M_1 + 0,25 M_1 + 0,6025 M_1) = 4,055 M_1.$$

Определяем m_1 аналогично предыдущему

$$z_1 = \frac{M_1 + M_2 + M_3 + m_1 + m_2 + m_3}{M_1 + M_2 + M_3 + m_2 + m_3} = 4,$$

откуда

$$m_1 = 3 (M_1 + M_2 + M_3 + m_2 + m_3) = 3 (M_1 + 0,5 M_1 + 0,25 M_1 + 0,6025 M_1 + 4,055 M_1) = 19,23 M_1.$$

Таким образом, суммарная масса горючего в трехступенчатой ракете

$$m_1 + m_2 + m_3 = 19,23 M_1 + 4,055 M_1 + 0,6025 M_1 = 23,9 M_1.$$

При запуске одноступенчатой ракеты

$$v_{\max} = u_r \ln z = u_r \ln \frac{M_1 + M_2 + M_3 + m}{M_1 + M_2 + M_3} = u_r \ln \left(1 + \frac{m}{M_1 + M_2 + M_3} \right).$$

Учитывая, что $z = e^{\frac{v_{\max}}{u_r}} = e^4$, находим, что масса горючего

$$m = (M_1 + M_2 + M_3)(z - 1) = (M_1 + 0,5M_1 + 0,25M_1)(54,6 - 1) = 98M_1.$$

Вывод. При запуске одноступенчатой ракеты потребуется в условиях задачи иметь горючего приблизительно в 3,9 раза больше, чем в трехступенчатой. В одной ступени $z_{\max} < 6$. К. Э. Циолковский предсказал необходимость создания многоступенчатых ракет.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

До сих пор эффект действия сил на материальную точку или на механическую систему в теореме об изменении количества движения мы связывали с временем действия сил. При этом, изучая движение механической системы, мы рассматривали импульсы только внешних сил, исключая внутренние. Однако в сложных системах внутренние силы иногда бывают весьма велики. Поэтому в тех случаях, когда необходимо учитывать эффект действия всех сил как внешних, так и внутренних на соответствующих перемещениях, а также исключить из рассмотрения заранее неизвестные реакции идеальных связей, целесообразно использовать теорему, связанную с изменением энергии системы. Особенно полезно использовать эту теорему, когда взаимодействие материальных точек зависит от положения их в пространстве, т. е. когда силы являются функциями координат точек их приложения.

§ 115. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Пусть (рис. 22.1) материальная точка массой m движется вдоль траектории под действием приложенной к ней равнодействующей силы P . В соответствии со вторым законом динамики

$$m\bar{\omega} = \bar{P}.$$

Умножая обе части равенства скалярно на $d\bar{r}$, имеем

$$m\bar{\omega} \cdot d\bar{r} = \bar{P} \cdot d\bar{r}. \quad (*)$$

Преобразуем левую часть равенства (*), учитывая, что

$$\bar{\omega} = \frac{d\bar{v}}{dt} \quad \text{и} \quad d\bar{r} = \bar{v}dt.$$

$$\text{Тогда} \quad m\bar{\omega} \cdot d\bar{r} = m \frac{d\bar{v}}{dt} \cdot \bar{v}dt = m\bar{v} \cdot d\bar{v} = md \left(\frac{v^2}{2} \right),$$

$$\text{где} \quad \bar{v} \cdot \bar{v} = v \cdot v \cdot \cos 0^\circ = v^2; \quad \bar{v}d\bar{v} = d \left(\frac{v^2}{2} \right).$$

Таким образом, при постоянной массе

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \bar{P} \cdot d\bar{r}. \quad (22.1)$$

Скалярная величина $\frac{mv^2}{2}$, стоящая в скобках, называется кинетической энергией материальной точки. Скалярная величина $(\bar{P} \cdot d\bar{r})$, стоящая в правой части равенства (22.1), называется элементарной работой силы \bar{P} , приложенной к материальной точке, на перемещении $d\bar{r}$.

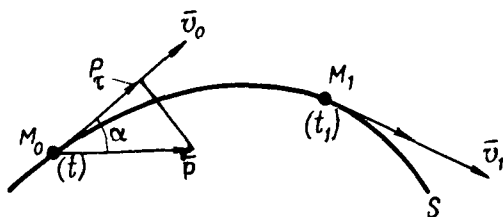


Рис. 22.1.

Кинетическая энергия характеризует возможность механического движения превращаться в другую форму движения.

Равенство (22.1) выражает теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в дифференциальной форме: дифференциал кинетической энергии материальной точки равен элементарной работе равнодействующей сил, приложенных к ней.

Интегрируя обе части равенства (22.1) вдоль дуги траектории от точки M_0 до точки M_1 и учитывая, что $\bar{P} = \sum_{j=1}^n \bar{P}_j$, получаем

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{(M_0M_1)} \bar{P} d\bar{r} = \sum_{j=1}^n \int_{(M_0M_1)} \bar{P}_j d\bar{r} = A. \quad (22.2)$$

Равенство (22.2) выражает теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в конечной (интегральной) форме. Изменение кинетической энергии материальной точки на некотором конечном перемещении равно сумме работ всех сил, приложенных к этой точке, на том же перемещении.

Отметим, что в том случае, когда материальная точка не является свободной, в число сил, приложенных к точке, включаются не только заданные (активные) силы, но и реакции связей.

§ 116. РАБОТА И МОЩНОСТЬ

Элементарная работа силы на малом перемещении точки ее приложения, при котором изменением силы можно пренебречь, равна

$$\delta A = \bar{P} \cdot d\bar{r}. \quad (22.3)$$

Работа — скалярная величина, являющаяся мерой действия силы на некотором перемещении. Из формулы (22.3) следует, что элементарная работа равна произведению величины силы на величину перемещения и на косинус угла α между ними, т. е.

$$\delta A = \bar{P} \cdot d\bar{r} = P ds \cos(\bar{P}, \hat{d}\bar{r}) = P ds \cos \alpha, \quad (22.4)$$

так как при отсчете дуги траектории в сторону движения $d\bar{r} = \vec{v} dt = d\vec{s} \tau$, и, следовательно, $|d\bar{r}| = ds$.

При $0 < \alpha < 90^\circ$ работа положительна, сила направлена в сторону движения. При $\alpha = 90^\circ$ $\delta A = 0$. При $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ работа отрицательна, сила направлена в сторону, противоположную движению.

Из (22.4) следует, что

$$\delta A = P \cos \alpha \cdot ds = P_\tau ds, \quad (22.5)$$

где P_τ — проекция силы \bar{P} на направление элементарного перемещения $d\bar{r}$ или на направление скорости точки приложения силы \bar{P} . Подставляя в (22.3) значения \bar{P} и $d\bar{r}$ через их проекции на оси прямоугольной неподвижной системы координат, получим

$$\delta A = \bar{P} \cdot d\bar{r} = X dx + Y dy + Z dz. \quad (22.6)$$

Формула (22.6) позволяет определить элементарную работу аналитически через проекции силы и перемещения. При обозначении элементарной работы употребляется символ δ . Это объясняется тем, что в общем случае правая часть (22.6) не является полным дифференциалом. Полная работа силы \bar{P} на конечном участке траектории от M_0 до точки M_1

$$A = \int_{(M_0, M_1)} (X dx + Y dy + Z dz). \quad (22.7)$$

Единица измерения работы — Н·м (джоуль) в системе СИ и кгс·м — в системе МКГСС.

Частные случаи вычисления работы аналитическим способом.

Работа постоянной силы $\bar{P} = \overline{\text{const}}$ на прямолинейном перемещении s (рис. 22.2).

$$A = P s \cos \alpha. \quad (22.8)$$

Работа силы тяжести в однородном силовом поле (рис. 22.3). Тогда

$$X=Y=0; Z=-G \text{ и } A=\int_{z_0}^{z_1} Z dz = -\int_{z_0}^{z_1} G dz = G(z_0 - z_1)$$

или

$$A = \pm Gh, \quad (22.9)$$

где h — величина вертикального перемещения. Положительный знак работы соответствует случаю, когда направления силы тя-

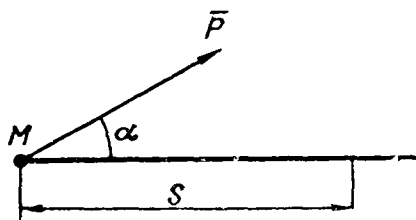


Рис. 22.2.

жести и перемещения совпадают. Отметим, что работа силы тяжести не зависит от траектории, по которой точка приложения силы перемещается из точки M_0 в точку M_1 .

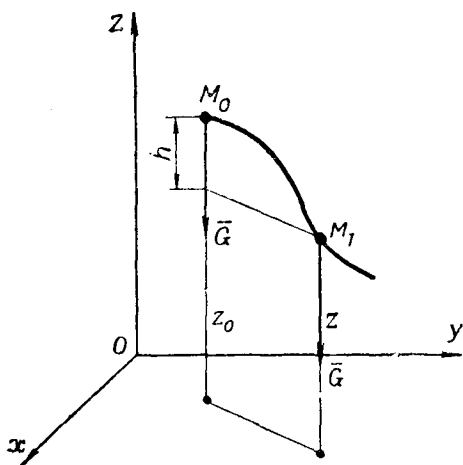


Рис. 22.3.

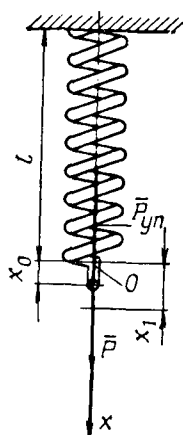


Рис. 22.4.

Силы, которые обладают таким свойством, называются потенциальными.

Работа силы упругости. Сила упругости, действующая вдоль, например, оси Ox , равна $X=-cx$, где c — коэффициент жесткости (рис. 22.4). Отрицательный знак указывает на то, что

сила упругости направлена в сторону, противоположную перемещению. Тогда

$$A = \int_{x_0}^{x_1} X dx = - \int_{x_0}^{x_1} cxdx = c \frac{x_0^2 - x_1^2}{2}. \quad (22.10)$$

В полученной формуле x_0 и x_1 — соответственно начальное и конечное перемещения. Можно показать, что сила упругости тоже является потенциальной.

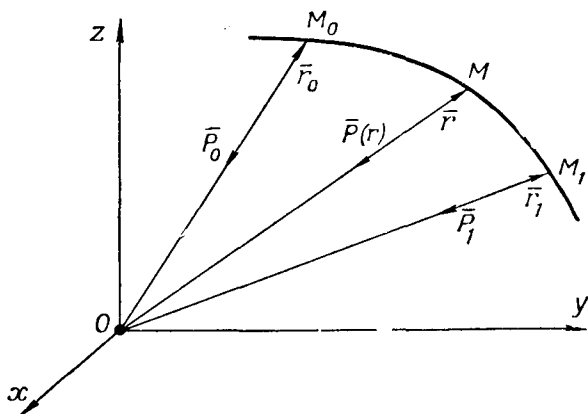


Рис. 22.5.

При центральном растяжении (сжатии) стержня осевой силой его внутренние упругие силы совершают работу. При деформации растяжения (сжатия) жесткость определяется по равенству $c = \frac{EF}{l}$, где E — модуль упругости, а F — площадь поперечного сечения. При $x_0 = 0$ и $x_1 = \Delta l$ получаем из (22.10)

$$A = - \frac{EF}{l} \frac{(\Delta l)^2}{2}. \quad (22.11)$$

Работа силы трения. Сила трения по величине равна $F_{\text{тр}} = fN$ и направлена в сторону, противоположную перемещению точки. Следовательно, при прямолинейном движении

$$A = - \int_{M_0}^{M_1} F_{\text{тр}} ds = - \int_{M_0}^{M_1} f_{\text{ск}} N ds, \quad (22.12)$$

$$\text{при } f_{\text{ск}} N = \text{const } A = -f_{\text{ск}} N s. \quad (22.12a)$$

Работа центральной силы. Центральной называют такую силу, линия действия которой постоянно проходит через некоторую определенную неподвижную точку — центр силы (рис. 22.5). Рассмотрим центральную силу, которая зависит от ра-

днуса вектора материальной точки, к которой эта сила приложена, т. е. $\vec{P} = \vec{P}(\vec{r})$. Элементарная работа центральной силы будет $\delta A = \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$. Обозначим через \vec{r}^0 единичный вектор (*орт*), направленный по радиусу-вектору материальной точки. Тогда $\vec{P}(\vec{r}) = -P \cdot \vec{r}^0 = -P \frac{\vec{r}}{r}$ и $\delta A = -\vec{P}(\vec{r}) d\vec{r} = -P \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{r}$. Используем очевидные равенства:

$$r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} \text{ и } 2r dr = 2\vec{r} d\vec{r}.$$

После подстановки значения $rdr = \vec{r}d\vec{r}$ в выражение δA получаем

$$\delta A = -P \frac{\vec{r}}{r} d\vec{r} = -P \frac{rdr}{r} = -P dr.$$

Следовательно,

$$\delta A = -\vec{P}(\vec{r}) d\vec{r} = -P dr.$$

Таким образом,

$$A = \pm \int_{r_0}^{r_1} P(r) dr, \quad (22.13)$$

где $r_1 > r_0$ и отрицательный знак берется при притяжении к неподвижному центру, а положительный — при отталкивании.

Работа центральной силы, являющейся функцией расстояния, не зависит от формы траектории материальной точки, а зависит только от значений r_0 и r_1 , отсчитываемых от центра силы. Так, если принять, что величина силы притяжения $P(r) = -k \frac{mM}{r^2}$, где r — расстояние между телом массой M , расположенной в неподвижном притягивающем центре, и материальной точкой массой m , расположенной в пространстве, коэффициент $k = \text{const}$, тогда

$$A = - \int_{r_0}^{r_1} k \frac{mM}{r^2} dr = kmM \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right). \quad (22.13a)$$

Графический способ определения работы. Если задана зависимость $P_r = f(s)$ графически (рис. 22.6), то, учитывая масштабы построений μ_s и μ_P , получаем

$$\delta A = P_r ds = dF \cdot \mu_F$$

и, следовательно,

$$A = F \cdot \mu_F,$$

где F — площадь, а $\mu_F = \mu_P \cdot \mu_s$ — масштаб площади диаграммы.

Так, при растяжении стержня из мягкой стали (например, сталь Ст.3) осевой силой P диаграмма растяжения до предела пропорциональности будет иметь вид, представленный на рис. 22.7, а.

В пределах пропорциональности работа, совершаемая силой P , равна

$$A = \frac{P \cdot \Delta l}{2} = F_{\Delta} \cdot \mu_F = 17,5 \cdot 10^{-5} \text{ кН} \cdot \text{м},$$

где $F_{\Delta} = 17,5 \text{ см}^2$ — площадь заштрихованного треугольника, а $\mu_F = 1 \cdot 10^{-5} = 10^{-5} \text{ кН} \cdot \text{м}/\text{см}^2$.

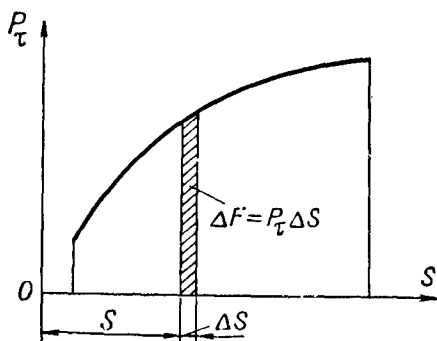


Рис. 22.6.

Для вычисления работы силы P , затрачиваемой на разрыв образца, в полученную формулу следует поставить площадь F всей диаграммы растяжения.

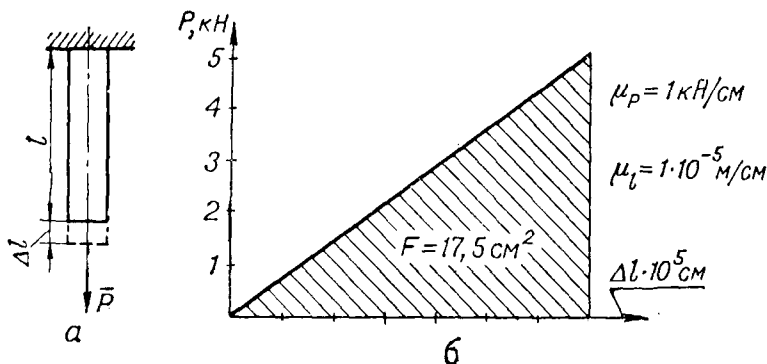


Рис. 22.7.

Мощность. Разделим обе части равенства (22.1) на dt . Тогда

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = \bar{P} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{\delta A}{dt}.$$

Правую часть последнего равенства можно записать в виде

$$\frac{\delta A}{dt} = \bar{P} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{P} \cdot \bar{v} = N. \quad (22.14)$$

Скалярное произведение силы \vec{P} на скорость \vec{v} точки, к которой она приложена, называется мощностью N силы.

Таким образом, производная по времени от кинетической энергии материальной точки равна мощности силы, действующей на эту точку,— вторая дифференциальная форма теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = N. \quad (22.15)$$

За единицу мощности в системе СИ принимают $\text{Вт} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}}$. В системе МКГСС за единицу измерения мощности принимают $\frac{\text{кгс} \cdot \text{м}}{\text{с}}$

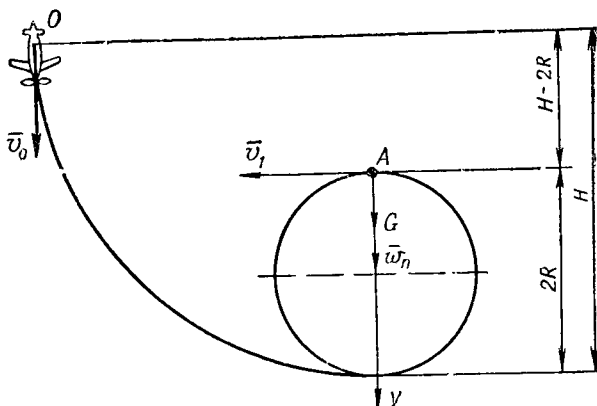


Рис. 22.8.

и лошадиную силу, равную $75 \frac{\text{кгс} \cdot \text{м}}{\text{с}}$. Связь между единицами мощности в разных системах выражается равенством $1 \text{ Вт} = 0,102 \frac{\text{кгс} \cdot \text{м}}{\text{с}}$.

Другая бóльшая единица измерения мощности $1 \text{ кВт} = 102 \frac{\text{кгс} \cdot \text{м}}{\text{с}} = 1,36 \text{ л. с.}$

Пример. Самолет движется в вертикальной плоскости по траектории, представленной на рис. 22.8. Рассмотрим частный случай*, когда движение самолета из начального положения ($t=0$) совершается благодаря приобретенной начальной скорости v_0 и действию силы тяжести. Определить величину скорости v_0 самолета, если известно, что в точке A траектории летчик, будучи не прикреплен к креслу самолета, не падает вниз.

Решение. Установим условие того, чтобы летчик, которого мы принимаем за материальную точку массой m , не отрывался от сиденья в точке A (как говорят «не зависал»). Для этого рассмотрим, какие силы действуют на летчика, когда он находится в точке A. На него действуют сила веса \vec{G} и реакция \vec{P} со

* Обычно при таком движении самолета двигатели работают вплоть до достижения самолетом точки A.

стороны сиденья самолета; при этом реакция равна некоторой силе, с которой летчик прижимается к сиденью самолета. Используем уравнение (19.8) $m\omega_n = G + P$. С увеличением ω_n уменьшается P ($G = \text{const}$). В предельном случае эта сила может быть равна нулю.

Запишем для предельного случая основное уравнение динамики (19.8) в проекциях на вертикальную ось $m\omega_n = G$ или $m \frac{v_1^2}{R} = mg$. После сокращения $v_1 = \sqrt{gR}$.

Таким образом, при величине скорости $v_1 \geq \sqrt{gR}$ в точке A траектории летчик не будет отрываться от сиденья самолета.

Определяем величину начальной скорости v_0 , которая при заданных H и R обеспечит в точке A траектории скорость $v_1 = \sqrt{gR}$.

Для этого применим теорему о изменении кинетической энергии в конечной форме

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A,$$

где, пренебрегая силами сопротивления, работа силы тяжести будет равна $A = mg(H - 2R)$. Подставляя, получаем

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mg(H - 2R),$$

откуда

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{v_1^2 - 2g(H - 2R)} = \sqrt{Rg - 2gH + 4Rg} = \\ &= \sqrt{5Rg - 2Hg} = \sqrt{(5R - 2H)g}. \end{aligned}$$

При $2H = 5R$ начальная скорость равна нулю. Следовательно, высота H , обеспечивающая выполнение поставленной задачи при $v_0 = 0$, будет $H \geq \frac{5}{2}R$.

При $H < \frac{5}{2}R$ необходимо иметь начальную скорость, величина которой определяется по равенству $v_0 = 3,16 \sqrt{5R - 2H}$.

Пример. Торпеда, преодолевая постоянное сопротивление воды, при выходе из торпедного аппарата (ТА) приобретает скорость $v = 12$ м/с. Вес торпеды $G = 20$ кН. Длина торпедного аппарата $l = 8$ м. Давление сжатого воздуха $p = 1,0 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2}$, калибр торпеды 0,5 м. Отсечка (прекращение подачи) воздуха происходит после прохождения торпедой в ТА расстояния, равного 6 м. Определить наибольшую скорость торпеды в ТА.

Решение. Рассматриваем торпеду (рис. 22.9) как материальную точку. Применяем теорему о изменении кинетической энергии

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = (p - p_c) \frac{\pi d^2}{4} l_1 - p_c \frac{\pi d^2}{4} l_2,$$

где $(p - p_c) \frac{\pi d^2}{4}$ — движущая сила на первом участке l_1 до отсечки воздуха;
 $-p_c \frac{\pi d^2}{4}$ — сила сопротивления на участке l_2 после прекращения подачи воздуха.

Решаем полученное уравнение относительно p_c и находим

$$p_c = p \frac{l_1}{l_1 + l_2} - \frac{2v_1^2 G}{\pi d^2 g (l_1 + l_2)} = 1 \cdot \frac{6}{6 + 2} - \frac{2 \cdot 12^2 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,5^2 \cdot 9,81 (6 + 2)} = 0,652 \text{ МН/м}^2.$$

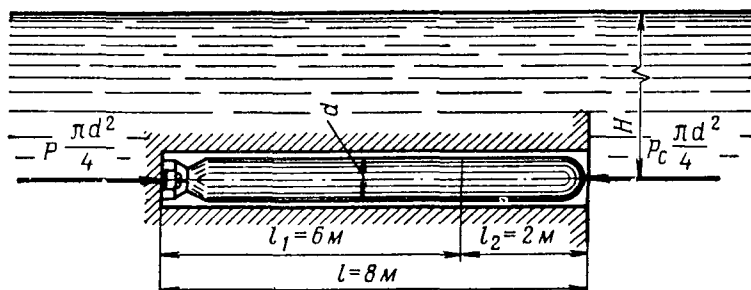


Рис. 22.9.

Определяем наибольшую скорость торпеды из уравнения

$$\begin{aligned} \frac{mv_{\max}^2}{2} &= (p - p_c) \frac{\pi d^2}{4} l_1, \text{ откуда } v_{\max} = \sqrt{\frac{(p - p_c) \pi d^2 l_1 g}{2G}} = \\ &= \sqrt{\frac{(1,0 - 0,652) \pi \cdot 0,5^2 \cdot 6 \cdot 9,81}{2 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}} \approx 20 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

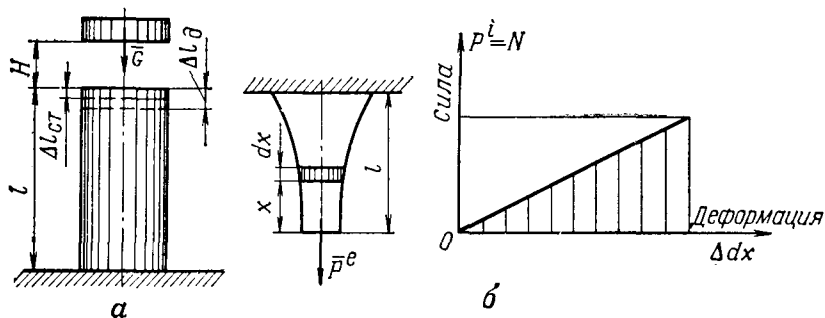


Рис. 22.10.

Пример. На стержень с высоты H падает груз весом G (рис. 22.10, а). Определить динамическое укорочение стержня Δl_d , если жесткость стержня

$$c = \frac{G}{\Delta l_{\text{ст}}}, \text{ где } \Delta l_{\text{ст}} = \frac{Gl}{EF}.$$

Принять, что:

- после удара падающий груз движется до остановки вместе со стержнем (удар не упругий);
- деформация стержня происходит в упругой области;
- после соприкосновения падающего тела со стержнем деформации распространяются мгновенно по всей длине стержня;

— влиянием массы ударяемого стержня и упругостью падающего груза в первом приближении можно пренебречь.

Решение. Записываем формулу (22.2)

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A,$$

где $v_0 = 0$; $v_1 = 0$; $A = G(H + \Delta l_d) - \frac{c\Delta l_d^2}{2}$, т. е. общая работа A складывается из работы силы тяжести и работы упругой силы. Подставляя значение жесткости $c = \frac{G}{\Delta l_{ст}}$ и преобразовывая, получаем $GH + G\Delta l_d - \frac{G}{\Delta l_{ст}} \frac{\Delta l_d^2}{2} = 0$, откуда

$$(\Delta l_d)^2 - 2\Delta l_{ст}\Delta l_d - 2H\Delta l_{ст} = 0. \quad (*)$$

Решая квадратное уравнение (*) относительно Δl_d , получаем

$$\Delta l_d = \Delta l_{ст} + \sqrt{\Delta l_{ст}^2 + 2H\Delta l_{ст}} = \Delta l_{ст} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta l_{ст}}} \right) \quad (22.16)$$

(отрицательный знак перед корнем отбрасываем как не соответствующий физической сущности явления). Обозначим

$$\frac{\Delta l_d}{\Delta l_{ст}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta l_{ст}}} = k_{дин}, \quad (22.17)$$

где $k_{дин}$ — динамический коэффициент. Тогда

$$\Delta l_d = k_{дин}\Delta l_{ст}. \quad (22.16a)$$

В случае внезапно приложенной нагрузки $H=0$ и $k_{дин}=2$. Рассмотрим числовой пример. Принимаем $H=0,01$ м; $G=100$ кН; $l=1$ м; площадь сечения стержня $F=10$ см² $=10 \cdot 10^{-4}$ м²; $E=2 \cdot 10^5$ МН/м².

Без учета массы стержня:

$$\Delta l_{ст} = \frac{Gl}{EF} = \frac{100 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{2 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,5 \text{ мм};$$

$$k_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot H}{\Delta l_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 1}{0,5 \cdot 10^{-1}}} = 7,46 \approx 7,5.$$

Из полученного результата видно, как опасны ударные нагрузки, что следует учитывать при транспортировке и погрузке техники вооружения. В рассмотренном примере укорочение стержня и напряжения, возникающие в нем при ударе, численно будут в 7,5 раза больше, чем статические, так как $\sigma_{дин} = k_{дин}\sigma_{ст} = 7,5 \cdot \frac{G}{F} = 7,5 \cdot \frac{100 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-4}} = 750$ МН/м² $> \sigma_p$, и закон Гука применять уже нельзя.

Для уменьшения $k_{дин}$ при данном H нужно увеличить $\Delta l_{ст}$ за счет уменьшения жесткости $\frac{EF}{l}$ (например, увеличения длины l или уменьшения площади сечения F , установки амортизатора и т. д.).

По формуле (22.17) определяется также динамический коэффициент и при поперечном ударе балок.

Можно показать, что при учете массы ударяемого стержня

$$k_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta l_{ст}} \cdot \frac{G_{гр}}{G_{гр} + G_{ст} \cdot k}}, \quad (22.18)$$

где $k = \frac{1}{3}$ — при продольном ударе;

$k = \frac{33}{140}$ — для консоли при ударе по ее концу;

$k = \frac{17}{35}$ — для двухопорной балки при ударе посередине пролета;

$k = \frac{13}{35}$ — для балки, защемленной с двух концов, при ударе посередине;

$G_{гр}$, $G_{ст}$ — вес падающего груза и стержня соответственно.

§ 117. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Применим теорему об изменении кинетической энергии в виде (22.1) к точке j механической системы

$$d\left(\frac{m_j v_j^2}{2}\right) = \bar{P}_j^e \cdot d\bar{r}_j + \bar{P}_j^i \cdot d\bar{r}_j, \quad (22.19)$$

где $\bar{P}_j^e \cdot d\bar{r}_j$ — элементарная работа равнодействующей внешних, а $\bar{P}_j^i \cdot d\bar{r}_j$ — элементарная работа равнодействующей внутренних сил, приложенных к j -й точке системы. Запишем уравнение (22.19) для каждой точки системы, а затем почленно их сложим. В результате получим

$$d \sum_{j=1}^n \frac{m_j v_j^2}{2} = \sum_{j=1}^n \bar{P}_j^e \cdot d\bar{r}_j + \sum_{j=1}^n \bar{P}_j^i \cdot d\bar{r}_j. \quad (22.20)$$

Обозначим:

$\sum_{j=1}^n \frac{m_j v_j^2}{2} = T$ — кинетическая энергия механической системы;

$\sum \bar{P}_j^e \cdot d\bar{r}_j = \delta A^e$ — сумма элементарных работ соответственно внешних и внутренних сил, действующих на точки рассматриваемой системы.
 $\sum \bar{P}_j^i \cdot d\bar{r}_j = \delta A^i$

Тогда уравнение (22.20) можно записать в виде

$$dT = \delta A^e + \delta A^i. \quad (22.21)$$

Уравнения (22.20) и (22.21) выражают теорему об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме: дифференциал кинетической энергии механической системы равен сумме элементарных работ внешних и внутренних сил, действующих на точки системы.

Разделим обе части равенства (22.21) на dt . Тогда

$$\frac{dT}{dt} = N^e + N^i, \quad (22.22)$$

где N^e и N^i — мощность всех внешних и соответственно внутренних сил, действующих на точки системы,

Обозначаем начальное и конечное положения системы соответственно цифрами 0 и 1. Тогда, интегрируя равенство (22.21), получаем

$$T_1 - T_0 = \int_0^1 \delta A^e + \int_0^1 \delta A^i, \quad (22.23)$$

где T_0 и T_1 — значения кинетической энергии системы соответственно в начальном и конечном положениях.

Формула (22.23) выражает теорему об изменении кинетической энергии механической системы в конечной (интегральной) форме: изменение кинетической энергии системы на некотором ее конечном перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на точки системы на соответствующих перемещениях точек приложения этих сил.

Для изменяемой механической системы работа внутренних сил, вообще говоря, не будет равна нулю. Рассмотрим две материальные точки a и b механической системы, радиусы-векторы которых относительно неподвижной точки O будут \bar{r}_a и \bar{r}_b . Силы взаимодействия между этими точками обозначим \bar{P}^i и соответственно — \bar{P}^i . Тогда сумма элементарных работ этих двух сил будет

$$\sum_{j=1}^n \delta A_j^i = \bar{P}^i \cdot d\bar{r}_a - \bar{P}^i \cdot d\bar{r}_b = \bar{P}^i (d\bar{r}_a - d\bar{r}_b) = -\bar{P}^i \cdot d(\bar{a}\bar{b}).$$

Следовательно, если расстояние между двумя точками механической системы изменяется, элементарная работа внутренних сил не равна нулю. В качестве примера рассмотрим, как определить в пределах пропорциональности работу внутренних (упругих) сил стержня длиной l , который растягивается осевой силой P^e (рис 22.10, б). Удлинение элемента стержня длиной dx обозначим Δdx . Равнодействующую всех внутренних сил, приложенных к точкам поперечного сечения стержня, в результате действия которой достигнуто удлинение Δdx , обозначим N . Тогда, учитывая, что N изменялась от 0 до N :

$$\delta A^i = \frac{N \cdot \Delta dx}{2}.$$

Предполагая, что деформации происходят в пределах применимости закона Гука, можно записать, что удлинение элемента длиной dx будет

$$\Delta dx = \frac{N dx}{EF}.$$

Следовательно,

$$\delta A^i = - \frac{N^2 dx}{2EF}$$

и работа внутренних сил, действующих в поперечных сечениях стержня, по длине l будет

$$A^i = - \int_0^l \frac{N^2 dx}{2EF}.$$

При постоянных EF и продольной силе N

$$A^i = - \frac{N^2 l}{2EF}.$$

Для неизменяемой механической системы, например для абсолютно твердого тела $d(\bar{ab})=0$, работа внутренних сил равна нулю и тогда

$$T_1 - T_0 = A^e. \quad (22.24)$$

В число внешних и внутренних сил уравнения (22.23) входят силы активные и реакций связи. Если связи идеальные и стационарные, то работа реакций связей равна нулю.

При определении кинетической энергии механической системы, движущейся как угодно в пространстве, полезно использовать теорему С. Кёнига (1751 г.): кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергии всей массы системы, мысленно сосредоточенной в центре масс и движущейся со скоростью центра масс (переносное движение), и кинетической энергии точек системы в их относительном движении по отношению к поступательно движущейся системе отсчета с началом в центре масс (рис. 22.11):

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \sum_{j=1}^n \frac{m_j v_{jr}^2}{2}. \quad (22.25)$$

Доказательство. Принимаем, что механическая система движется относительно осей координат $Sx_c y_c z_c$ с началом в центре масс, которые в свою очередь движутся поступательно относительно неподвижной системы координат $Oxyz$.

Абсолютная скорость любой точки системы

$$\bar{v}_j = \bar{v}_{je} + \bar{v}_{jr},$$

где \bar{v}_j — абсолютная скорость j -й точки по отношению к неподвижной системе координат;

$\bar{v}_{je} = \bar{v}_c$ — переносная скорость j -й точки, равная скорости центра масс;

\bar{v}_{jr} — относительная скорость j -й точки по отношению к подвижной системе координат.

Следовательно, кинетическая энергия механической системы

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j v_j^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j \bar{v}_j \bar{v}_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j (\bar{v}_{je} + \bar{v}_{jr}) (\bar{v}_{je} + \bar{v}_{jr}) = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j v_c^2 + \sum_{j=1}^n m_j \bar{v}_c \bar{v}_{jr} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j v_{jr}^2. \quad (*)
 \end{aligned}$$

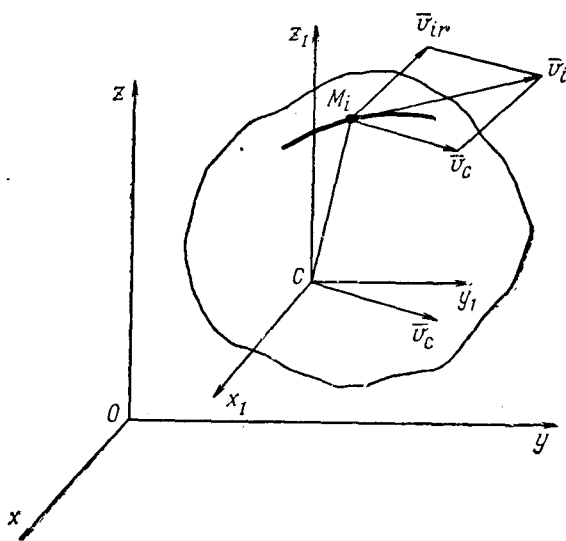


Рис. 22.11.

Первое слагаемое правой части можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j v_c^2 = \frac{v_c^2}{2} \sum_{j=1}^n m_j = \frac{M v_c^2}{2}, \text{ где } \sum_{j=1}^n m_j = M \text{ — масса механической системы.}$$

Рассмотрим второе слагаемое правой части равенства (*). Обозначим радиус-вектор с началом в центре масс любой j -й точки через \bar{r}_j .

Тогда радиус-вектор центра масс

$$\bar{r}_c = \sum_{j=1}^n \frac{m_j \bar{r}_j}{M} = 0.$$

Следовательно, $\sum_{j=1}^n m_j \bar{r}_j = 0$, так как $M \neq 0$. Дифференцируя по времени

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n m_j \bar{r}_j = \sum_{j=1}^n m_j \frac{d\bar{r}_j}{dt} = \sum_{j=1}^n m_j \bar{v}_{jr} \quad \text{и тогда}$$

$$\sum_{j=1}^n m_j \bar{v}_c \bar{v}_{jr} = \bar{v}_c \sum_{j=1}^n m_j \bar{v}_{jr} = 0,$$

т. е. второе слагаемое равно нулю.

Таким образом,

$$T = \frac{Mv_c^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j v_{jr}^2,$$

что и требовалось доказать.

Определение кинетической энергии твердого тела для разных случаев его движения.

Поступательное движение ($v_j = v$). Кинетическая энергия тела будет равна

$$T = \sum_{j=1}^n \frac{m_j v_j^2}{2} = \frac{Mv^2}{2}. \quad (22.26)$$

Кинетическая энергия твердого тела при поступательном движении равна половине произведения массы тела на квадрат скорости любой точки твердого тела.

Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси. Обозначим расстояние j -й точки твердого тела до оси вращения через h_j . Тогда ее линейная скорость $v_j = h_j \omega$. Следовательно,

$$T = \sum_{j=1}^n \frac{m_j v_j^2}{2} = \sum_{j=1}^n \frac{m_j (h_j \omega)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{j=1}^n m_j h_j^2.$$

Обозначим $\sum_{j=1}^n m_j h_j^2 = I_z$ момент инерции тела относительно неподвижной оси вращения, которую мы принимаем, например, совпадающей с осью z . Тогда

$$T = \frac{I_z \omega^2}{2}, \quad (22.27)$$

т. е. кинетическая энергия твердого тела при его вращении вокруг неподвижной оси z равна половине произведения момента инерции тела относительно оси z на квадрат его угловой скорости.

Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела можно разложить на переносное-поступательное движе-

ние тела вместе с центром масс и относительное-вращательное движение вокруг оси, проходящей через центр масс перпендикулярно основной неподвижной плоскости. В соответствии с теоремой Кёнига

$$T = \frac{Mv_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}, \quad (22.28)$$

где $\frac{Mv_c^2}{2}$ — кинетическая энергия центра масс, предполагая, что в нем сосредоточена вся масса тела;
 $\frac{I_c\omega^2}{2}$ — кинетическая энергия тела в его вращательном движении вокруг оси, проходящей через центр масс перпендикулярно основной неподвижной плоскости.

Пример. Вычислить кинетическую энергию шатуна двигателя, если его вес $G=150 \text{ Н} \approx 15 \text{ кгс}$, радиус инерции относительно центральной оси z $i_z=0,65 \text{ м}$, скорость центра тяжести $v_c=8 \text{ м/с}$ и угловая скорость $\omega=10 \text{ рад/с}$.

Решение. Момент инерции тела относительно оси z

$$I_z = i_z^2 M.$$

Кинетическая энергия шатуна

$$T = \frac{Mv_c^2}{2} + \frac{I_z\omega^2}{2} = \frac{M}{2} (v_c^2 + i_z^2\omega^2) = \frac{G}{2g} (v_c^2 + i_z^2\omega^2).$$

Подставляя численные значения, получим

$$T = \frac{150}{2 \cdot 9,81} (8^2 + 0,65^2 \cdot 10^2) \approx 8,12 \text{ Н} \cdot \text{м (Дж)}.$$

Сферическое движение в кинематике рассматривалось как вращательное вокруг мгновенной оси, проходящей через неподвижную точку. Тогда

$$T = \frac{I_\omega \omega^2}{2}, \quad (22.29)$$

где I_ω — момент инерции тела относительно мгновенной оси.

Общий случай движения твердого тела. Кинетическая энергия твердого тела в общем случае движения равна сумме кинетической энергии переносного поступательного движения тела вместе с центром масс и кинетической энергии тела в его относительном вращательном движении вокруг мгновенной оси, проходящей через центр масс. Таким образом,

$$T = \frac{Mv_c^2}{2} + \frac{I_{c\omega}\omega^2}{2}, \quad (22.30)$$

где $I_{c\omega}$ — момент инерции твердого тела относительно мгновенной оси, проходящей через центр масс.

§ 118. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ
(ДИНАМИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ)

Положение центра масс системы или твердого тела не полностью характеризует распределение масс. В динамике механических систем и твердого тела появилась еще одна характеристика распределения масс — момент инерции.

Полярным моментом инерции твердого тела относительно полюса O , например начала координат, называется скалярная величина, равная сумме произведений массы каждой элементарной частицы тела на квадрат расстояния этой частицы от полюса (рис. 22.12):

$$I_0 = \sum_{j=1}^n r_j^2 \Delta m_j, \quad (22.31)$$

где r_j — расстояние массы элементарной частицы Δm_j до полюса O .

Осевым моментом инерции твердого тела называется скалярная величина, равная сумме произведений массы каждой элементарной частицы тела на квадрат расстояния этой частицы от данной оси.

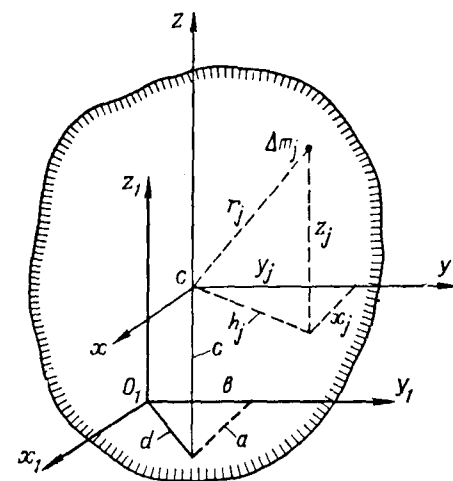


Рис. 22.12.

Осевой момент инерции твердого тела характеризует распределение масс тела относительно данной оси.

Моменты инерции твердого тела относительно координатных осей обозначаются соответственно I_x, I_y и I_z и определяются по формулам:

$$I_x = \sum_{j=1}^n (y_j^2 + z_j^2) \Delta m_j; \quad I_y = \sum_{j=1}^n (z_j^2 + x_j^2) \Delta m_j;$$

$$I_z = \sum_{j=1}^n (x_j^2 + y_j^2) \Delta m_j, \quad (22.32)$$

где, например, $x_j^2 + y_j^2 = h_j^2$ и h_j — расстояние материальной частицы до оси z и т. д.

Полярный и осевые моменты инерции, как следует из (22.31) и (22.32), существенно положительны и имеют размерность: $[I] = (\text{масса}) \times (\text{длина})^2$, т. е. $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ в системе СИ и $\text{кгс} \cdot \text{м}^2$ в системе МКГСС.

Учитывая, что $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, далее из (22.31) с учетом (22.32) следует, что

$$I_0 = \sum_{j=1}^n (x_j^2 + y_j^2 + z_j^2) \Delta m_j = \frac{1}{2} (I_x + I_y + I_z), \quad (22.33)$$

т. е. сумма моментов инерции тела относительно координатных осей x , y и z равна удвоенному моменту инерции тела относительно начала координат, т. е. полярному моменту инерции.

Радиусом инерции тела относительно некоторой оси, например z , называется расстояние от этой оси до некоторой точки, масса которой равна массе M тела, а момент инерции относительно оси — моменту инерции тела. Таким образом, например,

$$I_z = M \cdot i_z^2,$$

где i_z — радиус инерции относительно оси z . Следовательно, радиусы инерции относительно координатных осей определяются из равенств:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{M}}; \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}}. \quad (22.34)$$

Сумма любых двух осевых моментов инерций всегда больше третьего, т. е. $I_x + I_y > I_z$, и т. д. Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (y_j^2 + z_j^2) \Delta m_j + \sum_{j=1}^n (x_j^2 + z_j^2) \Delta m_j &= \sum_{j=1}^n (x_j^2 + y_j^2) \Delta m_j + \\ &+ 2 \sum_{j=1}^n z_j^2 \Delta m_j > I_z = \sum_{j=1}^n (x_j^2 + y_j^2) \Delta m_j, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Практически вместо вычисления сумм целесообразно находить их предел, который вычисляется как определенный интеграл, распространенный на весь объем, занимаемый телом; при этом тело понимается как совокупность бесконечного множества бесконечно малых элементов. Тогда, например,

$$I_0 = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta m_j \rightarrow 0}} \sum_{j=1}^n r_j^2 \Delta m_j = \int_V r^2 dm.$$

Аналогично:

$$I_x = \int_V (y^2 + z^2) dm; \quad I_y = \int_V (x^2 + z^2) dm; \quad I_z = \int_V (x^2 + y^2) dm, \quad (22.35)$$

где $dm = \rho dV$ и интегралы распространяются на весь объем тела.

В технике применяют часто понятие «маховый момент тела», равный GD^2 , т. е. произведению веса тела на квадрат его диаметра

инерции относительно оси вращения. Эта величина связана с моментом инерции зависимостью

$$GD^2 = Mg(2i)^2 = 4gMi^2 = 4gl.$$

Теорема о моментах инерции тел относительно осей, параллельных центральным.

Центральными осями называют оси прямоугольной системы координат, начало которых совпадает с центром тяжести тела.

Момент инерции тела относительно оси, параллельной центральной, равен моменту инерции относительно центральной оси, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями (теорема Гюйгенса — Штейнера).

Доказательство. Проведем две системы координат — центральную $Oxyz$ и систему координат $O_1x_1y_1z_1$, параллельные центральным (рис. 22.12).

Обозначим через a , b и c расстояния между соответствующими осями. Тогда $x_1 = x + a$; $y_1 = y + b$; $z_1 = z + c$.

Определим, например, момент инерции тела относительно оси z_1

$$\begin{aligned} I_{z_1} &= \int_V (x_1^2 + y_1^2) dm = \int_V [(x + a)^2 + (y + b)^2] dm = \\ &= \int_V (x^2 + y^2) dm + 2a \int_V x dm + 2b \int_V y dm + (a^2 + b^2) \int_V dm. \end{aligned}$$

Учтем, что $x_c = 0$; $y_c = 0$; $z_c = 0$, тогда $\int_V (x^2 + y^2) dm = I_z$;

$$\int_V x dm = x_c M = 0; \quad \int_V y dm = y_c M = 0; \quad \int_V dm = M \text{ — массе тела.}$$

Следовательно,

$$I_{z_1} = I_z + (a^2 + b^2) M. \quad (22.36)$$

Аналогично определяются моменты инерций относительно осей x_1 и y_1 . Момент инерции относительно центральной оси всегда меньше, чем относительно любой оси, параллельной центральной. Очевидно, что и полярный момент инерции относительно центра тяжести тела также является наименьшим среди всех полярных моментов инерции.

Определение моментов инерций простейших однородных тел правильной геометрической формы. Моменты инерции сплошных твердых тел определяются по интегральным формулам (22.35) сравнительно легко для однородных тел простой геометрической формы. Если тело неоднородное и имеет сложную неправильную геометрическую форму, момент инерции его определяют опытным путем или путем расчета. В по-

следнем случае тело мысленно делят на несколько однородных тел, имеющих правильную простейшую геометрическую форму. Момент инерции такого тела, например, относительно оси z равен сумме моментов инерции отдельных его частей относительно той же оси, т. е.

$$I_z = I_z^{(1)} + I_z^{(2)} + \dots + I_z^{(n)} = \sum_{j=1}^n I_z^{(j)},$$

где n — число простейших тел, на которые разделено тело сложной геометрической формы.

Рассмотрим примеры определения моментов инерции однородных тел простейшей геометрической формы.

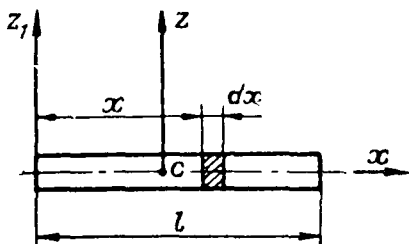


Рис. 22.13.

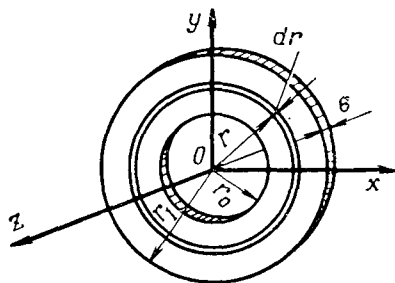


Рис. 22.14.

Прямолинейный тонкий стержень (рис. 22.13). Выделим участок длиной dx , масса которого $dm = \rho dx$, где ρ — плотность единицы длины (линейная плотность) — считаем постоянной.

Тогда момент инерции относительно оси z_1 , перпендикулярной оси стержня,

$$I_{z_1} = \int_V x^2 dm = \int_0^l x^2 \rho dx = \frac{\rho l^3}{3} = \frac{Ml^2}{3}, \quad (22.37)$$

где x — расстояние от оси z_1 до центра тяжести массы dm . Относительно центральной оси z , параллельной оси z_1 ,

$$I_z = I_{z_1} - \left(\frac{l}{2}\right)^2 \cdot M = \frac{Ml^2}{3} - \frac{Ml^2}{4} = \frac{Ml^2}{12}. \quad (22.38)$$

Круглая кольцевая пластинка (рис. 22.14). Разделим пластинку на тонкие кольца, каждое шириной dr . Полагаем толщину пластинки $b = \text{const}$ и малой. Тогда

$$\begin{aligned} I_x &= \int_V y^2 dm, \quad I_y = \int_V x^2 dm, \quad I_z = \int_V (x^2 + y^2) dm = \\ &= \int_V r^2 dm = I_x + I_y, \quad \text{где } I_x = I_y. \end{aligned}$$

Учитывая, что расстояния r от оси z до каждой точки кольца шириной dr одинаковы, принимаем за dm не массу элементарной частицы кольца, а массу кольца $dm = \rho 2\pi r dr b$.

Тогда

$$I_z = \int_V r^2 dm = \int_{r_0}^r r^2 \rho 2\pi r dr b = \frac{\pi \rho b}{2} r^4 \Big|_{r_0}^{r_1} = \frac{\pi (r_1^4 - r_0^4)}{2} \rho b$$

или, учитывая, что $\pi (r_1^2 - r_0^2) \rho b = M$ — масса кольцевой пластинки, получаем

$$I_z = \frac{M (r_1^2 + r_0^2)}{2}, \quad (22.39)$$

где r_0 и r_1 — соответственно внутренний и наружный радиусы. Для пластинки без отверстия $r_0 = 0$; $r_1 = r$

$$I_z = \frac{Mr^2}{2}; \quad I_x = I_y = \frac{Mr^2}{4}. \quad (22.39a)$$

Круглый цилиндр. Очевидно, что момент инерции круглого полого цилиндра относительно оси цилиндра z складывается из I_z — моментов инерций тонких кольцевых пластинок, суммарная толщина которых равна l — длине цилиндра. Поэтому, обозначая M массу цилиндра, имеем

$$I_z = \sum_{j=1}^n I_j = \sum_{j=1}^n \frac{m_j (r_0^2 + r_1^2)}{2} = \frac{r_0^2 + r_1^2}{2} \sum_{j=1}^n m_j = \frac{r_0^2 + r_1^2}{2} M.$$

Для круглого тонкостенного цилиндра, средний радиус которого $r = \frac{r_1 + r_0}{2} = \text{const}$, а толщина стенки $\delta = r_1 - r_0$ мала:

$$I_z = \int_V r^2 dm = Mr^2. \quad (22.40)$$

§ 119. РАБОТА И МОЩНОСТЬ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К АБСОЛЮТНО ТВЕРДОМУ ТЕЛУ

Найдем формулы, определяющие работу сил, приложенных к абсолютно твердому телу в разных случаях его движения.

Поступательное движение. Пусть к точкам твердого тела, движущегося поступательно, приложены внешние силы $\vec{P}_1^e, \vec{P}_2^e, \dots, \vec{P}_n^e$. Сумма элементарных работ заданных сил на элементарном перемещении будет

$$\sum_{j=1}^n \delta A_j = \sum_{j=1}^n X_j^e dx_j + Y_j^e dy_j + Z_j^e dz_j,$$

где X_j^e, Y_j^e, Z_j^e — проекции внешних сил на неподвижные оси координат;

x_j, y_j, z_j } — координаты точек приложения сил и соответствующие их элементарные перемещения по осям неподвижной прямоугольной системы координат.

При поступательном движении $dx_j = dx_0$; $dy_j = dy_0$; $dz_j = dz_0$. Следовательно,

$$\sum_{j=1}^n \delta A_j = dx_0 \sum_{j=1}^n X_j^e + dy_0 \sum_{j=1}^n Y_j^e + dz_0 \sum_{j=1}^n Z_j^e.$$

Обозначим:

$$\sum_{j=1}^n X_j^e = R_x^e; \quad \sum_{j=1}^n Y_j^e = R_y^e; \quad \sum_{j=1}^n Z_j^e = R_z^e.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^n \delta A_j = R_x^e dx_0 + R_y^e dy_0 + R_z^e dz_0 = \bar{R}^e \cdot d\bar{r}_0, \quad (22.41)$$

где \bar{R}^e — главный вектор внешних сил, приложенных к точкам абсолютно твердого тела.

Таким образом, элементарная работа внешних сил, приложенных к абсолютно твердому телу, которое движется поступательно, равна элементарной работе главного вектора внешних сил, приложенного к любой точке тела на ее элементарном перемещении $d\bar{r}_0$. На конечном перемещении при непрерывном изменении \bar{R}^e

$$\sum A_j = \int \bar{R}^e \cdot d\bar{r}_0. \quad (22.42)$$

Работа пары сил, приложенной к телу, движущемуся поступательно, равна нулю.

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Пусть к точкам абсолютно твердого тела, которое вращается вокруг неподвижной оси z , приложены внешние силы $\bar{P}_1^e, \bar{P}_2^e, \dots, \bar{P}_n^e$ (рис. 22.15). Элементарная работа силы \bar{P}_j^e на перемещении $ds_j = h_j d\varphi$ будет

$$\delta A_j = P_{j\tau}^e ds_j = P_{j\tau}^e h_j d\varphi,$$

где $P_{j\tau}^e$ — проекция силы P_j^e на касательную, а $P_{j\tau}^e h_j = m_z(\bar{P}_j^e)$ — момент силы \bar{P}_j^e относительно оси z . Тогда

$$\delta A_j = m_z(\bar{P}_j^e) d\varphi.$$

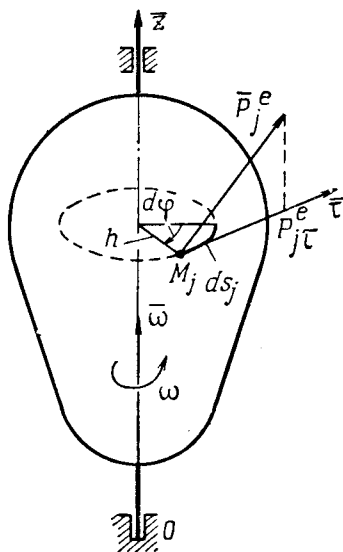


Рис. 22.15.

Следовательно, элементарная работа всех внешних сил на элементарном угле поворота $d\varphi$ будет

$$\delta A = \sum_{j=1}^n m_z (\bar{P}_j^e) d\varphi = M_z^e d\varphi, \quad (22.43)$$

где $M_z^e = \sum_{j=1}^n m_z (\bar{P}_j^e)$ — главный момент внешних сил относительно оси вращения. На конечном перемещении

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z^e d\varphi. \quad (22.44)$$

При $M_z^e = \text{const}$

$$A = M_z^e (\varphi_2 - \varphi_1). \quad (22.45)$$

Мощность. Напомним, что величина, характеризующая быстроту приращения работы силы и выражающаяся отношением элементарной работы силы к времени действия dt , называется мощностью силы

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \bar{P} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{P} \cdot \bar{v}.$$

При поступательном движении абсолютно твердого тела с учетом (22.14)

$$N = \bar{R}^e \cdot \bar{v}_0,$$

где $\bar{v}_0 = \frac{d\bar{r}_0}{dt}$ — скорость любой точки твердого тела.

При вращательном движении абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси, например оси Oz , с учетом (22.43)

$$N = M_z^e \frac{d\varphi}{dt} = M_z^e \omega, \quad (22.46)$$

т. е. равна произведению главного момента внешних сил относительно оси вращения на угловую скорость твердого тела.

Механический коэффициент полезного действия η . Силы, приложенные к точкам системы, совершают работу, которая расходуется на преодоление сил сопротивления и на изменение скоростей точек системы. При этом следует различать силы сопротивления полезные (сила веса груза, поднимаемого лебедкой, сила сопротивления гребного винта и т. д.) и вредные (сила трения в подшипниках, сопротивление воды при движении корабля и т. п.). При установившемся движении ($\bar{v} = \text{const}$) уравнение баланса работ будет

$$A_{\text{дв}} = A_{\text{пс}} + A_{\text{вс}},$$

где $A_{\text{дв}}$ — работа приложенных (движущих) сил;

$A_{\text{пс}}$ — работа сил полезных сопротивлений — эффективная работа;

$A_{\text{вс}}$ — работа сил вредных сопротивлений.

Механическим коэффициентом полезного действия называется отношение вида

$$\eta_m = \frac{A_{ис}}{A_{дв}} = \frac{A_{дв} - A_{вс}}{A_{дв}} = 1 - \frac{A_{вс}}{A_{дв}} < 1. \quad (22.47)$$

Пример. С помощью самоходной установки на гусеничном ходу транспортируется ракета. Вес ракеты с установкой (без гусениц и колес) $G_1=150$ кН, вес гусеницы $G_2=(2l+2\pi R)q=10$ кН (где q — вес погонного метра гусеницы), вес ведущего колеса $G_3=5$ кН. Принять колеса однородными цилиндрами (рис. 22.16). После трогания с места через 15 с скорость установки равна 10 м/с. Определить мощность двигателя, с помощью которого установка движется, если $\eta_m=0,7$.

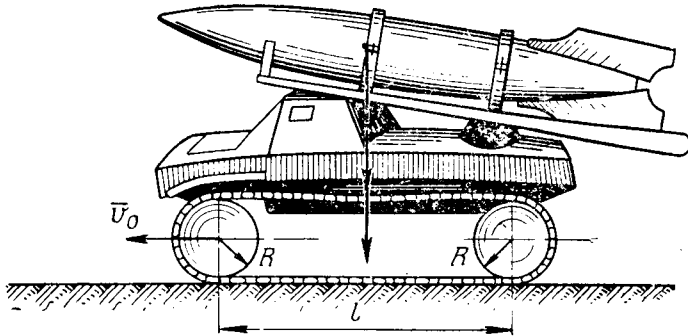


Рис. 22.16.

Решение. Кинетическая энергия системы складывается из T_1 — кинетической энергии поступательного движения ракеты и установки (без гусениц и колес);

$$T_1 = \frac{G_1 v_0^2}{2g}; \quad T_2 = T_{г}^1 + T_{г}^2 \quad \text{— кинетической энергии двух гусениц, где}$$

$T_{г}^1 = 2 \frac{ql}{2g} (2v_0)^2$ — кинетическая энергия верхней поступательно движущейся части (скорость нижней равна нулю);

$T_{г}^2 = 2 \left[\frac{2\pi Rq}{2g} v_0^2 + \frac{I_z \omega^2}{2} \right] = 2 \left[\frac{\pi Rq}{g} v_0^2 + \frac{2\pi R^3 q}{2g} \left(\frac{v_0}{R} \right)^2 \right] = \frac{4\pi Rq}{g} v_0^2$ — кинетической энергии части гусениц, совершающих плоскопараллельное движение; причем для этой части:

$$M = \frac{2\pi Rq}{g}; \quad I_z = MR^2 = \frac{2\pi R^3 q}{g}; \quad \omega = \frac{v_0}{R};$$

таким образом,

$$T_2 = T_{г}^1 + T_{г}^2 = 2 \frac{(2l + 2\pi R)q}{g} v_0^2 = 2 \frac{G_2}{g} v_0^2. \quad (**)$$

где $G_2=(2l+2\pi R)q$ — вес гусеницы; T_3 — кинетической энергии четырех колес при плоском движении

$$T_3 = \left(\frac{G_3 v_0^2}{2g} + \frac{I_0 \omega^2}{2} \right) 4 = \left[\frac{G_3 v_0^2}{2g} + \frac{G_3 R^2}{2 \cdot 2g} \left(\frac{v_0}{R} \right)^2 \right] 4 = 3 \frac{G_3}{g} v_0^2. \quad (***)$$

Полная кинетическая энергия механической системы

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{G_1 v_0^2}{2g} + 2 \frac{G_2}{g} v_0^2 + 3 \frac{G_3}{g} v_0^2 = \frac{G_1 + 4G_2 + 6G_3}{2g} v_0^2.$$

Средняя мощность за 15 с равна, учитывая, что $T = A^*$

$$N_{\text{пс}} = \frac{A}{t} = \frac{G_1 + 4G_2 + 6G_3}{2g} \frac{v_0^2}{t} = \frac{150 + 4 \cdot 10 + 6 \cdot 5}{2 \cdot 9,81} \frac{15^2}{15} = 168 \text{ кВт.}$$

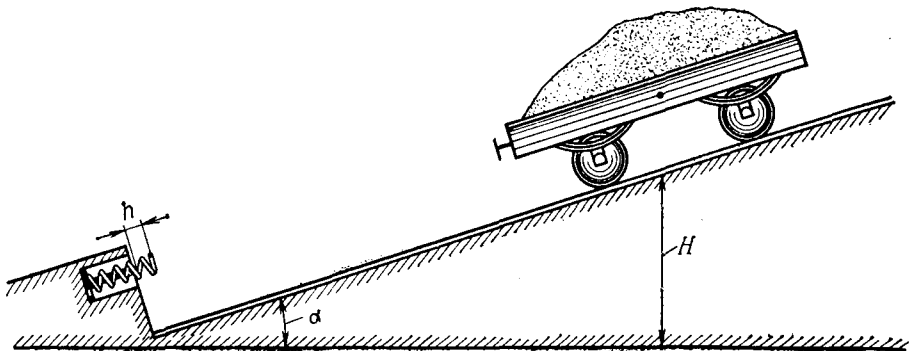


Рис. 22.17.

Потребная мощность двигателя

$$N_{\text{ов}} = \frac{N_{\text{пс}}}{\eta_m} = \frac{168}{0,7} \approx 240 \text{ кВт.}$$

Пример. При механизации погрузочных работ можно применять саморазгружающуюся тележку, принцип работы которой виден из рис. 22.17. После того как тележка с грузом сойдет пружину, она разгрузится и под действием пружины должна возвратиться на высоту H , где она автоматически закрепляется и снова нагружается.

Обозначим Q_1 и Q_2 соответственно вес тележки с грузом и без груза. Принимаем следующие значения задаваемых величин: коэффициент трения качения $f_k = 0,1$ см, радиус колес $r = 10$ см, угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30^\circ$, высота места погрузки тележки H . Определить, какое должно быть минимальное отношение $\frac{Q_1}{Q_2}$ для успешной работы механического разгрузчика.

Решение. Рассмотрим движение тележки при спуске. Применяем теорему о изменении кинетической энергии в виде

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_j,$$

$$\text{где } v_0 = 0; v_1 = 0; \sum A_j = -F_k \frac{H}{\sin \alpha} + Q_1 H - \frac{ch^2}{2} = 0;$$

$$F_k = \frac{f_k}{r} N = \frac{f_k}{r} Q_1 \cos \alpha \text{ — сила трения качения;}$$

* Движение из состояния покоя ($T_0 = 0$).

c — коэффициент жесткости пружины, а h — перемещение свободного конца пружины.

Таким образом,

$$-\frac{f_k}{r} Q_1 \operatorname{ctg} \alpha H + Q_1 H - \frac{ch^2}{2} = 0.$$

При подъеме на высоту H аналогично будет

$$-\frac{f_k}{r} Q_2 \operatorname{ctg} \alpha H_1 - Q_2 H_1 + \frac{ch^2}{2} = 0.$$

Учитывая, что $H_1 = H$, исключаем из полученных уравнений величину ch^2 . Тогда получаем

$$-\frac{f_k}{r} Q_2 \operatorname{ctg} \alpha - \frac{f_k}{r} Q_1 \operatorname{ctg} \alpha + Q_1 - Q_2 = 0,$$

откуда

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{r - f_k \operatorname{ctg} \alpha}{r + f_k \operatorname{ctg} \alpha}.$$

т. е. это отношение зависит от r_1 , f_k и α . При этом должно соблюдаться условие, чтобы $r > f_k \operatorname{ctg} \alpha$. Подставляя числовые значения для рассматриваемого примера, получим

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{10 - 0,1 \operatorname{ctg} 30^\circ}{10 + 0,1 \operatorname{ctg} 30^\circ} = \frac{10 - 0,173}{10 + 0,173} = 0,965.$$

§ 120. ПОНЯТИЕ О ПОТЕНЦИАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ И ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Силowym полем называется часть пространства, находящаяся в таком состоянии, при котором в каждой ее точке возникает сила, приложенная к материальной частице, помещенной в этой точке, зависящая только от положения этой точки и времени, но не от скорости частицы.

Если в силовом поле его силы не зависят от времени, оно называется стационарным силовым полем. Примерами силовых полей являются электромагнитное, поле земного притяжения, поле силы упругости и т. д.

Потенциальным силовым полем называется такое стационарное силовое поле, в котором работа сил поля, действующих на точки механической системы, не зависит от формы их траекторий, а определяется только начальными и конечными положениями этих точек на траектории.

Силы такого поля называются консервативными или силами, и имеют потенциал. Необходимым и достаточным условием наличия потенциального силового поля является существование однозначной дифференцируемой и ограниченной силовой функции координат $U = U(x, y, z)$, полный дифференциал которой по координатам равен элементарной работе силового поля, т. е.

$$dU = \delta A \text{ или } \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = X dx + Y dy + Z dz,$$

откуда

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (22.48)$$

Пусть в таком поле движется материальная точка M . При ее перемещении из положения M_1 в положение M_2 работа силового поля будет

$$A_{1-2} = \int_{M_1}^{M_2} (X dx + Y dy + Z dz) \text{ или с учетом (22.48)}$$

$$A_{1-2} = \int_{M_1}^{M_2} \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = \int_{M_1}^{M_2} dU = U_2 - U_1, \quad (22.49)$$

т. е. работа определяется только разностью значений функций U в конечной и начальной точках траектории и не зависит от формы траектории материальной точки. Функция $U(x, y, z)$ называется потенциальной или силовой функцией. Рассмотрим примеры определения потенциальной функции:

— для силы тяжести, когда ось Oz направлена вертикально вверх (рис. 22.3). Элементарная работа равна $\delta A = -Gdz$ и не зависит от формы траектории. Тогда, принимая $U_{z=0} = 0$, имеем

$$U = -Gz; \quad (22.50)$$

— для силы упругости, действующей вдоль оси Ox . Элементарная работа $\delta A = -cxdx$ (рис. 22.4).

Тогда, принимая $U_{x=0} = 0$, получаем

$$U = -\frac{cx^2}{2}; \quad (22.51)$$

— для центральной силы — силы тяготения, по величине равной (стр. 355) $P(r) = k \frac{mM}{r^2}$, где k — постоянная тяготения; m, M — масса материальной точки и соответственно масса Земли; r — расстояние от центра Земли до материальной точки в рассматриваемый момент времени.

На поверхности Земли $r = R_0$ (R_0 — средний радиус Земли) и $P(r) = G_0 = mg_0$.

Тогда

$$mg_0 = k \frac{mM}{R_0^2} \text{ или } kM = g_0 R_0^2.$$

$$\text{Сила тяготения } P(r) = mg_0 R_0^2 \frac{1}{r^2}.$$

Соответственно элементарная работа $\delta A = -mg_0 R_0^2 \frac{dr}{r^2}$.

Принимая $U_1 = U_{r=\infty} = 0$, получаем из формулы (22.48)

$$U = mg_0 R_0^2 \frac{1}{r}.$$

Потенциальная энергия. Для сил, имеющих потенциал, вводят понятие о потенциальной энергии. Потенциальной энергией системы $\Pi(x, y, z)$ называется энергия, определяемая работой сил поля при перемещении точек этой системы из конечного положения в начальное (на поверхность уровня, принимаемую за нулевую).

Следует отметить, что работа сил поля при перемещении точек системы из начального положения в конечное будет равна разности значений потенциальной энергии в начальном Π_1 и конечном положениях Π_2 , т. е.

$$A = \Pi_1 - \Pi_2. \quad (22.52)$$

Из сравнения (22.49) и (22.52) следует, что если выбор нулевой поверхности уровня для Π и U совпадает и фиксируется, тогда $\Pi = -U$, т. е. потенциальная энергия численно равна потенциальной функции, взятой с обратным знаком. Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; \\ Y &= \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; \\ Z &= \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (22.53)$$

Закон сохранения механической энергии. Рассмотрим систему материальных точек, к каждой из которых приложены внешние и внутренние силы, имеющие потенциал. Тогда для j -й точки

$$A_j = \Pi_{j0} - \Pi_{j1}.$$

Для всей системы

$$A = \sum_{j=1}^n A_j = \sum_{j=1}^n \Pi_{j0} - \sum_{j=1}^n \Pi_{j1} = \Pi_0 - \Pi_1.$$

В соответствии с теоремой об изменении кинетической энергии системы в интегральном виде

$$T_1 - T_0 = A = \Pi_0 - \Pi_1$$

или

$$T_1 + \Pi_1 = T_0 + \Pi_0 = E, \quad (22.54)$$

где E — полная механическая энергия системы.

При движении механической системы под действием сил, имеющих потенциал, полная механическая энергия, равная сумме кинетической и потенциальной энергии системы, остается величиной постоянной.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И СИСТЕМЫ

§ 121. МОМЕНТЫ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И СИСТЕМЫ

Количество движения является величиной векторной. Для материальной точки количество движения равно произведению массы на скорость. Аналогично понятию момента силы относительно центра O , равного $\bar{m}_0(\bar{P}) = \bar{r} \times \bar{P}$, вводим понятие момента количества движения материальной точки относительно неподвижного центра O (рис. 23.1), равного

$$\bar{l}_0 = \bar{m}_0(m\bar{v}) = \bar{r} \times m\bar{v}. \quad (23.1)$$

Момент количества движения материальной точки \bar{l}_0 можно записать в другой форме

$$\bar{l}_0 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \cdot m.$$

Очевидно, исходя из определения (23.1) соответствующие проекции момента количества движения материальной точки на неподвижные оси прямоугольной системы координат будут:

$$\left. \begin{aligned} l_x &= m(yv_z - zv_y); \\ l_y &= m(zv_x - xv_z); \\ l_z &= m(xv_y - yv_x). \end{aligned} \right\} \quad (23.2)$$

Скалярная величина, равная, например, l_x — проекции количества движения \bar{l}_0 на ось x , называется моментом количества движения материальной точки относительно оси x .

Величина и направление вектора момента количества движения материальной точки относительно неподвижного центра определяются по равенствам:

$$l_0 = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}; \quad (23.3)$$

$$\cos(\vec{i}, \hat{\vec{l}}_0) = \frac{l_x}{l_0}; \quad \cos(\vec{j}, \hat{\vec{l}}_0) = \frac{l_y}{l_0}; \quad \cos(\vec{k}, \hat{\vec{l}}_0) = \frac{l_z}{l_0}. \quad (23.4)$$

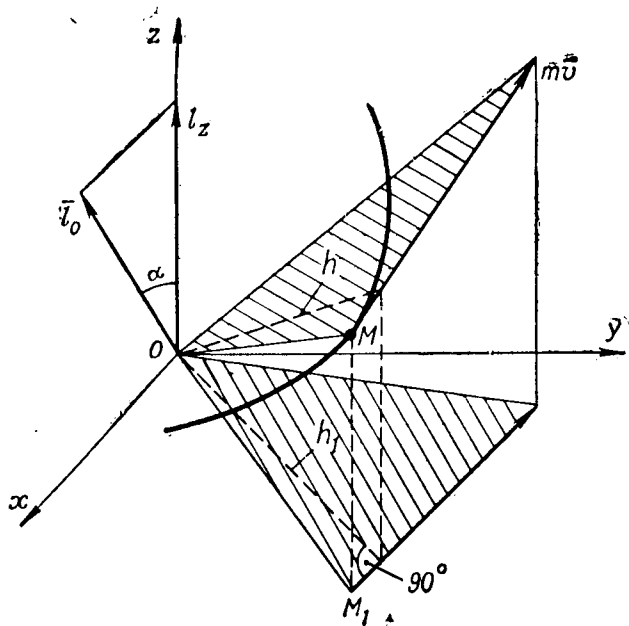


Рис. 23.1.

Кинетический момент или главный момент количества движения механической системы. Пусть система состоит из n материальных точек. Момент количества движения j -й точки системы относительно данного центра O будет $\vec{l}_{0j} = \vec{r}_j \times m_j \vec{v}_j$.

Геометрическая сумма моментов количеств движения всех материальных точек, входящих в данную систему, относительно некоторого неподвижного центра называется главным моментом количества движения или кинетическим моментом механической системы \vec{L}_0 относительно этого центра. Таким образом,

$$\vec{L}_0 = \sum_{j=1}^n \vec{l}_{j0}. \quad (23.5)$$

Главным моментом количества движения или кинетическим моментом механической системы относительно оси называется

алгебраическая сумма моментов количества движения точек системы относительно этой оси, т. е.

$$L_x = \sum_{j=1}^n l_{jx}; \quad L_y = \sum_{j=1}^n l_{jy}; \quad L_z = \sum_{j=1}^n l_{jz}.$$

Отметим, например, что

$$L_x = \sum_{j=1}^n l_{jx} = \sum_{j=1}^n \text{пр}_x \bar{l}_{j0} = \text{пр}_x \sum_{j=1}^n \bar{l}_{j0} = \text{пр}_x \bar{L}_0 = L_0 \cos(\bar{i}, \hat{\bar{L}}_0), \quad (23.6)$$

т. е. кинетический момент механической системы относительно оси равен проекции на эту ось кинетического момента системы относительно некоторого центра O , лежащего на этой оси.

Кинетический момент твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Рассмотрим точку M_j тела, которое вращается вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью ω_z . Обозначим m_j и v_j массу и соответственно скорость точки M_j , а через h_j — ее расстояние до оси вращения. Момент количества движения частицы массой m_j относительно оси вращения будет

$$l_{jz} = m_j v_j h_j = m_j \omega_z h_j^2.$$

Кинетический момент тела, состоящего из элементарных частиц, относительно той же оси равен

$$L_z = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n l_{jz} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m_j \rightarrow 0}} \sum_{j=1}^n m_j h_j^2 \omega_z = \omega_z \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m_j \rightarrow 0}} \sum_{j=1}^n m_j h_j^2.$$

Учитывая, что $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m_j \rightarrow 0}} \sum_{j=1}^n m_j h_j^2 = I_z$ — моменту инерции тела относительно оси z , получаем

$$L_z = I_z \omega_z. \quad (23.7)$$

Кинетический момент твердого тела относительно неподвижной оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно той же оси на величину его угловой скорости. Кинетический момент однородного твердого тела относительно точки O можно выразить через проекции на неподвижные оси координат $Oxyz$ в виде

$$\bar{L}_0 = L_x \cdot \bar{i} + L_y \cdot \bar{j} + L_z \bar{k},$$

где $L_x = I_x \omega_x$; $L_y = I_y \omega_y$ и $L_z = I_z \omega_z$ и оси x , y , z — главные центральные оси инерции тела.

Если тело вращается вокруг оси Oz , которая является и его осью симметрии, то $L_x = L_y = 0$ и, следовательно,

$$\bar{L}_0 = L_z \bar{k} = I_z \bar{\omega}, \quad (23.8)$$

где o — любая точка, лежащая на оси z , а $\overline{\omega_z k} = \overline{\omega}$.

Формула (23.8) является весьма важной при исследовании движения гироскопа.

Кинетический момент системы твердых тел, вращающихся вокруг одной неподвижной оси z с разными угловыми скоростями, будет

$$L_z = I_{1z}\omega_1 + I_{2z}\omega_2 + \dots + I_{nz}\omega_n, \quad (23.9)$$

где n — число твердых тел, а I_{nz} и ω_n — соответственно момент инерции и угловая скорость каждого из них относительно оси вращения z .

При $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega$

$$L_z = (I_{1z} + I_{2z} + \dots + I_{nz}) \omega = I_{пр}\omega. \quad (23.10)$$

В равенстве (23.10) через $I_{пр}$ обозначен приведенный момент инерции системы тел относительно оси z .

Пример. На вал насажены (рис. 23.2) кулачная шайба, выполненная в виде однородного диска весом G_1 и радиусом R , и шестерня весом G_2 и радиусом инерции i_z . Плоскость диска перпендикулярна оси вала. Определить кинетический момент системы относительно оси вращения, если угловая скорость вала ω и эксцентриситет шайбы (рис. 23.2) равен $e = kR$, где $k < 1$.

Решение. Направим ось z по оси вращения.

Определяем моменты инерции шайбы I_z^1 и шестерни I_z^2 относительно оси z , параллельной оси z_c :

$$\begin{aligned} I_z^1 &= I_{z_c} + (kR)^2 m_1 = \frac{m_1 R^2}{2} + k^2 R^2 m_1 = \\ &= \frac{G_1 R^2}{2g} (1 + 2k^2). \end{aligned}$$

Кинетический момент системы относительно оси вращения

$$L_z = L_z^1 + L_z^2 = \left[\frac{G_1 R^2}{2g} (1 + 2k^2) + \frac{G_2}{g} i_z^2 \right] \omega = I_{пр} \omega,$$

где $I_{пр} = \frac{G_1 R^2}{2g} (1 + 2k^2) + \frac{G_2}{g} i_z^2$ — приведенный момент инерции относительно оси вращения.

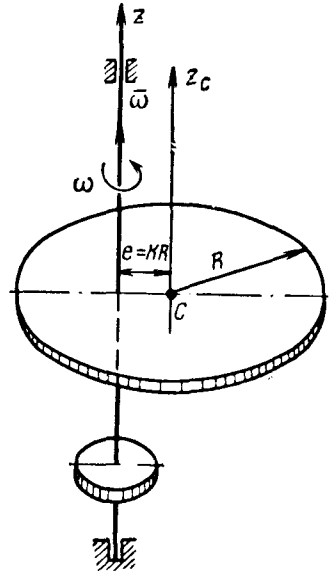


Рис. 23.2.

§ 122. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

В общем случае движения материальной точки ее момент количества движения является функцией времени. Теорема об из-

менении момента количества движения устанавливает эту связь. Дифференцируем (23.1) по времени

$$\frac{d\bar{l}_0}{dt} = \frac{d}{dt} (\bar{r} \times m\bar{v}) = \frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v} + \bar{r} \times \frac{d(m\bar{v})}{dt}.$$

Учитывая, что

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v} \text{ и } \bar{v} \times m\bar{v} = 0, \text{ а также, что } \bar{r} \times m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{r} \times \bar{P} = \bar{m}_0(\bar{P}),$$

получаем

$$\frac{d\bar{l}_0}{dt} = \bar{m}_0(\bar{P}).$$

В том случае, когда на точку действует одновременно n сил, тогда

$$\frac{d\bar{l}_0}{dt} = \sum_{j=1}^n m_0(\bar{P}_j). \quad (23.11)$$

Формула (23.11) выражает теорему об изменении момента количества движения материальной точки в дифференциальной форме, а именно: векторная производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно неподвижного центра равна геометрической сумме моментов сил, действующих на точку, относительно того же центра.

Проектируя (23.11) на оси неподвижной прямоугольной системы координат, получаем:

$$\frac{dl_x}{dt} = \sum_{j=1}^n m_x(\bar{P}_j); \quad \frac{dl_y}{dt} = \sum_{j=1}^n m_y(\bar{P}_j); \quad \frac{dl_z}{dt} = \sum_{j=1}^n m_z(\bar{P}_j). \quad (23.12)$$

Равенство (23.12) выражает теорему об изменении момента количества движения в координатной форме: производная от момента количества движения материальной точки относительно какой-либо неподвижной оси равна алгебраической сумме моментов всех сил, приложенных к точке, относительно той же оси.

В частном случае, когда во все время движения, например,

$$\sum_{j=1}^n m_z(\bar{P}_j) = 0, \text{ тогда } \frac{dl_z}{dt} = 0 \text{ и, следовательно,}$$

$$l_z = m_z(m\bar{v}) = \text{const}. \quad (23.13)$$

Таким образом, если алгебраическая сумма моментов всех сил относительно какой-либо оси во все время движения равна нулю, то момент количества движения относительно этой оси остается постоянным (условие сохранения момента количества движения относительно оси). Условием сохранения момента количества дви-

жения относительно неподвижного полюса будет равенство

$$\sum_{j=1}^n \bar{m}_0 (\bar{P}_j) = 0. \quad \text{Тогда} \quad \frac{d\bar{l}_0}{dt} = 0 \quad \text{и, следовательно,}$$

$$\bar{l}_0 = \text{const.} \quad (23.14)$$

Пример. Космический корабль при выходе на орбиту движется по эллиптической траектории вокруг Земли под действием силы, направленной к центру Земли, который находится в одном из полюсов эллипса (например, полюс O

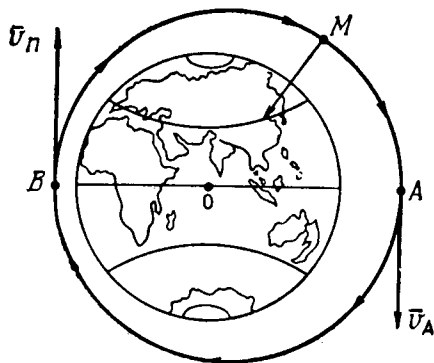


Рис. 23.3.

на рис. 23.3). Определить величину скорости v_A в точке A , наиболее удаленной от Земли (апогее), если скорость в точке B , ближайшей к Земле (перигее), известна и равна v_B .

Решение. На космический корабль во время его движения по траектории действует центральная сила, линия действия которой направлена к центру Земли O , а следовательно, ее момент относительно O равен нулю.

Из (23.14) следует, что $l_0 = \text{const}$ и, следовательно,

$$|mv_B| \cdot OB = |mv_A| \cdot OA,$$

откуда $v_A = v_B \frac{OB}{OA}$, т. е. скорость в апогее наименьшая.

§ 123. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Рассмотрим движение механической системы, состоящей из n материальных точек M_1, M_2, \dots, M_n . Применим формулу (23.11) к j -й точке системы $\frac{d\bar{l}_{j0}}{dt} = \bar{m}_0 (\bar{P}_j^e) + \bar{m}_0 (\bar{P}_j^i)$, где \bar{P}_j^e и \bar{P}_j^i — равнодействующие соответственно внешних и внутренних сил, действующих на j -ю точку системы. Для всей системы

$$\sum_{j=1}^n \frac{d\bar{l}_{j0}}{dt} = \sum_{j=1}^n \bar{m}_0 (\bar{P}_j^e) + \sum_{j=1}^n \bar{m}_0 (\bar{P}_j^i), \quad (23.15)$$

где $\sum_{j=1}^n \frac{d\bar{l}_{j0}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum \bar{l}_{j0} = \frac{d\bar{L}_0}{dt}$ — векторная производная по времени от кинетического момента \bar{L}_0 ;

$\sum_{j=1}^n \bar{m}_0(\bar{P}_j^e) = \bar{M}_0^e$ — главный момент внешних сил, приложенных к точкам данной системы, относительно неподвижного центра O ;

$\sum_{j=1}^n \bar{m}_0(\bar{P}_j^i) = \bar{M}_0^i$ — главный момент внутренних сил, действующих между точками системы относительно того же центра O .

На основании закона равенства действия и противодействия каждой внутренней силе соответствует другая, равная и противоположно ей направленная. Поэтому $\bar{M}_0^i = 0$. Таким образом,

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \bar{M}_0^e. \quad (23.16)$$

Формула (23.16) выражает теорему об изменении кинетического момента механической системы в дифференциальной форме: векторная производная по времени от кинетического момента механической системы относительно неподвижного центра равна главному моменту внешних сил, приложенных к точкам системы, относительно того же центра.

Проектируя векторное равенство (23.16) на оси неподвижной прямоугольной системы координат, получаем три равенства:

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x^e; \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y^e; \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z^e, \quad (23.17)$$

где M_x^e , M_y^e и M_z^e — главные моменты внешних сил, действующих на точки системы, относительно соответствующих координатных осей.

Полученные равенства выражают теорему об изменении главного момента количества движения (кинетического момента) системы относительно оси: производная по времени от кинетического момента относительно неподвижной оси равна главному моменту внешних сил, действующих на точки системы, относительно той же оси.

Теорема изменения кинетического момента в конечной (интегральной) форме получается путем интегрирования равенства (23.16).

Из (23.16) следует

$$d\bar{L}_0 = \bar{M}_0^e dt,$$

откуда

$$\bar{L}_{o2} - \bar{L}_{o1} = \int_0^t \bar{M}_o^e dt. \quad (23.18)$$

В проекциях на оси неподвижной прямоугольной системы координат, например на ось z , можно записать

$$L_{z2} - L_{z1} = \int_0^t M_z^e dt. \quad (23.19)$$

Теорема об изменении кинетического момента относительно неподвижного центра и оси позволяет определить кинетический момент системы в любой момент времени и упрощает исследование вращательного движения системы, если известен закон изменения главного момента внешних сил.

Частные случаи:

1. $\bar{M}_o^e = 0$. Тогда $\frac{d\bar{L}_o}{dt} = 0$ и, следовательно, $\bar{L}_o = \overline{\text{const}}$. Если главный момент всех внешних сил, действующих на точки механической системы, относительно неподвижного центра O равен нулю, то кинетический момент относительно этого центра постоянен по величине и направлению.

2. $M_z^e = 0$. Тогда $\frac{dL_z}{dt} = 0$ и, следовательно, $L_z = \text{const}$. Если главный момент всех внешних сил, действующих на точки системы, относительно какой-либо оси равен нулю, то кинетический момент относительно этой оси будет постоянной величиной.

Рассмотренные случаи выражают закон сохранения момента количества движения (кинетического момента) системы.

Из полученных зависимостей следует, что внутренние силы не могут изменить кинетический момент, хотя в общем случае могут влиять на него косвенным образом через внешние силы (например, вращение неуравновешенного диска на упругом валу, при котором вал изгибается и кинетический момент увеличивается).

Пример. На однородный круглый барабан (рис. 23.4) весом G_1 наматывается трос, с помощью которого из трюма поднимается груз весом G_2 . Определить ускорение груза, если к шкиву приложен момент $M_a = \text{const}$. Трением в подшипниках и массой троса пренебречь. Найти продольную силу, действующую на сечение троса и соответствующее нормальное напряжение.

Решение. Обозначим скорость обода барабана \bar{v} . Пренебрегаем упругостью троса. Тогда величина скорости точек, расположенных на обode барабана v , будет равна величине v_{rp} — скорости груза.

Определяем кинетический момент системы $L_z = L_z^6 + L_z^{rp}$,

где $L_z^6 = I_z^6 \omega = \frac{mR^2}{2} \frac{v}{R} = \frac{G_1 v R}{2g}$ — кинетический момент барабана;

$L_z^{rp} = m_{rp} v_{rp} R = \frac{G_2}{g} v R$ — кинетический момент поднимаемого груза.

Следовательно,

$$L_z = \frac{G_2 v R}{2g} \left(\frac{G_1}{G_2} + 1 \right).$$

Определяем главный момент внешних сил относительно оси вращения. Он равен

$$M_z^e = M_B - G_2 R.$$

Момент реакций подшипников, на которые опирается вал, относительно оси z равен нулю, так как их линия действия пересекает ось z .

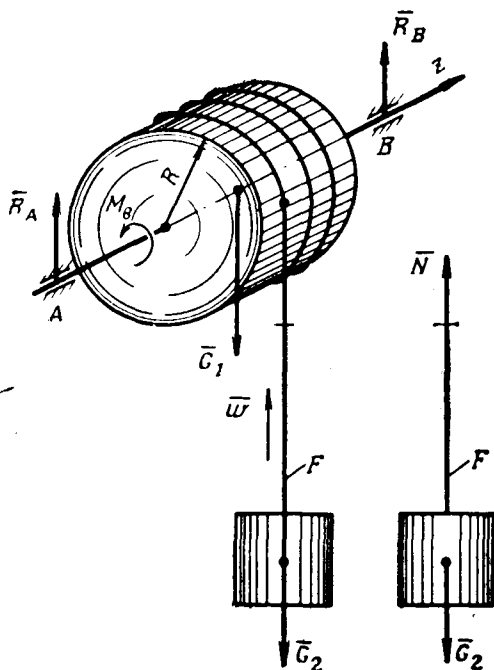


Рис. 23.4.

Используем уравнение (23.17) в виде $\frac{dL_z}{dt} = \frac{G_2 R}{2g} \left(2 + \frac{G_1}{G_2} \right) \frac{dv}{dt} = M_B - G_2 R$.
Откуда

$$\frac{dv}{dt} = w = \frac{M_B - G_2 R}{G_2 R \left(2 + \frac{G_1}{G_2} \right)} \cdot 2g = \text{const.}$$

Применяя метод сечения, составляем уравнение движения груза $G_2 = G_{гп}$.

$$m_{гп} w = N - G_2,$$

следовательно, нормальная сила

$$N = m_{гп} w + G_2 = G_2 \left(\frac{w}{g} + 1 \right).$$

Нормальное напряжение в поперечном сечении троса равно

$$\sigma_{\text{дин}} = \frac{N}{F} = \frac{G_2}{F} \left(\frac{w}{g} + 1 \right) = \frac{G_2}{F} \left[2 \frac{M_B - G_2 R}{G_2 R \left(2 + \frac{G_1}{G_2} \right)} + 1 \right] = \sigma_{\text{ст}} \cdot k_{\text{дин}},$$

где F — площадь сечения троса, а величина, стоящая в квадратных скобках, — динамический коэффициент, показывающая, во сколько раз динамические напряжения (деформации) больше статических. Принимаем следующие численные данные:

$$M_B = 50 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad R = 0,25 \text{ м}; \quad G_2 = 50 \text{ кН}; \quad G_1 = 15 \text{ кН}; \quad F = 10 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Тогда величина динамического коэффициента будет равна

$$k_{\text{дин}} = 1 + 2 \frac{M_B - G_2 R}{G_2 R \left(\frac{G_1}{G_2} + 2 \right)} = 1 + 2 \frac{50 - 50 \cdot 0,25}{50 \cdot 0,25 \left(\frac{15}{30} + 2 \right)} = 3,4.$$

Динамические напряжения

$$\sigma_{\text{дин}} = k_{\text{дин}} \sigma_{\text{ст}} = 3,4 \frac{50 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-4}} = 170 \text{ МН/м}^2.$$

§ 124. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Рассмотрим вращение твердого тела вокруг неподвижной оси z , если на него действуют в точках M_1, M_2, \dots, M_n внешние силы $\bar{P}_1^e, \bar{P}_2^e, \dots, \bar{P}_n^e$, а на опорах A и B — реакции R_A и R_B . Применим равенство (23.17) к рассматриваемому случаю, учитывая, что $L_z = I_z \omega$.

Принимаем, что для абсолютно твердого тела постоянной массы $I_z = \text{const}$, тогда $\frac{dL_z}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt}$.

После подстановки в (23.17) получаем

$$\text{или} \quad \left. \begin{aligned} I_z \frac{d\omega}{dt} &= M_z^e \\ I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= M_z^e \end{aligned} \right\} \quad (23.20)$$

В правую часть равенства входит сумма моментов внешних сил (включая и силы трения) относительно неподвижной оси вращения. Моменты от реакций опор равны нулю, так как линия действия каждой из них пересекает ось z .

Уравнение (23.20) называется дифференциальным уравнением вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

По форме (23.20) напоминает дифференциальное уравнение поступательного движения твердого тела $m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{R}^e$.

Таким образом, инертность тела при его вращении вокруг неподвижной оси характеризует величина I_z , а при поступательном движении — масса тела m .

Если $M_z^e = 0$, то $\omega = \text{const}$, т. е. тело вращается равномерно.

Уравнение (23.20) позволяет решать следующие задачи.

Определить M_z^e , если заданы I_z и $\varphi = \varphi(t)$, по равенству $M_z^e = I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2}$.

Определить закон вращения $\varphi = \varphi(t)$, если заданы I_z и M_z^e , — обратная задача, которая решается путем интегрирования уравнения (23.20).

Определить момент инерции I_z , если заданы $\varphi = \varphi(t)$ и M_z^e .

Пример. В момент прекращения подачи топлива валопровод судовой установки вращался с числом оборотов n_0 в минуту. Принимая, что момент сопротивления, создаваемый тормозным устройством, трением в подшипниках и дру-

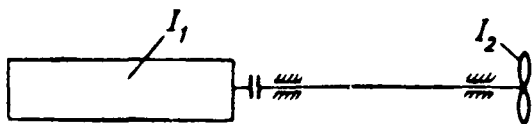


Рис. 23.5.

гими видами сопротивлений, пропорционален угловой скорости вращения валопровода, т. е. $M_c = -k\omega$, определить закон изменения угловой скорости и угловой координаты. Определить также постоянный коэффициент k , если при $t = t_1$ $\omega = \omega_1$ и при $t = t_2$ $\omega = \omega_2$. Момент инерции силовой установки и винта $I = I_1 + I_2 = \text{const}$.

Решение. Записываем дифференциальное уравнение вращения валопровода в виде

$$I \frac{d\omega}{dt} = -k\omega,$$

откуда

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{k}{I} dt.$$

Интегрируем полученное уравнение $\ln \omega = -\frac{k}{I} t + C_1$.

Используя начальные условия, определяем произвольную постоянную C_1 :

При $t = 0$ $\omega = \omega_0$, $C_1 = \ln \omega_0$, где $\omega_0 = \frac{\pi n_0}{30}$. Следовательно,

$$\ln \omega = -\frac{k}{I} t + \ln \omega_0$$

или, потенцируя,

$$\omega = \omega_0 e^{-\frac{k}{I} t}.$$

Учитывая, что $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, находим

$$d\varphi = \omega_0 e^{-\frac{k}{I} t} dt$$

или

$$\varphi = -\frac{\omega_0 l}{k} e^{-\frac{k}{T} t} + C_2.$$

Определяем произвольную постоянную C_2 из условия, что при $t=0$ $\varphi=0$

$$C_2 = \frac{\omega_0 l}{k}.$$

Следовательно,

$$\varphi = \frac{\omega_0 l}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{T} t} \right).$$

Определяем коэффициент k из следующих равенств:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0 e^{-\frac{k}{T} t_1}; \\ \omega_2 &= \omega_0 e^{-\frac{k}{T} t_2} \end{aligned} \right\} \text{откуда } \ln \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{k}{T} (t_2 - t_1)$$

и, следовательно,

$$k = \frac{T \ln \frac{\omega_1}{\omega_2}}{t_2 - t_1}.$$

§ 125. ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

Физическим маятником называется твердое тело, закрепленное на неподвижной оси и способное под действием силы тяжести совершать колебательное движение вокруг этой оси (рис. 23.6, а).

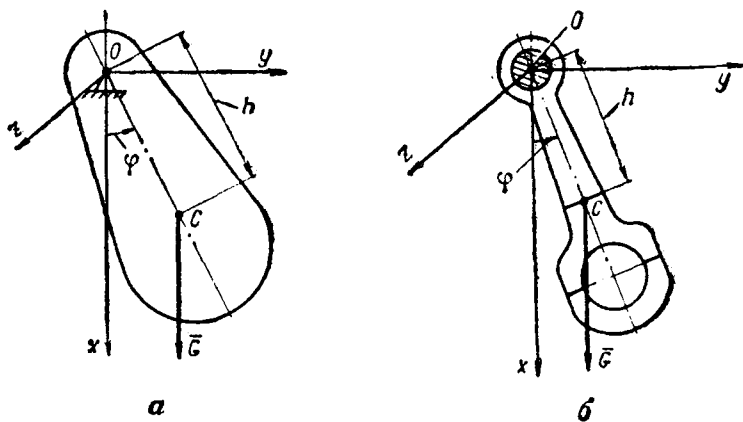


Рис. 23.6.

Ось, называемая осью подвеса, не проходит через центр тяжести маятника. Примером физического маятника является шатун (рис. 23.6, б), который может вращаться вокруг горизонтальной

оси Oz . Обозначим через h расстояние от оси Oz до центра тяжести C физического маятника, G — его вес. Запишем дифференциальное уравнение вращения физического маятника вокруг оси Oz , пренебрегая сопротивлением. Главный момент внешних сил относительно оси вращения будет равен

$$M_z^e = -Gh \sin \varphi.$$

Тогда в соответствии с (23.20)

$$I_z \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M_z^e = -Gh \sin \varphi$$

или

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{mgh}{I_z} \sin \varphi = 0.$$

Учитывая, что

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{1}{3!} \varphi^3 + \frac{1}{5!} \varphi^5 - \dots,$$

ограничимся частным случаем, когда отклонения физического маятника φ малы, т. е. $\varphi \leq 20^\circ \div 30^\circ$. Тогда можно с ошибкой до 0,8%, а при 30° до 5% считать, что $\sin \varphi = \varphi$, и рассматривать дифференциальное уравнение малых колебаний физического маятника в виде

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0, \quad (23.21)$$

где $k^2 = \frac{mgh}{I_z}$.

Общий интеграл уравнения (23.21) будет $\varphi = A \sin (kt + \gamma)$, где A — амплитуда и γ — начальная фаза определяются из начальных условий. Круговая частота и период колебаний определяются по формулам:

$$k = \sqrt{\frac{mgh}{I_z}}; \quad T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{mgh}}. \quad (23.22)$$

Зная положение центра тяжести, вес тела и определяя экспериментально период малых колебаний, из (23.22) можно найти момент инерции тела относительно оси Oz

$$I_z = \frac{T^2 mgh}{4\pi^2}. \quad (23.23)$$

Моменты инерции тел сложной формы аналитически определять бывает сложно и для этого используют экспериментальные методы. Одним из них является метод качания. Так, если требуется определить момент инерции шатуна относительно оси, проходящей через его центр тяжести, определяют экспериментально его вес G и период колебаний T , подвесивая шатун так, чтобы он мог ка-

чатся вокруг оси Oz . Затем, зная h , из формулы (23.23) определяют I_z .

Учитывая, что центральная ось $Oz_c \parallel Oz$, определяем

$$I_{z_c} = I_z - mh^2 = \frac{T^2 Gh}{4\pi^2} - \frac{G}{g} h^2. \quad (23.24)$$

С другими методами экспериментального определения моментов инерции (способы крутильных колебаний, падающего груза и др.) можно ознакомиться в соответствующей литературе.

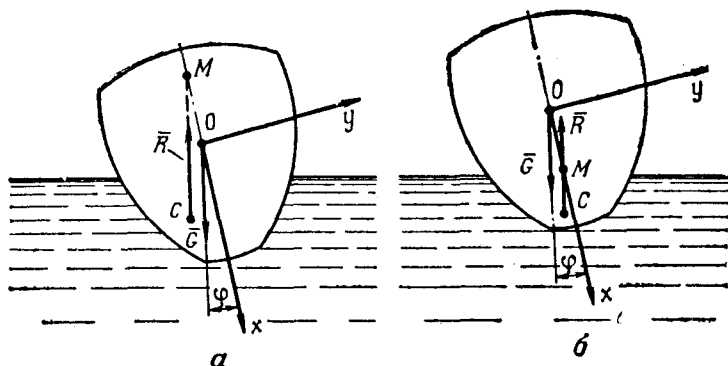


Рис. 23.7.

Математическим маятником называется материальная точка, способная совершать колебательное движение под действием силы тяжести по заданной гладкой кривой, находящейся в вертикальной плоскости. Как известно, период колебаний математического маятника длиной l равен $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ с. Чтобы он был равен периоду колебаний физического маятника, необходимо соблюдать условие $2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{Gh}}$, т. е. чтобы

$$l = \frac{I_z g}{Gh} = \frac{J_z}{mh}. \quad (23.25)$$

Формула (23.25) определяет приведенную длину физического маятника, т. е. длину такого математического маятника, период которого был бы равен периоду данного физического маятника.

В заключение отметим, что период малых свободных колебаний корабля при бортовой качке на спокойной воде определяется также по формуле (23.22), где $h = OM$ — метацентрическая высота. Метацентрической высотой OM называется расстояние от центра тяжести корабля до метacentра. Метacentром называется точка M пересечения вертикали, проведенной через центр тяжести объема воды, вытесненной корпусом корабля, с осью x — осью симметрии сечения (рис. 23.7, а).

Колебания корабля могут происходить при условии, если метациентр M расположен выше центра тяжести O . Если же метациентр лежит ниже центра тяжести, то сила R поддержания воды создает момент вокруг продольной оси корабля, вызывающий непрерывное возрастание угла φ , что может привести к опрокидыванию корабля (рис. 23.7, б).

ГЛАВА 24

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

§ 126. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ. КИНЕТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ БЫСТРО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ГИРОСКОПА

Особые свойства, приобретаемые твердым телом при сообщении ему быстрого вращения, были установлены Фуко еще в 1852 г. и названы им гироскопическими свойствами, а при-

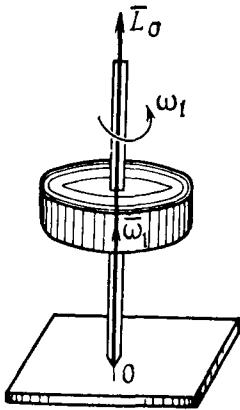


Рис. 24.1.

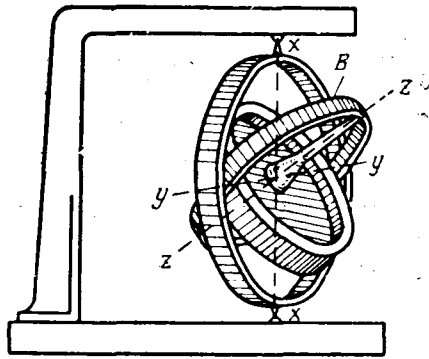


Рис. 24.2.

бор, использующий эти свойства, — гироскопом. Гироскопы получили широкое применение, особенно в последнее время, в военно-морском флоте, авиации (гироскопы, автопилоты, приборы управления стрельбой, приборы курса, гироскопические успокоители качки и т. п.) и в других областях техники.

Гироскопом называется однородное твердое тело, быстро вращающееся вокруг оси симметрии, одна из точек которой неподвижна (рис. 24.1). Теория гироскопических явлений разработана в трудах Л. Эйлера, Ж. Л. Лагранжа, С. В. Ковалевской, А. Н. Крылова и др. Простейшим гироскопическим прибором является волчок. Гироскоп в кардановом подвесе (рис. 24.2) входит в качестве

составной части в большинство гироскопических устройств. Ротор вращается вокруг собственной оси $z-z$, закрепленной в кольце B , которое вместе с ротором может вращаться вокруг оси $y-y$ наружного кольца A . Наружное кольцо в свою очередь может вращаться вокруг оси $x-x$, укрепленной неподвижно. Оси $x-x$, $y-y$ и $z-z$ пересекаются в одной точке O , которая совпадает с центром тяжести ротора и во время движения остается неподвижной. Вращение ротора гироскопа вокруг оси $z-z$ называется собственным вращением (ротацией) в отличие от вращений вокруг кардановых осей соответственно внутреннего и наружного колец (нутация, прецессия).

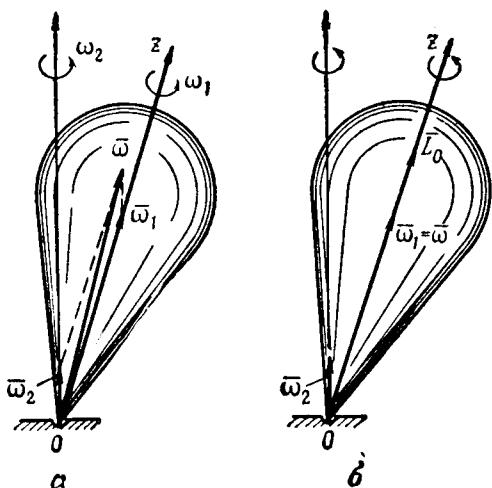


Рис. 24.3.

Уравновешенным или астатическим гироскопом называется такой гироскоп в кардановом подвесе, у которого общий центр тяжести всех подвижных частей совпадает с точкой O пересечения трех его осей. Рассматриваемый гироскоп имеет три степени свободы; вращения его вокруг трех упомянутых осей являются независимыми. Закрепляя наружную рамку-кольцо, получим гироскоп с двумя степенями свободы.

Рассмотрим гироскоп, представленный на рис. 24.3, который имеет три степени свободы. Определим его кинетический момент относительно неподвижной точки O . Пусть угловая скорость собственного вращения ротора будет ω_1 . Ось ротора в свою очередь совершает поворот вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O (рис. 24.3, а), с малой угловой скоростью ω_2 , которую называют угловой скоростью прецессии. Таким образом, гироскоп участвует в двух вращениях: с угловыми скоростями ω_1 вокруг собственной оси и ω_2 вокруг вертикальной оси. Направим векторы ω_1 и ω_2 вдоль соответствующих осей. Тогда вектор абсолютной угловой скорости $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$ будет направлен вдоль мгновенной оси вращения. В рассматриваемом случае направление кинетического момента \bar{L}_0 не совпадает с направлением собственной оси вращения гироскопа. С целью упрощения решения задачи будем полагать с достаточной для практики степенью точности, что:

- угловая скорость собственного вращения $\bar{\omega}_1$ значительно больше угловой скорости прецессии $\bar{\omega}_2$ и, как следствие, $\bar{\omega} \approx \bar{\omega}_1$;
- кинетический момент гироскопа равен $\bar{L}_0 = I_z \bar{\omega}_1$ и направлен

вдоль оси симметрии z не только тогда, когда она неподвижна в пространстве, но и когда вращается с угловой скоростью $\omega_2 \ll \omega_1$ вокруг вертикальной оси (рис. 24.3, б);

— угловая скорость собственного вращения $\omega_1 = \text{const}$.

Таким образом, будем принимать величину кинетического момента гироскопа постоянной и равной

$$L_0 = I_z \omega_1 = \text{const}.$$

§ 127. КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА (ТЕОРЕМА РЕЗАЛЯ)

Из кинематики известно, что скорость \bar{v} точки A , радиус-вектор которой \bar{r} , равна $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$ и направлена по касательной к траектории в данной точке. Таким образом, \bar{v} — скорость конца радиуса-вектора.

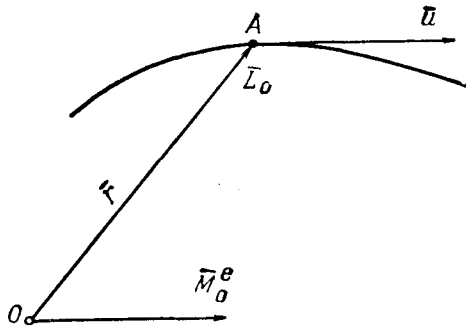


Рис. 24.4.

Используем подобие формы записи кинематического векторного равенства $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$ и уравнения, выражающего теорему моментов $\bar{M}_0^e = \frac{d\bar{L}_0}{dt}$, для придания теореме моментов кинематической формулировки. Пусть из неподвижного центра O отложен вектор \overline{OA} , равный кинетическому моменту системы относительно O , т. е. $\overline{OA} = \bar{L}_0(t)$. Вектор \overline{OA} является радиусом-вектором \bar{r} точки A . Тогда

$\frac{d\overline{OA}}{dt} = \bar{u}$, где \bar{u} — скорость точки A . С другой стороны, $\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \bar{M}_0^e$, где \bar{M}_0^e — главный момент внешних сил, действующих на систему, относительно неподвижного центра O .

Учитывая, что левые части равенства равны, можно записать

$$\bar{M}_0^e = \bar{u}. \quad (24.1)$$

Равенство (24.1) выражает теорему Резаля: скорость конца вектора, изображающего кинетический момент механической системы относительно неподвижного центра, геометрически равна главному моменту внешних сил, приложенных к точкам данной системы, относительно того же центра.

§ 128. ГИРОСКОПИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ И ГИРОСКОПИЧЕСКИЙ МОМЕНТ

Рассмотрим уравновешенный гироскоп с двумя степенями свободы (рис. 24.5). Пусть весьма большая собственная угловая ско-

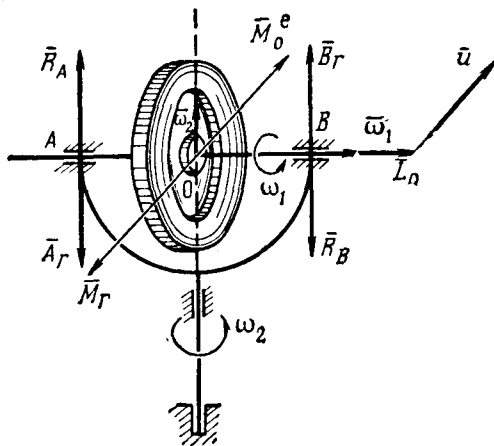


Рис. 24.5.

рость гироскопа будет равна ω_1 . Рассмотрим явления, которые появятся, если поворачивать систему вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\omega_2 \ll \omega_1$. Кинетический момент гироскопа в соответствии с принятыми допущениями направлен по оси собственного вращения. Линейная скорость конца вектора \bar{L}_0 равна \bar{u} и направлена перпендикулярно оси собственного вращения. При этом $\bar{u} = \omega_2 \times \bar{L}_0 = \omega_2 \times \bar{I}_z \omega_1$ (по аналогии с $\bar{v} = \omega \times \bar{r}$).

По теореме Резаля скорость \bar{u} конца вектора \bar{L}_0 , изображающего кинетический момент, геометрически равна главному моменту \bar{M}_0^e внешних сил, приложенных к системе. Изобразим вектор $\bar{M}_0^e = \bar{u}$, как показано на рис. 24.5.

Внешними силами, приложенными к системе, являются реакции опор подшипников. Направления реакций показаны на рис. 24.5. Реакции подшипников \bar{R}_A и \bar{R}_B , создающие внешний момент \bar{M}_0^e , действующий на систему, лежат в вертикальной плоскости. Величина каждой реакции находится из равенства $R_A = R_B = \frac{|M_0^e|}{l}$, где l — расстояние между подшипниками.

Момент, действующий со стороны вала на подшипники, который вызывает появление реакции, называется гироскопическим моментом \overline{M}_Γ ; он равен по модулю внешнему, но направлен обратно ему, т. е.

$$\overline{M}_\Gamma = I_z \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2. \quad (24.2)$$

Таким образом, если быстро вращающийся гироскоп участвует еще в одном вращении, плоскость которого перпендикулярна плоскости собственного вращения, появляется гироскопический эф-

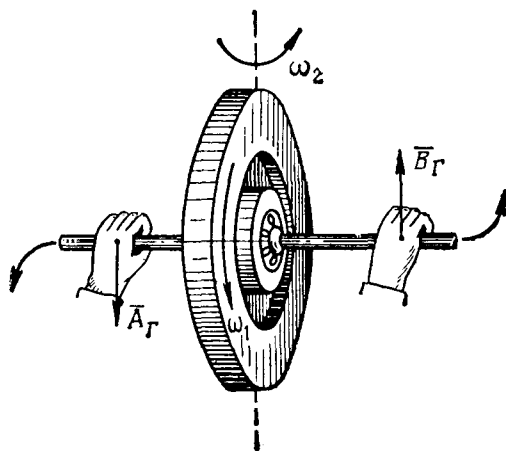


Рис. 24.6.

фект, выражающийся в возникновении гироскопического момента. Вектор гироскопического момента направлен перпендикулярно плоскости, содержащей векторы $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$, так, чтобы, глядя с конца вектора момента \overline{M}_Γ , соответствующая ему пара стремилась повернуть вектор $\overline{\omega}_1$ к вектору $\overline{\omega}_2$ для их совмещения в сторону меньшего угла, против хода часовой стрелки.

Величина сил давлений на опоры-подшипники равна

$$|A_\Gamma| = |B_\Gamma| = \frac{|M_\Gamma|}{l} = \frac{I_z |\omega_1| |\omega_2|}{l} \sin(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2). \quad (24.3)$$

Появление гироскопического момента может быть непосредственно обнаружено, если стремиться повернуть ось быстро вращающегося гироскопа, например, в горизонтальной плоскости (рис. 24.6). Тогда вследствие появления гироскопического момента руки будут испытывать давление в вертикальной плоскости: одна вниз, другая вверх.

Корабль, помимо поступательного движения, может совершать колебания вокруг своей поперечной или продольной оси, которые

соответственно называются килевой или бортовой качкой, или маневрировать, например, совершая циркуляцию. Учитывая, что современный корабль имеет большое количество механизмов с вращающимися частями (гребные винты, роторы турбин и динамомашин, коленчатые валы дизелей, маховики и др.), качка и маневрирование сопровождаются появлением гироскопического эффекта. Возникающие гироскопические моменты вызывают изгиб валов и перегрузку соответствующих подшипников.

Гироскопический момент от перечисленных выше механизмов на движение корабля влияет мало, так как масса корабля весьма велика по сравнению с массами вращающихся частей, и корабль обладает большой устойчивостью. Влиянием гироскопического мо-

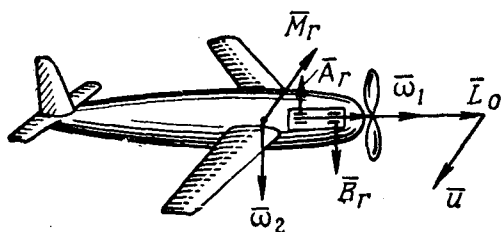


Рис. 24.7.

мента на самолет, особенно винтовой, пренебрегать нельзя, учитывая его небольшую устойчивость и сравнимость масс вращающихся частей и самолета.

При маневрировании самолета, например в горизонтальной плоскости (рис. 24.7), появляется гироскопическая пара в вертикальной плоскости, которая через подшипники воздействует на самолет. Так, при повороте самолета вправо с угловой скоростью ω_2 и ω_1 , направленной по оси вправо, создается дифферент на нос и самолет стремится перейти в пикирование. Если самолет снабжен двумя винтами, вращающимися в разные стороны, гироскопические моменты уравниваются, маневренность самолета улучшается, но ухудшаются условия его эксплуатации (наличие, например, двух двигателей правого и левого вращения).

Пример. Вал ротора турбины, вращающегося с $n=1800$ об/мин, установлен параллельно продольной оси подводной лодки (рис. 24.8). Вес вращающихся частей $G=70$ кН. Радиус инерции ротора $i_z=0,7$ м. Определить гироскопические давления на подшипники, если подводная лодка, маневрируя, совершает циркуляцию на дуге $R=600$ м со скоростью $v=30$ уз (≈ 15 м/с). Расстояние между подшипниками $l=3,5$ м.

Решение. Определяем величины угловых скоростей: собственного вращения

$$\omega_1 = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 1800}{30} = 60\pi \text{ рад/с;}$$

циркуляции

$$\omega_2 = \frac{v}{R} = \frac{15}{600} = 0,025 \text{ рад/с.}$$

Вычисляем величину гироскопического момента, учитывая, что $\omega_2 \ll \omega_1$:

$$M_{\Gamma} = I_z \omega_1 \omega_2 \sin 90^\circ = \frac{G}{g} i_z^2 \frac{\pi n}{30} \frac{v}{R}.$$

Вычисляем величину сил гироскопических давлений на подшипники

$$|A_{\Gamma}| = |B_{\Gamma}| = \frac{|M_{\Gamma}|}{l} = \frac{G}{g} \frac{i_z^2}{l} \cdot \frac{\pi n}{30} \frac{v}{R} = \frac{70}{9,81} \cdot \frac{0,7^2}{3,5} 60\pi \cdot 0,025 \approx 4,7 \text{ кН}.$$

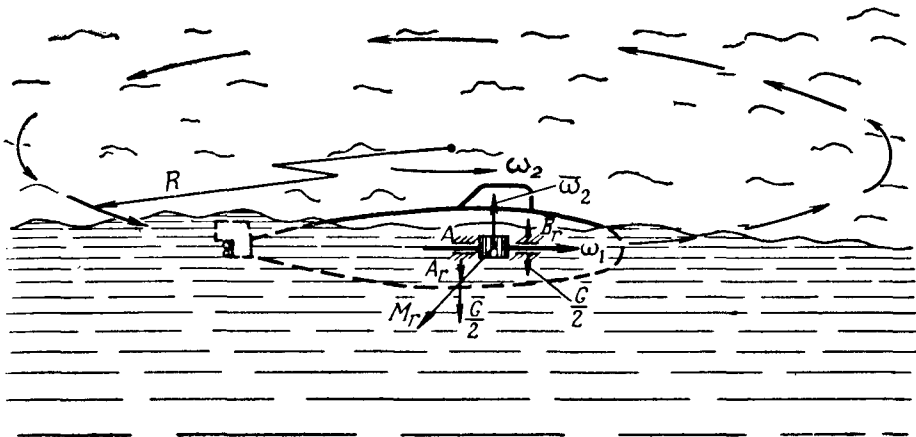


Рис. 24.8.

Суммарные силы, действующие на подшипники, складываются из гироскопической силы и силы тяжести:

$$N_A = A_{\Gamma} + \frac{G}{2} = 4,7 + \frac{70}{2} = 39,7 \text{ кН};$$

$$N_B = B_{\Gamma} + \frac{G}{2} = -4,7 + \frac{70}{2} = 30,3 \text{ кН}.$$

Вывод. Гироскопический момент вызвал перераспределение давлений на подшипники, в результате чего подшипник *B* стал несколько разгружен, но подшипник *A* испытывает значительные перегрузки по сравнению со статическими.

§ 129. ГИРОСКОП С ТРЕМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Рассмотрим гироскоп с тремя степенями свободы, каким, например, является быстро вращающееся тело, имеющее одну неподвижную точку, положение которого определяется тремя углами Эйлера. Пусть гироскоп будет уравновешенным, т. е. таким, у которого центр тяжести совпадает с неподвижной точкой-опорой (рис. 24.9). Пусть уравновешенный гироскоп не вращается, т. е. $\omega_1 = 0$. Тогда под действием постоянной силы \vec{P} , линия действия которой не проходит через центр тяжести, равновесие его нарушится и гироскоп будет равноускоренно поворачиваться вокруг оси *Ox*. После прекращения действия силы \vec{P} вращение вокруг

оси Ox будет продолжаться. Тот же гироскоп, но вращающийся с большой угловой скоростью ω_1 вокруг собственной оси, при действии силы будет двигаться совершенно иначе.

Воспользуемся для исследования движения такого гироскопа теоремой Резаля. Сила \bar{P} создает внешний момент \bar{M}_0^e относительно неподвижной точки O , равный по величине $M_0^e = Ph$. Направление \bar{M}_0^e показано на рис. 24.9. В соответствии с теоремой Резаля скорость \bar{u} конца вектора \bar{L}_0 и вектор \bar{M}_0^e геометрически равны. А это значит, что ось быстро вращающегося гироскопа смещается не по направлению силы, а по направлению вектора ее момента, т. е. перпендикулярно направлению силы. Элементарное смещение конца вектора \bar{L}_0 за время Δt будет $\Delta s = u \Delta t = Ph \Delta t = L_0 \Delta \alpha$. Угол поворота $\Delta \alpha$ оси Oz определится из равенства

$$\Delta \alpha = \frac{Ph}{I \omega_1} \Delta t, \quad (24.4)$$

Из (24.4) следует, что:

— при приложении внешнего момента к быстро вращающемуся гироскопу с тремя степенями свободы ось гироскопа отклоняется на угол $\Delta \alpha$;

— чем больше величина собственной угловой скорости ω_1 , тем меньше угол $\Delta \alpha$;

— перемещение конца вектора \bar{L}_0 перпендикулярно плоскости, в которой расположены сила \bar{P} и ось Oz ;

— сила, действующая в течение малого промежутка времени, почти не изменяет направление собственной оси гироскопа; при быстром вращении у уравновешенного гироскопа с тремя степенями свободы появляется способность противодействовать силе, стремящейся изменить направление его оси вращения.

Рассмотрим движение гироскопа с тремя степенями свободы в том случае, когда его центр тяжести не совпадает с точкой опоры (рис. 24.10). Пусть ось симметрии, вокруг которой гироскоп вращается с большой угловой скоростью ω_1 , отклонена под углом β к вертикали. На гироскоп действуют две внешние силы: его сила тяжести \bar{G} и реакция опоры. Момент внешних сил относительно точки опоры O равен $\bar{M}_0^e = \bar{r} \times \bar{G}$.

В соответствии с теоремой Резаля $\bar{M}_0^e = \bar{u}$, где \bar{u} — скорость точки A . Следовательно, точка A движется в горизонтальной плоскости перпендикулярно OAB . Ось гироскопа является образующей конической поверхности, вращаясь с некоторой угловой скоростью ω_2 вокруг вертикальной оси OB , проходящей через точку O . При этом $\bar{u} = \omega_2 \times \bar{r}$ и тогда

$$\bar{M}_0^e = \omega_2 \times I \omega_1,$$

откуда

$$rG \sin(180 - \beta) = I\omega_1\omega_2 \sin \beta$$

или

$$\omega_2 = \frac{rG}{I\omega_1}. \quad (24.5)$$

Вращательное движение оси симметрии гироскопа вокруг OB (рис. 24.10) с угловой скоростью ω_2 , определяемой по (24.5), называется регулярной прецессией, а ω_2 — угловой скоростью прецессии. Для того чтобы угловая скорость ω_2 была малой, оси гироскопа сообщают большую угловую скорость ω_1 ,

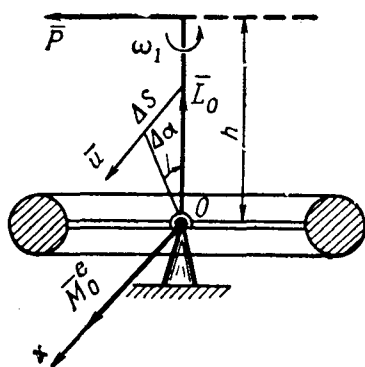


Рис. 24.9.

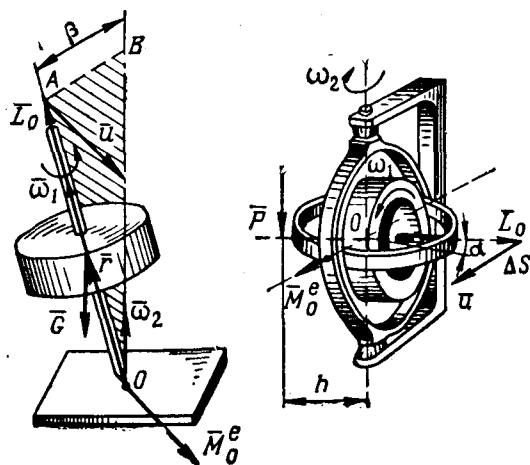


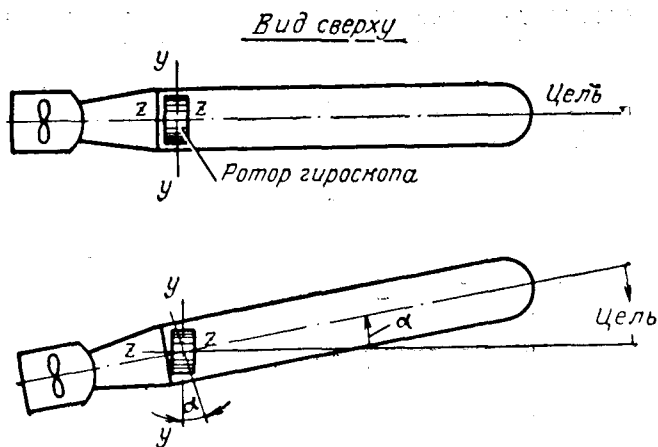
Рис. 24.10.

например ротор гироскопа торпеды может иметь $\omega_1 = 600\pi \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ ($n = 18000$ об/мин) и более. На рис. 24.10 представлено, как с помощью теоремы Резаля определено направление угловой скорости прецессии неуравновешенного гироскопа в кардановом подвесе с тремя степенями свободы. При быстром собственном вращении гироскопа с тремя степенями свободы он приобретает свойство устойчивости. При действии внешнего момента его ось, отклоняясь от вертикальной оси, совершает прецессию, при этом возникает гироскопический момент, уравнивающий внешний момент.

Рассмотрим вращение уравновешенного гироскопа при отсутствии внешних сил, создающих моменты относительно неподвижной точки, т. е. когда $\vec{M}_0^e = 0$.

В этом случае вектор $\vec{L}_0 = \text{const}$. Стало быть, ось гироскопа, вдоль которой по приближенной теории направлен вектор ω_1 , сохраняет направление в пространстве по отношению к инерциальной звездной системе координат, которая принимается неподвижной

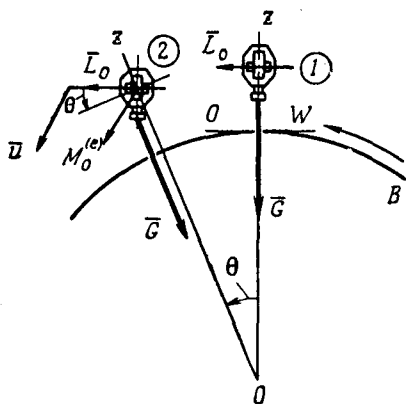
ной. Наблюдатель, связанный с Землей, изменяет свое положение относительно звезд и заметит перемещение оси уравновешенного гироскопа по отношению к Земле. Это позволяет установить вращение Земли и определить координаты места наблюдателя. Отметим, что в переводе с греческого слово «гироскоп» означает «прибор, обнаруживающий вращение».



Свойство быстро вращающегося астатического гироскопа сохранять постоянным свое направление используется в технике. Одним из первых было изобретение гироскопического направляющего аппарата торпеды, который обеспечивает сохранение постоянного заданного курса.

Сохранение курса торпеды (рис. 24.11) обеспечивается с помощью вертикальных рулей торпеды, связанных с соответствующим аппаратом, который состоит из быстро вращающегося астатического гироскопа в кардановом подвесе.

Запуск гироскопа происходит в момент выстрела торпедой. В нормальном положении торпеды ось $z-z$ гироскопа совпадает с продольной осью торпеды, а ось внутреннего кольца $y-y$ ей перпендикулярна.



Предположим, торпеда отклонится от заданного курса. Ось гироскопа будет сохранять свое положение в пространстве и составит угол α с осью торпеды. При этом вызывается смещение золотника, с которым связана ось $y-y$ гироскопа. Сжатый воздух поступает в рулевую машинку, и происходит нужный поворот вертикальных

рулей, исправляющий отклонение от курса. Однако иногда после исправления отклонения от курса в одну сторону, например влево, происходит отклонение в другую — вправо, затем снова влево и т. д. Возникает явление, называемое рысканием торпеды. Этот вопрос уже относится к процессам регулирования.

Следует отметить, что гироскоп с тремя степенями свободы в кардановом подвесе используется так же, как составная часть ряда гироскопических устройств, и в частности гирокомпаса. Рассмотрим простейший случай, когда гироскоп установлен на экваторе (рис. 24.12) *, дуга которого AB видна из Северного полушария. При переходе вместе с Землей из первого положения во второе (за час поворот приблизительно на 15°) ось уравновешенного гироскопа сохраняла бы свое горизонтальное положение в пространстве и, следовательно, положительный конец \bar{L}_0 поднялся бы над горизонтом. Для того чтобы учитывать вращение Земли, к наружному кольцу гироскопа подвешивается груз G . Тогда под действием момента \bar{M}_0^e , создаваемого силой тяжести груза G , которая направлена к точке O , положительный конец оси гироскопа в соответствии с теоремой Резаля также повернется в направлении севера со скоростью \bar{u} и будет направлен на N .



* Заимствован из учебника А. К. Бодунова, Н. А. Бражниченко, А. С. Робачевского «Теоретическая механика». М., Воениздат, 1958.

ГЛАВА 25

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

§ 130. СИЛЫ ИНЕРЦИИ

В соответствии с третьим законом динамики силы, приложенные к двум взаимодействующим телам, равны по величине и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Так, если под действием тела A материальная точка массой m движется с ускорением $\bar{\omega}$ в сторону тела (рис. 25.1), то, очевидно, что сила $\bar{P} = m\bar{\omega}$, с которой тело действует на материальную точку, будет равна по модулю силе $-m\bar{\omega}$, с которой точка действует на тело. Обозначим эту силу $\bar{P}_и$:

$$\bar{P}_и = -m\bar{\omega}. \quad (25.1)$$

Сила, приложенная к телу, вызывающему ускорение $\bar{\omega}$ материальной точки, и представляющая собой меру противодействия материальной точки изменению вектора ее скорости, называется силой инерции ($\bar{P}_и$).

Пусть матрос отталкивает шлюпку массой m от берега, сообщая ей ускорение $\bar{\omega}$. Тогда сила инерции шлюпки, равная $\bar{P}_и = -m\bar{\omega}$, приложена к матросу и представляет меру противодействия шлюпки изменению ее скорости.

Проектируя обе части равенства (25.1) на оси неподвижной прямоугольной системы координат, получим:

$$P_{иx} = -m\omega_x = -m \frac{d^2x}{dt^2}; \quad P_{иy} = -m\omega_y = -m \frac{d^2y}{dt^2};$$
$$P_{из} = -m\omega_z = -m \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (25.2)$$

Если материальная точка движется по криволинейной траектории, то составляющие силы инерции по осям естественного трехгранника будут в соответствии с изображением (рис. 25.2).

Касательная сила инерции, которая направлена по касательной к траектории в сторону, противоположную ускорению:

$$\bar{P}_{\text{ит}} = -m\bar{\omega}_{\tau} = -m \frac{dv}{dt} \cdot \bar{\tau};$$

— нормальная сила инерции, которая направлена по главной нормали в сторону выпуклости, т. е. от центра кривизны:

$$\bar{P}_{\text{ин}} = -m\bar{\omega}_n = -m \frac{v^2}{\rho} \bar{n}.$$

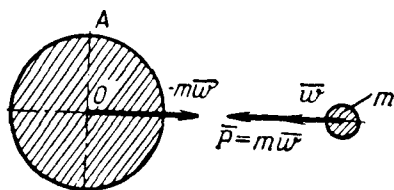


Рис. 25.1.

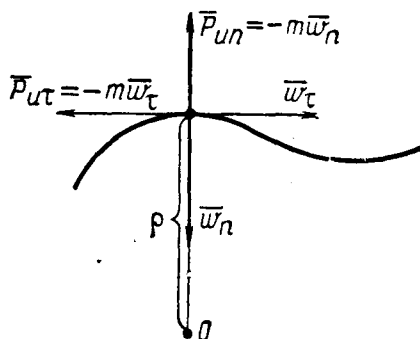


Рис. 25.2.

Модули касательной и нормальной сил инерции материальной точки будут:

$$\left. \begin{aligned} |P_{\text{ит}}| &= m \left| \frac{dv}{dt} \right|; \\ |P_{\text{ин}}| &= m \frac{v^2}{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (25.3)$$

Рассмотрим следующие частные случаи движения материальной точки.

Прямолинейное движение $\rho = \infty$, тогда $P_{\text{ин}} = 0$.

Равномерное движение по криволинейной траектории ($v_{\tau} = \text{const}$):

$$P_{\text{ин}} = \frac{v^2}{\rho}; \quad P_{\text{ит}} = 0.$$

Материальная точка принадлежит телу, которое вращается вокруг неподвижной оси. Расстояние материальной точки от оси вращения обозначим буквой R , тогда:

$$\left. \begin{aligned} |P_{\text{ит}}| &= |P_{\text{и}}^{\text{в}}| = m \left| \frac{dv}{dt} \right| = mR|\varepsilon|; \\ |P_{\text{ин}}| &= m \frac{v^2}{R} = mR\omega^2. \end{aligned} \right\} \quad (25.4)$$

В рассматриваемом случае $|P_{\text{ин}}|$ называют центробежной силой.

При составном (сложном) движении материальной точки, когда переносное движение произвольное:

$$\bar{P}_n = -m\bar{\omega}_e - m\bar{\omega}_r - m\bar{\omega}_k = \bar{P}_{ie} + \bar{P}_{ir} + \bar{P}_{ik}. \quad (25.5)$$

Соответствующие силы инерции называются: $\bar{P}_{ie} = -m\bar{\omega}_e$ — сила инерции переносного движения — переносная сила инерции, сила инерции относительного движения $\bar{P}_{ir} = -m\bar{\omega}_r$ и $\bar{P}_{ik} = -m\bar{\omega}_k$ — кориолисова сила инерции.

§ 131. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА ДЛЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Помимо методов решения задач динамики, рассмотренных ранее, ниже дан метод, предложенный отечественными учеными Я. Германом (1716 г.), Л. Эйлером (1737 г.) и французским ученым Даламбером (1743 г.), который и дал окончательную формулировку метода, получившего название принципа Даламбера.

Напомним, что материальная точка может быть как свободной, так и несвободной. В последнем случае на точку наложены связи, ограничивающие ее движение.

Исходя из второго закона Ньютона для несвободной материальной точки массой m уравнение движения будет

$$m\bar{\omega} = \bar{P} + \bar{R}, \quad (25.6)$$

где \bar{P} — равнодействующая активных сил, действующих на материальную точку;

\bar{R} — равнодействующая реакций связи.

Формулу (25.6) можно записать в виде $\bar{P} + \bar{R} + (-m\bar{\omega}) = 0$ или, учитывая (25.1),

$$\bar{P} + \bar{R} + \bar{P}_n = 0. \quad (25.7)$$

Равенство (25.7) выражает принцип Даламбера для несвободной материальной точки. По форме уравнение (25.7) является математическим аналогом уравнения равновесия трех сил \bar{P} , \bar{R} и \bar{P}_n .

Таким образом, в любой момент времени движения несвободной материальной точки действующие на нее активная сила \bar{P} и реакция связи \bar{R} , а также условно приложенная к точке ее сила инерции \bar{P}_n как бы уравниваются. В действительности точка движется и никакого равновесия нет. Принцип Даламбера позволяет уравнениям динамики придать форму уравнений равновесия, что в ряде случаев является удобным приемом, упрощающим решение задач динамики. Раздел механики, в котором при решении задач динамики используется принцип Даламбера, называется кинестатикой.

Пример. Судовой кран с помощью троса поднимает груз весом \bar{G} с постоянным ускорением $\bar{w} = \text{const}$. Определить натяжение N троса при вертикальном подъеме груза. Определить в данный момент времени зависимость между угловой скоростью ω крана при вращении его вокруг вертикальной оси и углом отклонения троса φ от вертикали, если длина троса (рис. 25.3) равна $l = \text{const}$.

Решение. Применяем принцип Даламбера к грузу, движущемуся равноускоренно, для чего прикладываем условно к нему силу $\bar{P}_и = -m\bar{w}$ (рис. 25.3, а).

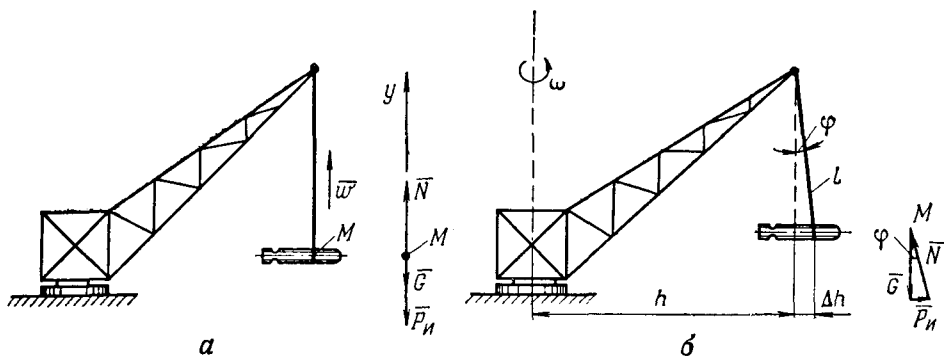


Рис. 25.3.

Составляем уравнение равновесия груза, принимая его за материальную точку в виде

$$\sum Y_i = N - m\bar{w} - G = 0, \text{ откуда } N = G \left(1 + \frac{\bar{w}}{g} \right) = GK_{\text{дин}},$$

где коэффициент $1 + \frac{\bar{w}}{g} = K_{\text{дин}}$ называется динамическим коэффициентом.

Составляем треугольник сил для груза, который принимаем за материальную точку, при повороте стрелы с угловой скоростью ω (рис. 25.3, б). Для этого откладываем в масштабе силу \bar{G} , затем проводим линии действия сил $\bar{P}_и$ и \bar{T} . Из треугольника сил следует, что $P_и = G \operatorname{tg} \varphi$. С другой стороны, $P_и = \frac{G}{g} \omega^2 (h + \Delta h)$. Учитывая, что $\Delta h = l \sin \varphi$, получаем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega^2}{g} (h + l \sin \varphi), \text{ откуда } \omega = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \varphi}{h + l \sin \varphi} g}.$$

Пример. Платформа с изделием (рис. 25.4) общим весом $G_0 = 100$ кН соединена с тележкой с помощью четырех пружинных амортизаторов, суммарная жесткость которых $c = 20$ кН/см = 2000 кН/м. Вес четырех колес $4G = 10$ кН. Платформа с изделием колеблется в вертикальной плоскости по закону $y = y_0 \sin kt$, где $y_0 = 0,02$ м, а частота собственных колебаний определяется по

формуле (19.15) $k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{cg}{G_0}}$.

Определить наибольшую Q_{max} и наименьшую Q_{min} величины силы давления на полотно дороги. Вес платформы и изделия распределен на амортизаторы поровну.

Решение. Платформу и изделие, движущиеся поступательно, принимаем за материальную точку, масса которой равна массе всей системы, сосредоточенной в центре масс. Применяем принцип Даламбера.

На материальную точку действуют сила тяжести \vec{G}_0 , реакция пружины \vec{R} и сила инерции $\vec{P}_и$, которую мы условно прикладываем к точке.

Определяем величину силы инерции. Учитывая, что $\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2y_0 \sin kt$, имеем

$$P_{и} = -m\ddot{y} = -m \frac{d^2y}{dt^2} = mk^2y_0 \sin kt,$$

где

$$k = \sqrt{\frac{cg}{G_0}} = \sqrt{\frac{2000 \cdot 9,81}{100}} \approx \sqrt{200} \text{ с}^{-1}.$$

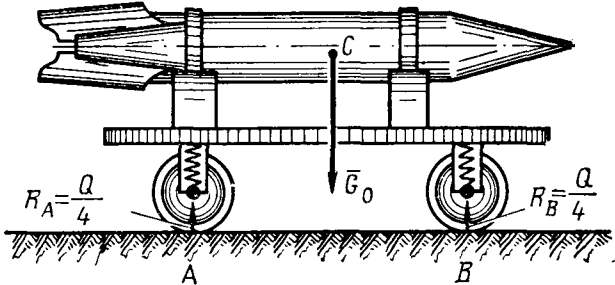


Рис. 25.4.

Модуль силы инерции будет иметь наибольшее значение при $\sin kt = \pm 1$, т. е. когда

$$kt_1 = \frac{\pi}{2} \left(t_1 = \frac{\pi}{2k} = \frac{\pi}{2\sqrt{200}} \approx 0,11 \text{ с} \right); \quad kt_2 = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3}{2} \pi \left(t_2 = 0,33 \text{ с} \right).$$

Условия равновесия в крайних положениях платформы будут

$$R - G_0 \pm P_{и} = 0.$$

В верхнем крайнем положении ускорение $\frac{d^2y}{dt^2}$ направлено вниз, а сила инерции вверх. Следовательно,

$$R - G_0 + P_{и} = 0, \text{ откуда } R = G_0 - P_{и} = G_0 - \frac{G_0}{g} k^2 y_0$$

или

$$R_{\min} = G_0 \left(1 - \frac{k^2 y_0}{g} \right) = 100 \left(1 - \frac{200 \cdot 0,02}{9,81} \right) = 59,3 \text{ кН}.$$

Соответственно в нижнем крайнем положении

$$R_{\max} = G_0 \left(1 + \frac{k^2 y_0}{g} \right) = 100 \left(1 + \frac{200 \cdot 0,02}{9,81} \right) = 140,7 \text{ кН}.$$

Эти силы и передаются на оси колес. Следовательно, силы, передаваемые на полотно дороги, будут:

$$\begin{aligned} Q_{\max} &= R_{\max} + 4G_1 = 140,7 + 10 = 150,7 \text{ кН}; \\ Q_{\min} &= R_{\min} + 4G_1 = 59,3 + 10 = 69,3 \text{ кН}. \end{aligned}$$

§ 132. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА ДЛЯ НЕСВОБОДНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим несвободную механическую систему, состоящую из n материальных точек массами m_1, m_2, \dots, m_n со стационарными связями. К каждой i -й точке такой системы применяем принцип освобожденности от связей. На точку действуют: равнодействующая задаваемых активных сил \bar{P}_i и равнодействующая сил реакций отбрасываемых связей \bar{R}_i .

Применяя принцип Даламбера к рассматриваемой материальной точке, можно записать

$$\bar{P}_i + \bar{R}_i + (-m_i \bar{w}_i) = 0. \quad (25.8)$$

Суммируем для всех точек системы

$$\sum_{i=1}^n \bar{P}_i + \sum_{i=1}^n \bar{R}_i + \sum_{i=1}^n \bar{P}_{ni} = 0. \quad (25.9)$$

Из равенства (25.9) следует, что геометрическая сумма главных векторов задаваемых сил ($\sum \bar{P}_i$), реакций связей ($\sum \bar{R}_i$) и сил инерции ($\sum_{i=1}^n \bar{P}_{ni}$) для всякой несвободной механической системы в любой момент времени равна нулю.

Выбираем неподвижный центр O и обозначим радиус-вектор каждой точки через \bar{r}_i . Тогда, умножая слева векторно каждое слагаемое равенства (25.9) на радиус-вектор \bar{r}_i и складывая, получаем

$$\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{P}_i + \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{R}_i + \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{P}_{ni} = 0. \quad (25.10)$$

Последнее равенство (25.10) показывает, что геометрическая сумма главных моментов задаваемых сил ($\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{P}_i$), сил реакций связи ($\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{R}_i$) и сил инерций ($\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{P}_{ni}$) для всякой несвободной системы в любой момент времени равна нулю.

Уравнения (25.8) и (25.10) выражают принцип Даламбера для несвободной механической системы.

Остановимся на вопросе приведения сил инерции твердого тела к простейшему виду.

Выбираем за центр приведения сил инерции центр масс системы. Тогда силы инерции приводятся к главному вектору \bar{R}_n , не зависящему от выбора центра приведения, и к глав-

ному моменту \bar{M}_n , зависящему от выбора центра приведения. При этом

$$\bar{R}_n = - \sum_{i=1}^n m_i \bar{\omega}_i = -M \bar{\omega}_c; \quad (25.11)$$

$$\bar{M}_{nc} = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times m_i \bar{\omega}_i, \quad (25.12)$$

где $\bar{\omega}_c$ — ускорение центра масс, M — масса всей системы.

Поступательное движение твердого тела. Ускорение каждой точки тела при поступательном движении геометрически равно ускорению центра масс. Следовательно,

$$\bar{R}_n = -M \bar{\omega}_c,$$

$$\bar{M}_{nc} = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times m_i \bar{\omega}_i = \sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_i \times \bar{\omega}_c = M \bar{r}_c \times \bar{\omega}_c = 0,$$

так как $\bar{r}_c = \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{M} = 0$ относительно центра масс отк. $M \bar{r}_c = 0$.

Вывод. При поступательном движении твердого тела силы инерции приводятся к равнодействующей, приложенной в центре масс, равной произведению массы тела на модуль ускорения его центра масс и направленной в сторону, противоположную ускорению $\bar{\omega}_c$.

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси симметрии. Рассмотрим вращение твердого тела, имеющего плоскость материальной симметрии, вокруг оси, проходящей через центр тяжести сечений и перпендикулярной плоскостям симметрии. Эта ось является также главной центральной осью инерции тела.

Главный вектор сил инерции. При вращении твердого тела ускорение центра масс $\bar{\omega}_c = 0$ (рис. 25.5) и, следовательно, главный вектор сил инерции $\bar{R}_n = -M \bar{\omega}_c = 0$.

Главный момент сил инерции. Рассмотрим точку M тела массой m_i , расстояние от которой до оси вращения обозначим буквой h_i . В соответствии с формулами (25.3) сила инерции может быть представлена состоящей из центробежной, равной $\bar{P}_{ni}^u = -m_i \bar{\omega}_i^u$, и вращательной (касательной), равной $\bar{P}_{ni}^b = -m_i \bar{\omega}_i^b$. Линия действия центробежной силы пересекает ось вращения. Следовательно, момент центробежных сил относительно оси вращения равен нулю.

Величина момента вращательной (касательной) силы инерции относительно оси вращения будет $M_{nz}^i = P_{ni}^b h_i = m_i \omega_i^b h_i = m_i |\varepsilon| h_i^2$.

Очевидно, для всех точек тела

$$M_{uz} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n m_i |\varepsilon| h_i^2 = |\varepsilon| \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n m_i h_i^2 = |\varepsilon| I_z,$$

где $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n m_i h_i^2 = I_z$ — момент инерции тела относительно оси вращения.

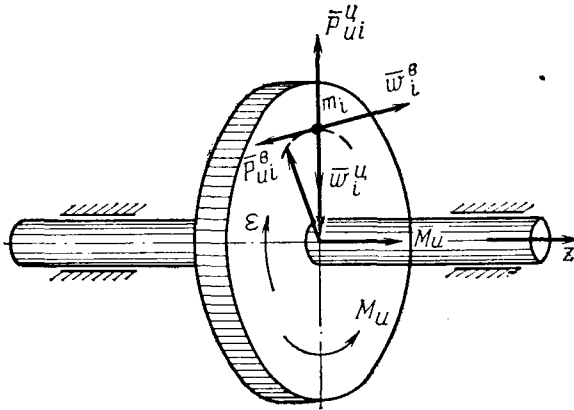


Рис. 25.5.

Вывод. Система сил инерции твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, которая является главной центральной осью инерции, приводится к главному моменту сил инерции, равному

$$\bar{M}_{uz} = -I_z \bar{\varepsilon}. \quad (25.13)$$

Плоскопараллельное движение твердого тела. Плоскопараллельное, или плоское, движение тела можно разложить на поступательное вместе с центром масс и вращательное вокруг оси, проходящей через центр масс s перпендикулярно плоскости симметрии. Тогда система сил инерции приводится к главному вектору, приложенному в центре масс тела, и главному моменту — паре сил, действующей в плоскости симметрии тела:

$$\bar{R}_n = -M \bar{w}_c; \quad \bar{M}_n = -I_{zc} \bar{\varepsilon}. \quad (25.14)$$

Пример. На однородные барабаны радиусом R и r , весом G_3 и G_4 , имеющие одну ось вращения, подвешены на двух нерастяжимых тросах соответственно весом G_1 и G_2 (рис. 25.6). Пренебрегая массами тросов, а также трением, определить угловое ускорение барабанов, которые вращаются под действием грузов. Определить натяжение N и напряжения σ , возникающие в тросах, если площади сечения их одинаковы и равны F .

Решение. Несвободная механическая система состоит из грузов G_1 и G_2 троса и барабанов. Связью является ось барабана. На систему действуют активные силы \bar{G}_1 и \bar{G}_2 и реакции связи X_0 и Y_0 . Допустим $G_1 > G_2$.

Решаем задачу принципом Даламбера. Прикладываем условно к материальным точкам системы силы инерции и рассматриваем условия равновесия системы.

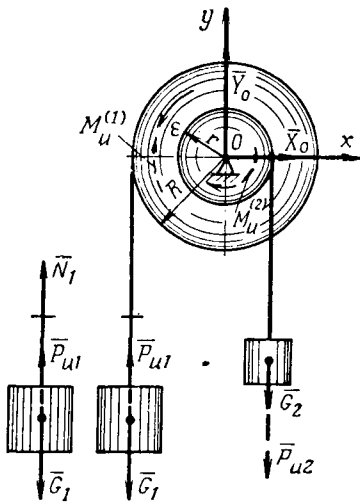


Рис. 25.6.

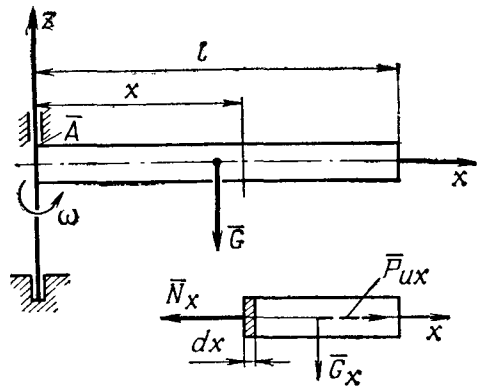


Рис. 25.7.

Из трех уравнений равновесия плоской системы сил для определения ϵ потребуется лишь одно, а именно:

$$\sum_{i=1}^n m_0 (\bar{P}_i) = G_1 R - P_{и1} R - G_2 r - P_{и2} r - M_{и1}^1 - M_{и2}^2 = 0,$$

где $P_{и1} = \frac{G_1}{g} \epsilon R$; $P_{и2} = \frac{G_2}{g} \epsilon r$; $M_{и1}^1 = I_3 \epsilon = \frac{G_3 R^2}{2g} \epsilon$; $M_{и2}^2 = I_4 \epsilon = \frac{G_4 r^2}{g^2} \epsilon$.

Пренебрегая скольжением троса по барабану и деформацией тросов, ускорения грузов $\bar{\omega}$ будут равны вращательному ускорению ободов соответствующих барабанов.

Преобразовываем уравнение равновесия

$$G_1 R - \frac{G_1}{g} \epsilon R^2 - G_2 r - \frac{G_2}{g} \epsilon r^2 - \frac{G_3 R^2}{2g} \epsilon - \frac{G_4 r^2}{2g} \epsilon = 0.$$

Определяем угловое ускорение

$$\epsilon = \frac{(G_1 R - G_2 r) g}{\left(G_1 + \frac{G_3}{2}\right) R^2 + \left(G_2 + \frac{G_4}{2}\right) r^2}.$$

При $G_1 R < G_2 r$ ускорение и вращение цилиндров будут происходить в направлении, противоположном принятому (по ходу часовой стрелки).

Находим нормальное напряжение по формуле $\sigma = \frac{N}{F}$, где N — натяжение троса. Так, для левого троса N определяется из условия равновесия груза G_1

$$P_{и1} - G_1 + N_1 = 0, \text{ откуда } N_1 = G_1 - P_{и1} = G_1 - \frac{G_1}{g} \omega_1 = G_1 \left(1 - \frac{\omega_1}{g}\right).$$

Учитывая, что $\omega_1 = \epsilon R$, получаем:

$$N_1 = G_1 \left(1 - \frac{\epsilon R}{g}\right) = G_1 \left[1 - \frac{(G_1 R - G_2 r) R}{\left(G_1 + \frac{G_3}{2}\right) R^2 + \left(G_2 + \frac{G_4}{2}\right) r^2}\right]$$

$$\sigma_1 = \frac{G_1}{F} \frac{\frac{G_3}{2} R^2 + G_2 r (R + r) + \frac{G_4}{2} r^2}{\left(G_1 + \frac{G_3}{2}\right) R^2 + \left(G_3 + \frac{G_4}{2}\right) r^2}.$$

Аналогично определяется нормальное напряжение в правом тросе.

Пример. Определить предельное число оборотов стержня постоянного сечения, вращающегося в горизонтальной плоскости, если его длина l , вес единицы объема γ и допускаемое напряжение $[\sigma]$.

Решение. Определим внутреннюю силу N_x , действующую в сечении, имеющем координату x . Для этого мысленно рассечем стержень в этом сечении и рассмотрим равновесие правой части (рис. 25.7).

На правую отсеченную часть действуют N_x , G_x и $P_{иx}$, величина которой может быть определена из равенства

$$P_{иx} = \int_v \omega^2 x dm = \int_x^l \frac{\gamma F dx}{g} \omega^2 x = \frac{\gamma F \omega^2}{g} \int_x^l x dx = \frac{\gamma F \omega^2}{g} (l^2 - x^2),$$

где $dm = \frac{\gamma F dx}{g}$ — элементарная масса, а $\omega^2 x$ — ее центростремительное ускорение.

Из условия равновесия отсеченной части в проекции на ось следует, что

$$\sum X_i = -N_x + P_{иx} = 0$$

или

$$N_x = \frac{\gamma F \omega^2}{2g} (l^2 - x^2).$$

Определяем нормальные напряжения в сечении

$$\sigma_x = \frac{N_x}{F} = \frac{\gamma \omega^2}{2g} (l^2 - x^2),$$

т. е. в формулу, определяющую напряжение, не входит F — площадь поперечного сечения стержня.

Наибольшее напряжение при $x=0$ будет

$$\sigma_{\max} = \frac{\gamma \omega^2 l^2}{2g}.$$

Записываем условие прочности $\sigma \leq [\sigma]_p$ в виде $\frac{\gamma \omega^2 l^2}{2g} \leq [\sigma]_p$,

откуда допускаемая угловая скорость

$$[\omega] \leq \sqrt{\frac{2g [\sigma]_p}{\gamma l^2}} \text{ рад/с}$$

или

$$n \leq \frac{30}{\pi l} \sqrt{\frac{2g [\sigma]_p}{\gamma}} \text{ об/мин.} \quad (25.15)$$

При учете изгиба стержня силой тяжести при $\omega = \text{const}$ наибольшее напряжение будет в верхней точке A стержня, где нормальное напряжение от изгиба будет складываться с нормальным напряжением от осевого растяжения:

$$\sigma = \sigma_{и} + \sigma_p = \frac{G l/2}{W_z} + \gamma \frac{\omega^2 l^2}{2g} \leq [\sigma],$$

где W_z — осевой момент сопротивления сечения стержня.

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

§ 133. КЛАССИФИКАЦИЯ СВЯЗЕЙ

Напомним, что материальная точка называется свободной или без связей, если она может получить некоторое достаточно малое перемещение в любом направлении.

Система, состоящая из свободных материальных точек, называется свободной. Материальная точка или механическая система называется несвободной или со связями, если движение точек ограничивается наперед заданными геометрическими или кинематическими зависимостями, не зависящими ни от начальных условий, ни от действующих сил (вращение вала турбины в подшипниках, движение поршня кривошипно-шатунного механизма и т. д.).

Ограничения, наложенные на движение материальной точки или системы и осуществляемые другими материальными объектами, в результате которых система становится несвободной, называются связями. Математические зависимости, характеризующие осуществляемые ограничения, называются уравнениями связи. Так, для точки $A(x_1, y_1)$ кривошипа уравнением связи будет (рис. 26.6) $x_1^2 + y_1^2 = r^2$, а для точки $B(x_2, y_2)$ звена AB $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l^2$, где l — длина шатуна AB . Указанные связи являются голономными (геометрическими).

Таким образом, голономные связи налагают ограничения только на положения материальных точек и, следовательно, выражаются конечными соотношениями между координатами точек системы. В уравнение голономной связи могут входить и производные от координат. Однако в этом случае дифференциальные уравнения, выражающие эту связь, могут быть точно проинтегрированы.

В уравнения связи могут входить скорость и время. Так, для точки A катящегося цилиндра можно записать (рис. 26.1)

$$\dot{x} - r\dot{\varphi} = 0 \text{ или } f(\dot{x}, \dot{\varphi}) = 0.$$

Полученное уравнение является кинематическим уравнением связи.

Связи, налагающие ограничения не только на координаты точек системы, но и на их производные по времени и которые аналитически выражаются соотношениями, содержащими не только координаты точек, но и их производные, причем эти соотношения не могут быть проинтегрированы, называются неголономными или неинтегрируемыми.

Если связь допускает перемещения материальной точки или механической системы, в результате которых эта точка или система освобождается от связи, такая связь называется неудерживающей или односторонней (рис. 26.2).

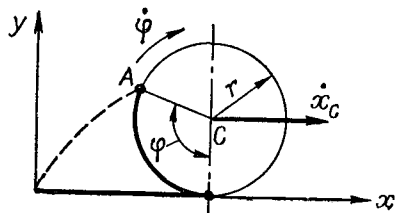


Рис. 26.1.

Неудерживающая (односторонняя) связь задается неравенством. Так, для груза, подвешенного на тросе длиной, равной l , односторонняя связь записывается в виде $x^2 + y^2 + z^2 \leq l^2$.

Связь, представленная на рис. 26.2, б, является удерживающей или двусторонней. Она действует во все время движения то-

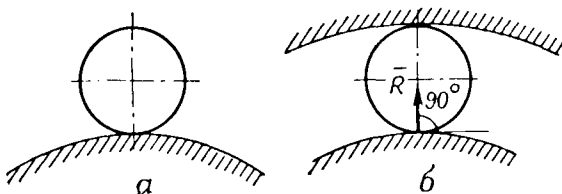


Рис. 26.2.

чек системы. Точки системы не могут покинуть эту связь при сообщении им элементарного перемещения. Удерживающие связи задаются равенствами.

Связь может быть стационарной и нестационарной.

Стационарной называется связь, которая явным образом не зависит от времени, т. е. в аналитические выражения которой через координаты в основной системе отсчета время не входит явно, в противном случае связь называется нестационарной. Так, для математического маятника переменной длины связь вида $x^2 + y^2 = [l(t)]^2$ является нестационарной.

§ 134. ВОЗМОЖНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Рассмотрим, например, несвободную механическую систему, представленную на рис. 26.3. Не нарушая связей, выведем систему из данного положения, сообщив ее точкам бесконечно малые перемещения, совместимые со связями; для точки A это будет дуга $r d\alpha$,

а для точки B — отрезок прямой $BB_1 = \delta S_B$. Эти перемещения и будут возможными. Вариацией δx или δS_B называется приращение функции, обусловленное изменением вида самой функции при неизменном аргументе (в данном примере при фиксированном моменте времени t).

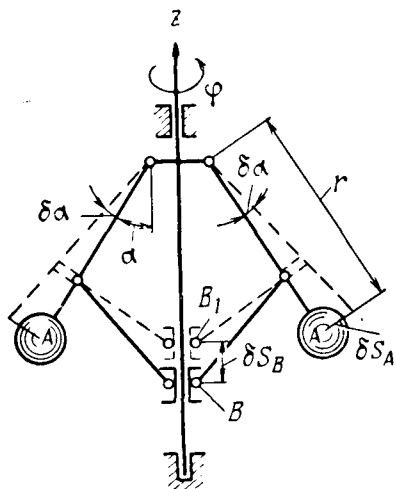


Рис. 26.3.

Например, дано $y = f(x)$ (рис. 26.4). Тогда вариацией δy будет $\delta y = f_2(x) - f_1(x)$, в то время как дифференциал функции, равный $dy = f'(x)dx$, является главной частью приращения функции за счет изменения (приращения) аргумента. В качестве пояснения сказанного на рис. 26.4 представлены отрезки, численно равные δy и dy . Правила варьирования функции по форме подобны соответствующим правилам дифференцирования.

Так, например,

$$\delta y = \delta (y_1 + y_2) = \delta y_1 + \delta y_2;$$

$$\delta (y_1 \cdot y_2) = \delta y_1 \cdot y_2 + y_1 \delta y_2 \text{ и т. д.}$$

В случае сложной функции

$$\delta z = \delta (a \cos by) = -ab \sin by \delta y.$$

В число возможных перемещений точек системы будем включать и их действительные (осуществимые) перемещения. Возмож-

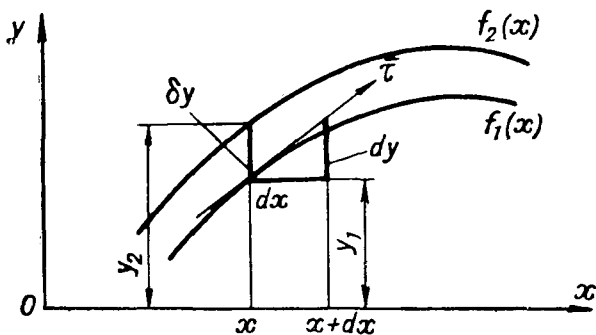


Рис. 26.4.

ные перемещения точек системы будем полагать величинами первого порядка малости. Поэтому элементарные криволинейные перемещения точек заменяем прямолинейными — хордами. Обозначим возможное перемещение точки системы через δr_i с проекциями δx_i ; δy_i ; δz_i . Таким образом, возможными перемеще-

ниями называется совокупность векторных величин, равные одновременным воображаемым бесконечно малым перемещениям точек несвободной механической системы, допускаемых удерживающими связями, наложенными на систему в данный момент времени (т. е. при фиксированном аргументе).

Обозначим реакцию связи, приложенной к i -й точке системы, через \bar{R}_i . Связи называют идеальными, если сумма работ их реакций на возможных перемещениях системы равна нулю, т. е. когда

$$\sum \delta A_i = \sum \bar{R}_i \delta \bar{r}_i = \sum R_i \delta s_i \cos(\bar{R}_i \delta \bar{r}_i) = 0. \quad (26.2)$$

Примером такой связи могут служить абсолютно гладкие поверхности (рис. 26.2, *a*), вдоль которых скользит тело, трение отсутствует и работа нормальной реакции на элементарном перемещении равна нулю. В дальнейшем мы будем рассматривать только идеальные двусторонние, стационарные, голономные связи.

Числом степеней свободы механической системы, все связи которой являются идеальными двусторонними, стационарными, голономными, называются число независимых параметров, заданием которых однозначно определяется положение всех точек механической системы. Эти независимые параметры называются обобщенными координатами. Для механических систем с указанными выше связями число обобщенных координат равно числу степеней свободы. Так, положение всех точек кривошипно-шатунного механизма будет определено заданием одной координаты, например угла φ поворота кривошипа. Механизм имеет одну степень свободы ($m=1$), а $q_1=\varphi$ — его обобщенная координата.

Положение точек центробежного регулятора будет задано, если будут известны угловая координата φ и угол α , образованный стержнем регулятора с вертикалью (рис. 26.3). Регулятор имеет две степени свободы ($m=2$), положение всех его точек определяется двумя обобщенными координатами: $q_1=\varphi$ и $q_2=\alpha$. Тело, имеющее одну закрепленную точку, совершает сферическое движение, оно имеет три степени свободы ($m=3$), обобщенными координатами являются углы Эйлера. Свободная материальная точка, движущаяся в пространстве, имеет три степени свободы. Свободное тело имеет шесть степеней свободы ($m=6$).

§ 135. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Рассмотрим i -ю точку несвободной механической системы, находящейся в состоянии покоя. К ней приложены равнодействующие задаваемых сил \bar{P}_i и реакций связей \bar{R}_i . Учитывая, что каждая i -я точка механической системы находится в состоянии покоя, для нее

$$\bar{P}_i + \bar{R}_i = 0. \quad (26.3)$$

Мысленно дадим возможные перемещения $\delta\vec{r}_i$ (рис. 26.5) каждой точке системы и определим работу сил, приложенных к этим точкам. Для этого каждое слагаемое равенства скалярно умножим на $\delta\vec{r}_i$:

$$\vec{P}_i \cdot \delta\vec{r}_i + \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0.$$

Суммируя все уравнения, составленные для каждой из n точек системы, получим

$$\sum_{i=1}^n \delta A_i = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^n \vec{R}_i \delta\vec{r}_i = 0. \quad (26.4)$$

Для идеальных двусторонних связей сумма работ реакций связей на возможных перемещениях (26.2) равна нулю, т. е.

$$\sum_{i=1}^n \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0. \quad \text{Следовательно,}$$

$$\sum_{i=1}^n \delta A_i = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0. \quad (26.5)$$

Если силы, приложенные к точкам механической системы с идеальными двусторонними связями, в каком-либо положении системы уравниваются, то сумма работ задаваемых сил на любом возможном перемещении системы из данного положения равна нулю. Справедливо и обратное заключение, которое выражает принцип возможных перемещений: условием равновесия системы с идеальными голономными двусторонними стационарными связями является равенство нулю алгебраической суммы элементарных работ всех активных сил, приложенных к точкам системы, на любом возможном перемещении системы. Уравнение (26.5) в проекциях на оси прямоугольной системы координат записывается в виде

$$\sum_{i=1}^n X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i = 0 \quad (26.6)$$

или в виде

$$\sum_{i=1}^n P_i \delta S_i \cos(\vec{P}_i, \hat{\delta\vec{r}}_i) = 0, \quad (26.7)$$

где $|\delta\vec{r}_i| = \delta S_i$.

Если обозначить угол между \vec{P}_i и $\delta\vec{r}_i$ через α_i , то

$$\sum_{i=1}^n P_i \delta S_i \cos \alpha_i = 0. \quad (26.8)$$

Принцип возможных перемещений позволяет составлять условия равновесия для любой механической системы, учитывая только задаваемые силы и исключая из рассмотрения все реакции связи, которые принимаются идеальными.

В статике неизвестные определялись из условий равновесия, которые необходимо было составлять для каждой точки системы, т. е. требовалось решать систему уравнений. Решая задачи статики принципом возможных перемещений, каждая из неизвестных определяется непосредственно из уравнений работ, что значительно упрощает решение.

В случае необходимости определения реакций при использовании принципа возможных перемещений следует отбросить соответствующую связь, заменить ее действие силой — реакцией связи и включить ее условно в число активных сил, совершающих работу на соответствующем возможном перемещении.

При решении задач с помощью принципа возможных перемещений можно пользоваться аналитическим или графоаналитическим методом.

Аналитический метод. Рекомендуется задачу решать в такой последовательности:

— изобразить механическую систему, заданные силы, систему неподвижных координат; при этом в случае неидеальных связей приложится дополнительно реакцию (например, силу трения); если требуется определить реакцию идеальной связи, мысленно отбросить связь, заменив ее соответствующей реакцией связи;

— записать координаты точек приложения сил, выражая их через один независимый параметр; дать возможное приращение независимой координате и путем вариаций определить δx , δy , δz ;

— вычислить сумму работ всех сил на соответствующих возможных перемещениях точек приложения их;

— приравнять ее нулю и определить неизвестные; если выразить координаты x , y и z сразу через один параметр не удастся, можно выразить их через несколько, а затем связать их между собой.

Если система имеет несколько степеней свободы, нужно дать приращение только одной независимой переменной, считая возможные перемещения, соответствующие другим степеням свободы, равными нулю. Составить сумму работ всех активных задаваемых сил на возможных перемещениях и приравнять ее нулю. Затем нужно дать возможное приращение другой независимой переменной и вновь составить сумму работ на полученных возможных перемещениях, приравняв ее нулю, и т. д. Решить полученную систему уравнений и определить неизвестные.

Пример. Установить зависимость между величиной силы P , действующей на поршень, и моментом $M = Tr$, действующим на кривошип механизма, размеры которого даны на рис. 26.6, при равновесии механизма.

Решение. Запишем уравнение (26.5) применительно к рассматриваемому случаю $\sum \delta A = T \cdot \delta S_A \cos 180^\circ + P \delta S_B \cos 0 = 0$. Учитывая, что $\delta S_A = r d\varphi$, имеем

$$\sum \delta A = -M \delta \varphi + P \delta S_B = 0. \quad (*)$$

Устанавливаем из чертежа, что $S_B = l + r - x_B$, т. е.

$$S_B = r + l - (r \cos \varphi + l \cos \beta) = r(1 - \cos \varphi) + l(1 - \cos \beta).$$

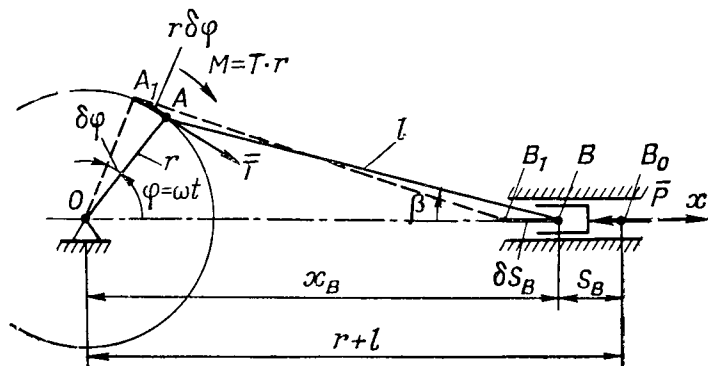


Рис. 26.6.

Учитывая, что $l \sin \beta = r \sin \varphi$ и $\frac{r}{l} = \lambda$, находим

$$S_B = r(1 - \cos \varphi) + l(1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}).$$

Определяем δS_B в соответствии с указаниями на стр. 427:

$$\delta S_B = r \sin \varphi \delta \varphi + l \frac{\lambda^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}} \delta \varphi = r \sin \varphi \left[1 + \frac{\lambda \cos \varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}} \right] \delta \varphi.$$

Подставляем полученное значение δS_B в (*) и после сокращения на $\delta \varphi$ получаем

$$M = Pr \sin \varphi \left[1 + \frac{\lambda \cos \varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}} \right]$$

или

$$T = P \sin \varphi \left[1 + \frac{\lambda \cos \varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}} \right].$$

Графоаналитический метод. Решая задачи этим методом, следует:

— изобразить схему механизма и действующие заданные силы, сообщить точкам системы возможные перемещения и изобразить их на чертеже;

— если система имеет число степеней свободы больше одной, сообщить поочередно одно из независимых перемещений;

— записать уравнение (26.5), в котором возможные перемещения точек выразить с помощью чертежа через перемещение одной из них; после преобразований получить уравнения для определения неизвестных.

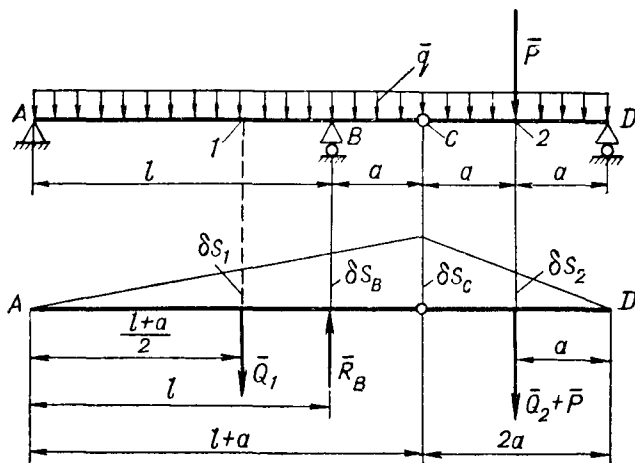


Рис. 26.7.

Пример. Балка состоит из двух частей, соединенных в точке C шарнирно (рис. 26.7). Определить силу давления на опору B , полагая, что вес частей балки распределен по длине равномерно. Размеры балки даны на рис. 26.7.

Решение. Отбрасываем мысленно опору B и заменяем ее действие на балку реакцией R_B , которую в дальнейшем условно считаем активной силой.

Сообщаем системе возможные перемещения. Записываем уравнение (26.7), учитывая, что равнодействующие сил тяжести частей балки приложены посредине соответствующих участков:

$$-Q_1 \delta S_1 + R_B \delta S_B - (Q_2 + P) \delta S_2 = 0. \quad (**)$$

Из подобия треугольников следует, что $\delta S_1 = \frac{\delta S_C}{2}$; $\delta S_B = \delta S_C \frac{l}{l+a}$; $\delta S_2 = \frac{\delta S_C}{2}$.

Подставляем в уравнение (**) полученные значения возможных перемещений

$$-Q_1 \frac{\delta S_C}{2} + R_B \frac{l}{l+a} \delta S_C - (Q_2 + P) \frac{\delta S_C}{2} = 0,$$

откуда

$$R_B = \frac{Q_1 + (Q_2 + P)}{2} \cdot \frac{l+a}{l}.$$

Учитывая, что $Q_1 = q(l+a)$; $Q_2 = 2qa$, получаем

$$R_B = \frac{ql + 3qa + P}{2} \cdot \frac{l+a}{l}.$$

Пусть возможные перемещения совершаются за время δt . Отнесем возможные перемещения ко времени, в течение которого они совершаются. Тогда $\frac{\delta \bar{r}_i}{\delta t} = \bar{v}_i$, где \bar{v}_i — возможная (виртуальная) скорость i -й точки. Принцип возможных скоростей для системы с идеальными двусторонними стационарными связями можно записать в виде уравнений:

$$\sum_{i=1}^n \bar{P}_i \cdot \bar{v}_i = 0 \quad (26.9)$$

или

$$\sum_{i=1}^n P_i v_i \cos(\bar{P}_i, \hat{\bar{v}}_i) = 0. \quad (26.10)$$

Проф. Н. Е. Жуковский для решения уравнения (26.10) предложил использовать план скоростей, т. е. решить задачу графоаналитически. Пусть в i -й точке механизма приложена задаваемая сила \bar{P}_i . Строим план скоростей механизма, на котором (рис. 26.8)

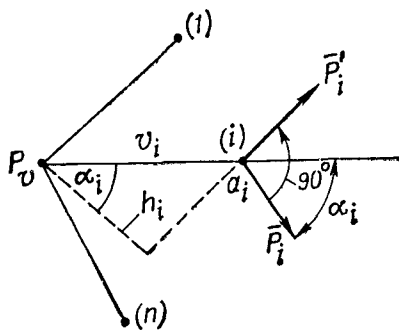


Рис. 26.8.

обозначим p_v — полюс плана скоростей, $p_v a_i$ — отрезок, изображающий в масштабе величину скорости \bar{v}_i . Силу \bar{P}_i , приложенную в i -й точке механизма, на плане скоростей, прикладывая к точке i плана, повернем на 90° (например, против хода часовой стрелки) и обозначим \bar{P}'_i . Тогда $P_i v_i \cos \alpha_i = P'_i h_i$ является моментом силы \bar{P}'_i , приложенной в точке i плана скоростей, относительно полюса p_v . Суммируя, для всех точек механизма получим уравнение (26.10). Таким образом, условия равновесия механизма, находящегося под действием некоторой системы задаваемых сил, эквивалентны условиям равновесия плана скоростей. При этом план скоростей должен быть рассмотрен как рычаг с точкой опоры в полюсе, который находится в равновесии под действием сил, приложенных в соответствующих точках плана скоростей, но повернутых на 90° к заданной системе сил. При построениях часто вместо сил поворачивают против хода часовой стрелки весь план скоростей; тогда направления сил, приложенных в точках механизма и в соответствующих точках плана скоростей, совпадают. Построе-

ние рычага Н. Е. Жуковского рассмотрим на примере кривошипно-шатунного механизма.

Пример. Определить с помощью рычага Н. Е. Жуковского (рис. 26.9) силу \bar{P}_{yp} , называемую уравновешивающей, приложенную в точке А кривошипа, если заданы сила \bar{P} , действующая на поршень линия действия \bar{P}_{yp} , размеры механизма и угловая скорость ω кривошипа ($\omega = \text{const}$).

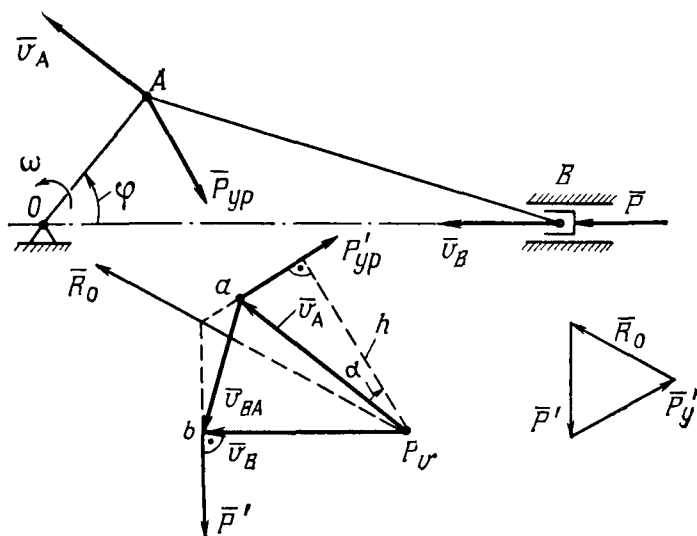


Рис. 26.9.

Решение. Изображаем схему механизма в масштабе. Наносим векторы \bar{P} , \bar{v}_A и \bar{P}_{yp} . Числовое значение последнего следует определить.

Строим план скоростей в удобном масштабе.

Прикладываем в точках a и b плана скоростей силы \bar{P}' и \bar{P}'_{yp} , повернутые на 90° против хода часовой стрелки по отношению к \bar{P} и \bar{P}_{yp} .

Составляем уравнение равновесия рычага Н. Е. Жуковского, учитывая, что $P = P'$ и $P_{yp} = P'_{yp}$:

$$P \cdot |p_v b| - P_{yp} h = 0,$$

откуда

$$P_{yp} = P \frac{|p_v b|}{h}.$$

где величины $|p_v b|$ и h можно взять непосредственно из чертежа, изображающего план скоростей.

Отметим, что реакция опоры \bar{R}_0 проходит через точку пересечения линий действия сил \bar{P}' и \bar{P}'_{yp} и через полюс p_v . Для определения R'_0 можно использовать треугольник сил (рис. 26.9).

При решении поставленной задачи можно, как было указано выше, повернуть на 90° весь план скоростей вокруг полюса, сохраняя неизменным направление сил.

Выше были рассмотрены два принципа механики: принцип возможных перемещений, который дает общий метод решения задач статики, и принцип Даламбера, который позволяет придать уравнениям динамики форму уравнений равновесия, т. е. использовать математический аналог.

Используем оба принципа для решения задач динамики. Пусть движущаяся система с идеальными двусторонними связями состоит из n материальных точек. На i -ю точку системы, ускорение которой $\bar{\omega}_i$, действуют равнодействующая задаваемых сил \bar{P}_i и равнодействующая реакций связи \bar{R}_i . В соответствии с принципом Даламбера условно к рассматриваемой точке прикладываем силу инерции $\bar{P}_{ni} = -m_i \bar{\omega}_i$. Применяя далее принцип возможных перемещений, можно записать

$$\begin{aligned} \delta A = \sum_{i=1}^n (\bar{P}_i + \bar{R}_i + \bar{P}_{ni}) \cdot \delta \bar{r}_i = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \delta \bar{r}_i + \\ + \sum_{i=1}^n \bar{R}_i \cdot \delta \bar{r}_i + \sum_{i=1}^n \bar{P}_{ni} \cdot \delta \bar{r}_i = 0. \end{aligned} \quad (26.11)$$

Учитывая, что для идеальных связей $\sum_{i=1}^n \bar{R}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0$, равенство (26.11) можно переписать в виде

$$\delta A = \sum_{i=1}^n (\bar{P}_i + \bar{P}_{ni}) \cdot \delta \bar{r}_i = \sum_{i=1}^n (\bar{P}_i - m_i \bar{\omega}_i) \cdot \delta \bar{r}_i = 0 \quad (26.12)$$

или в проекциях на оси неподвижной прямоугольной системы координат

$$\sum_{i=1}^n (X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + (Y_i - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + (Z_i - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i = 0. \quad (26.13)$$

В случае движения механической системы, на которую наложены идеальные связи, сумма элементарных работ, задаваемых и условно приложенных к ней сил инерции, на любом возможном перемещении системы равна нулю.

С помощью общих уравнений динамики можно определить движение механической системы, не определяя реакций связей. Последние могут быть определены после того, как будет установлен закон движения точек системы. При наличии трения следует добавлять к работе задаваемых сил работу силы трения на соответствующем возможном перемещении. В частном случае, когда система находится в равновесии ($\bar{\omega} = 0$), равенство (26.13) приводится к (26.6).

При вычислении суммы элементарных работ сил инерции при движении твердого тела следует пользоваться формулами:

— при поступательном движении $\delta A_{и} = \overline{R}_{и} \cdot \delta \vec{r}$;

— при вращательном движении $\delta A_{и} = M_{из} \cdot \delta \varphi$;

— при плоскопараллельном движении $\delta A_{и} = \overline{R}_{ис} \cdot \delta \vec{r}_c + M_{изc} \delta \varphi$,

где $\overline{R}_{и}$ — равнодействующая сил инерции;

$M_{из}$ — главный момент сил инерции относительно неподвижной оси вращения z ;

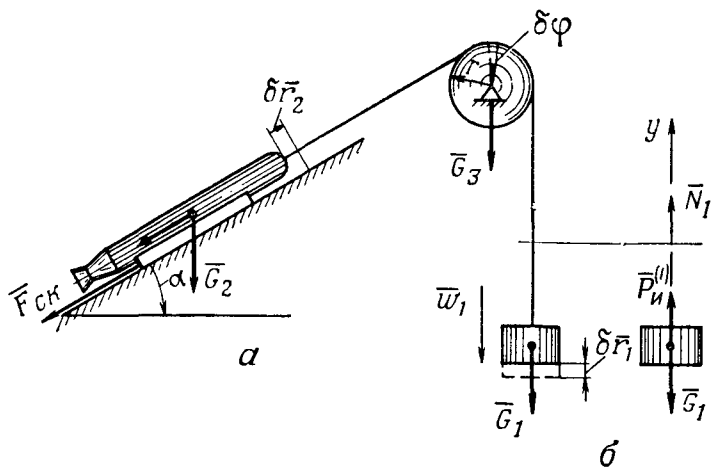


Рис. 26.10.

$\overline{R}_{ис}$ — главный вектор сил инерции, условно приложенных в центре масс, $\overline{R}_{ис} = -M\overline{w}_c$;

$M_{изc}$ — главный момент сил инерции относительно оси z_c , проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения тела.

Пример. Определить ускорения поднимаемого изделия, противовеса грузозачного устройства, натяжение троса противовеса и напряжения в нем (рис. 26.10), если заданы веса G_1 , G_2 и G_3 и известно, что блок — однородный диск радиусом r . Принять, что коэффициент трения скольжения $f_{ск}$ известен. Растяжением троса при определении ускорения пренебречь.

Решение. Система имеет одну степень свободы.

Устанавливаем, что активными заданными силами являются G_1 , G_2 и G_3 .

Учитываем, что между изделием и плоскостью действует сила трения скольжения $F_{ск}$.

Применяем принцип Даламбера. Принимаем, что противовес G_1 опускается с ускорением \overline{w}_1 , а тело G_2 поднимается вдоль наклонной плоскости с ускорением \overline{w}_2 , при этом $|\overline{w}_1| = |\overline{w}_2| = w$. Тогда силы инерции будут равны:

$$\overline{P}_{и1} = -\frac{G_1}{g} \overline{w}_1; \overline{P}_{и2} = -\frac{G_2}{g} \overline{w}_2; \overline{P}_{и3} = 0.$$

Главный момент сил инерции блока относительно оси вращения

$$M_{и2} = -I_2 \varepsilon = -\frac{G_3}{g} \frac{r^2}{2} \varepsilon = -\frac{G_3}{g} \frac{r^2}{2} \frac{w}{r}.$$

Дадим возможное перемещение δr_1 грузу G_1 . Трос принимаем нерастяжимым, скольжение троса по блоку отсутствует. Следовательно, $\delta r_1 = r \delta \varphi$.

Составляем общее уравнение динамики

$$\delta A = \left(G_1 - \frac{G_1}{g} w \right) \delta r_1 - \left(G_2 \sin \alpha + \frac{G_2}{g} w \right) \delta r_2 - F_{ск} \delta r_2 - \frac{G_3}{g} \cdot \frac{r^2}{2} \cdot \frac{w}{r} \delta \varphi = 0,$$

где $\delta r_1 = \delta r_2 = r \delta \varphi$. После сокращений, учитывая, что $F_{ск} = f_{ск} N = f_{ск} G_2 \cos \alpha$, определяем $w = 2g \frac{G_1 - G_2 (\sin \alpha + f_{ск} \cos \alpha)}{2(G_1 + G_2) + G_3}$. Условием того, что $w > 0$, является $G_1 > G_2 (\sin \alpha + f_{ск} \cos \alpha)$.

Нормальные силы, равные натяжению троса, определяются методом сечений. Так, условие равновесия отсеченной части, включающей противовес G_1 (рис. 26.10, б), будет

$$\sum Y_i = N_1 + m_1 w - G_1 = 0, \text{ откуда } N_1 = G_1 - m_1 w = G_1 \left(1 - \frac{w}{g} \right).$$

После подстановки значения w и упрощений получим

$$N_1 = \frac{G_3 + 2G_2(1 - \sin \alpha - f_{ск} \cos \alpha)}{2(G_1 + G_2) + G_3} G_1.$$

Следовательно,

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F} = \frac{G_1}{F} \frac{G_3 + 2G_2(1 - \sin \alpha - f_{ск} \cos \alpha)}{2(G_1 + G_2) + G_3}.$$

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

§ 138. ОБОБЩЕННЫЕ КООРДИНАТЫ И ОБОБЩЕННЫЕ СКОРОСТИ

Обобщенными координатами мы называли независимые параметры, вполне и однозначно определяющие положение всех точек системы в произвольно выбранный момент времени. Обобщенными координатами могут быть приняты в кривошипно-шатунном механизме одна, например угол φ поворота кривошипа, при плоскопараллельном движении твердого тела — три: две координаты полюса x_0, y_0 и угол поворота φ фигуры вокруг полюса, и т. д.

Обозначим обобщенную координату буквой q . Положение i -й точки механической системы в любой момент времени однозначно определяется, с одной стороны, координатами x_i, y_i, z_i , с другой — обобщенными координатами. Поэтому координаты x_i, y_i, z_i являются функциями обобщенных координат:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2 \dots q_\kappa); \\ y_i &= y_i(q_1, q_2 \dots q_\kappa); \\ z_i &= z_i(q_1, q_2 \dots q_\kappa); \\ \bar{r}_i &= \bar{r}_i(q_1, q_2 \dots q_\kappa), \end{aligned} \right\} \quad (27.1)$$

где $\kappa = 1, 2, \dots, m$ — число обобщенных координат;
 $i = 1, 2, \dots, n$ — число точек системы и $3n \geq m$.

Вектор скорости

$$\bar{v}_i = \frac{d\bar{r}_i}{dt} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m} \dot{q}_m, \quad (27.2)$$

где $\dot{q}_\kappa = \frac{dq_\kappa}{dt}$ называют обобщенными скоростями.

Из равенства (27.2) следует, что скорость является линейной функцией обобщенных скоростей и, следовательно,

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_\kappa} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_\kappa}. \quad (27.3)$$

§ 139. ОБОБЩЕННЫЕ СИЛЫ

Каждой обобщенной координате соответствует определенная обобщенная сила. Пусть система состоит из n материальных точек и имеет m степеней свободы. Запишем элементарную работу задаваемых сил \bar{P}_i на возможных перемещениях $\delta\bar{r}_i$

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i \cdot \delta\bar{r}_i, \quad (27.4)$$

где

$$\delta\bar{r}_i = \frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_m} \delta q_m = \sum_{k=1}^m \frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k.$$

Следовательно,

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i \cdot \delta\bar{r}_i = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i \cdot \sum_{k=1}^m \frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad (27.5)$$

или, меняя последовательность суммирования,

$$\delta A = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \bar{P}_i \cdot \frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k.$$

Обозначим

$$\sum_{i=1}^n \bar{P}_i \cdot \frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_k} = Q_k. \quad (27.6)$$

Тогда

$$\delta A = \sum_{k=1}^m Q_k \delta q_k = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_m \delta q_m. \quad (27.7)$$

Напомним, что при стационарных двусторонних связях

$$\delta A = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z, \quad (27.8)$$

где X , Y и Z — проекции равнодействующей сил, приложенных к материальной точке, на оси прямоугольной системы координат. Коэффициенты Q_1 , Q_2 , ..., Q_m при δq_1 , δq_2 , ..., δq_m в формуле (27.7) по аналогии с (27.8) называются обобщенными силами.

Обобщенная сила — это скалярная величина, произведение которой на приращение соответствующей обобщенной координаты равно элементарной работе задаваемых сил на перемещениях точек системы, определяемых изменением рассматриваемой обобщенной координаты.

Для определения обобщенной силы необходимо:

— дать малое приращение одной, например первой, обобщенной координате, считая остальные постоянными;

— записать выражение элементарной работы задаваемых сил на возможных перемещениях точек системы, определяемых изменением первой обобщенной координаты;

— выписать коэффициент при приращении первой обобщенной координаты; это и будет выражение, определяющее обобщенную силу, соответствующую первой обобщенной координате.

Формально можно записать

$$Q_1 \delta q_1 = \sum_{i=1}^n P_i \delta S_i \cos(\bar{P}_i, \hat{\delta \vec{r}}_i),$$

где P_i — величина равнодействующей сил, приложенных к i -й точке системы, а $\delta s_i = |\delta \vec{r}_i|$ — элементарное перемещение i -й точки при изменении первой обобщенной координаты.

После подстановки в правой части $\delta s_i = f(q_i)$ и сокращений определяется Q_1 .

Затем даем малое приращение второй обобщенной координате, считая остальные неизменными, и в такой же последовательности определяем вторую обобщенную силу и т. д.

Пример. Определить обобщенную силу для рычага, представленного на рис. 27.1.

Решение. Рычаг обладает одной степенью свободы.

Выбираем обобщенную координату — угол φ . Даем приращение обобщенной координате $\delta\varphi$; соответствующие возможные перемещения точек 1 и 2 будут $\delta \vec{r}_1$ и $\delta \vec{r}_2$.

Элементарная работа сил \bar{P}_1 и \bar{P}_2 на соответствующих возможных перемещениях $\delta \vec{r}_1$ и $\delta \vec{r}_2$ будет

$$\delta A = \bar{P}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + \bar{P}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 = P_1 \cdot \delta S_1 \cos(\bar{P}_1, \hat{\delta \vec{r}}_1) + P_2 \cdot \delta S_2 \cos(\bar{P}_2, \hat{\delta \vec{r}}_2) = \\ = P_1 a \delta\varphi \cos \varphi + P_2 b \delta\varphi \cos(180 - \varphi) = (P_1 a - P_2 b) \cos \varphi \delta\varphi.$$

Из равенства $Q_\varphi \delta\varphi = (P_1 a - P_2 b) \cos \varphi \delta\varphi = \delta A$ следует, что $Q_\varphi = (P_1 a - P_2 b) \cos \varphi$,

где Q_φ — обобщенная сила, которая в данном случае имеет размерность момента.

Таким образом, обобщенная сила равна отношению суммы работ на возможных перемещениях всех сил, приложенных к системе при изменении только одной из обобщенных координат системы, к вариации этой координаты.

При вращательном движении твердого тела вокруг неподвижной оси z под действием некоторой системы сил обобщенной силой Q_φ будет главный момент M_z этой системы сил относительно оси z .

При плоскопараллельном движении твердого тела обобщенные координаты будут: $q_1 = x_c$; $q_2 = y_c$; $q_3 = \varphi$, где x_c , y_c — координаты полюса в системе неподвижных прямоугольных координат

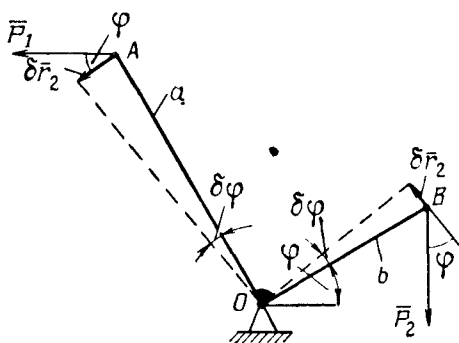


Рис. 27.1.

нат, а φ — угол поворота вокруг оси cz , перпендикулярной плоскости движения. Обобщенные силы, очевидно, будут: $Q_1 = R_x$; $Q_2 = R_y$; $Q_3 = M_{zc}$, что следует из равенств:

$$\delta A = Q_1 \delta q_1 = R_x \cdot \delta x_c; \delta A = Q_2 \delta q_2 = R_y \cdot \delta y_c \text{ и } \delta A = Q_3 \cdot \delta q_3 = M_{zc} \delta \varphi.$$

Пусть силы, действующие на точки системы, как внутренние, так и внешние, являются консервативными, т. е. имеющими потенциал. Тогда, как и было показано, существует силовая функция от координат точек системы, полное приращение которой удовлетворяет равенству

$$\delta A = \frac{\partial U}{\partial x} \delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \delta z.$$

Очевидно, силовую функцию можно выразить через обобщенные координаты, и тогда

$$\delta A = \frac{\partial U}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial U}{\partial q_m} \delta q_m.$$

Из сопоставления последнего равенства с (27.7) видно, что для обобщенных консервативных сил

$$Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k}.$$

Потенциальная энергия консервативной системы связана с силовой функцией равенством

$$U = -\Pi + C, \text{ где } C \text{ — постоянная величина.}$$

Следовательно,

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}; \quad Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}; \quad \dots; \quad Q_m = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_m}, \quad (27.9)$$

где $\Pi(q_1, q_2, \dots, q_m)$ — потенциальная энергия консервативной системы.

§ 140. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ НЕСВОБОДНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Из принципа возможных перемещений следовало, что необходимым и достаточным условием равновесия механической системы с идеальными двусторонними стационарными связями является равенство $\delta A = 0$, т. е. с учетом (27.7)

$$\delta A = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_m \delta q_m = 0. \quad (27.10)$$

Учитывая независимость обобщенных координат друг от друга, полагаем, например, $\delta q_1 \neq 0$, а $\delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_m = 0$. Тогда из (27.10) следует, что $Q_1 = 0$.

Таким образом, можно показать, что условиями равновесия не-свободной механической системы являются обобщенные уравнения вида

$$Q_k = 0, \text{ где } k = 1, 2, 3, \dots, m. \quad (27.11)$$

В примере, рассмотренном в предыдущем параграфе, условием равновесия рычага будет

$$Q_\varphi = (P_1 a - P_2 b) \cos \varphi = 0,$$

что может быть при $\varphi = \frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$ и при $P_1 a - P_2 b = 0$.

Вообще, если твердое тело имеет неподвижную ось и находится в равновесии, то $Q_\varphi = \sum_{i=1}^n m_i (\bar{P}_i) = 0$.

Условиями равновесия консервативной системы, как следует из (27.9) и (27.11), будут:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0; \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0; \dots; \frac{\partial \Pi}{\partial q_m} = 0 \text{ и т. д.}, \quad (27.12)$$

т. е. при равновесии потенциальная энергия системы будет иметь экстремальное значение.

Состояние равновесия механической системы будет устойчивым, если в случае любого достаточно малого изменения ее положения или при сообщении ей достаточно малых скоростей система будет оставаться сколь угодно близкой к рассматриваемому положению равновесия все последующее время.

Лагранж и Дирихле показали, что те положения механической консервативной системы будут устойчивы, в которых потенциальная энергия системы будет минимальна, т. е. для которых $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} > 0$.

Так, равновесие стержня (рис. 27.2) в нижнем положении будет устойчивым (потенциальная энергия будет минимальна), а в верхнем неустойчивым.

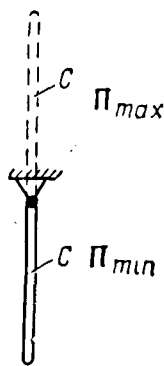


Рис. 27.2.

§ 141. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

Из общего уравнения динамики (26.12) следует

$$\delta A = \sum_{i=1}^n (\bar{P}_i - m_i \bar{\omega}_i) \delta \bar{r}_i = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i \cdot \delta \bar{r}_i - \sum_{i=1}^n m_i \bar{\omega}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0.$$

Используя (27.4), запишем

$$\begin{aligned} \delta A &= \sum_{i=1}^n \bar{P}_i \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) + \sum (-m \bar{\omega}_i) \left(\sum \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) = \\ &= \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \bar{P}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k + \sum_{k=1}^m \left[\sum_{i=1}^n (-m_i \bar{\omega}_i) \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \right] \delta q_k, \end{aligned}$$

где в соответствии с уравнением (27.6) $\sum_{i=1}^n \bar{P}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = Q_k$. Введем понятие обобщенной силы инерции, которая по аналогии с (27.6) равна

$$Q_{nk} = \sum_{i=1}^n \bar{P}_{ii} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^n (-m_i \bar{\omega}_i) \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = - \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}, \quad (27.13)$$

где n — число точек механической системы. Тогда

$$\delta A = \sum_{k=1}^m Q_k \delta q_k + \sum_{k=1}^m Q_{nk} \delta q_k = 0.$$

Для того чтобы это равенство соблюдалось, необходимо, чтобы

$$Q_k + Q_{nk} = Q_k - \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = 0, \quad (27.14)$$

где, как и ранее, $k=1, 2, \dots, m$ — число обобщенных координат. Преобразуем сумму, входящую в равенство (27.14):

$$\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} - \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \right). \quad (27.15)$$

Учитывая, что в соответствии с (27.3) $\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_k}$, получаем следующие выражения в результате преобразований каждой суммы правой части равенства (27.15):

$$1) \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_n} \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_k},$$

где $\sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} = T$ — кинетическая энергия системы;

$$\begin{aligned} 2) \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} &= \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{d\bar{r}_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} = \\ &= \frac{\partial T}{\partial q_k}. \end{aligned}$$

Подставляя в (27.15), а затем в (27.14), получаем

$$Q_k - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right) = 0$$

или

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad (27.16)$$

где $k=1, 2, \dots, m$ — число обобщенных координат.

Полученная система уравнений, количество которых равно числу обобщенных координат, является системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, они называются уравнениями Лагранжа второго рода. Последовательность составления и решения уравнений (27.16) может быть выбрана следующей:

— определяем число степеней свободы механической системы и выбираем обобщенные координаты;

— определяем обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам;

— записываем выражение, определяющее кинетическую энергию T системы, выражая ее через обобщенные координаты и обобщенные скорости;

— составляем систему уравнений Лагранжа (27.16) и записываем начальные условия;

— решаем полученную систему, определяем из начальных условий постоянные интегрирования и находим уравнения движения;

— определяем, если это требуется, реакции связей и другие неизвестные величины.

Пример. Планетарная передача (рис. 27.3) состоит из неподвижного зубчатого колеса 1, водила 2, сателлита 3. Момент инерции водила, длина которого l , относительно оси вращения O обозначим I_0 , момент инерции сателлита относительно своей оси $I_c = \frac{mr^2}{2}$, где m — его масса. К водилу приложен момент $M = \text{const}$. Определить угловое ускорение водила, пренебрегая трением. Какое усилие P действует в точке B касания сателлита и неподвижной шестерни? Веса G_1 и G_2 известны и приложены в точках A и C соответственно.

Решение. Положение системы однозначно определяется с помощью одной координаты φ — угла поворота водила. Система имеет одну степень свободы. Принимаем, что $q_1 = \varphi$.

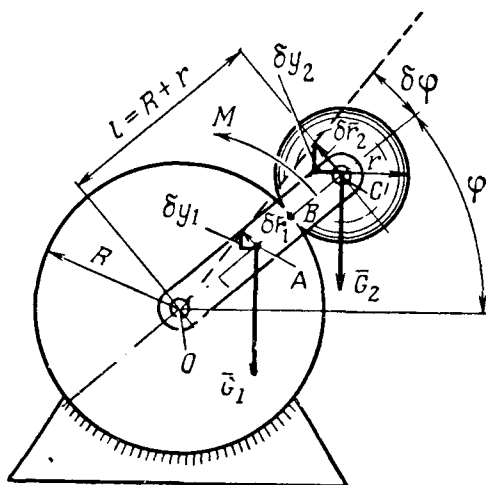


Рис. 27.3.

Вычисляем обобщенную силу, учитывая, что $y_1 = \frac{l}{2} \sin \varphi$ и $\delta y_1 = \frac{l}{2} \cos \varphi \delta \varphi$, соответственно $\delta y_2 = l \cos \varphi \delta \varphi$. Тогда

$$\delta A = Q_1 \delta \varphi = M \delta \varphi - G_1 \frac{l}{2} \cos \varphi \delta \varphi - G_2 l \cos \varphi \delta \varphi,$$

откуда

$$Q_1 = M - \frac{G_1 + 2G_2}{2} l \cos \varphi.$$

Записываем выражение, определяющее кинетическую энергию системы:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + \frac{1}{2} \frac{G_2}{g} v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega_1^2,$$

где $T_1 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2$ — кинетическая энергия водила;

$T_2 = \frac{1}{2} \frac{G_2}{g} v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega_1^2$ — кинетическая энергия спутника, совершающего плоскопараллельное движение.

Учтем, что $v_c = l\omega = l\dot{\varphi}$; $\omega_1 = \frac{v_c}{r} = \frac{l}{r} \dot{\varphi}$, и B — мгновенный центр скоростей спутника. Принимая водило однородным и постоянного сечения, получаем $I_0 = \frac{m_1 l^2}{3} = \frac{G_1 l^2}{3g}$. Кроме того, $I_c = \frac{G_2 r^2}{2g}$. Подставляя значения I_0 и I_c , v_c и ω_1 в выражение для T , получим

$$T = \frac{1}{2} \frac{G_1 l^2}{3g} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \frac{G_2}{g} l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \frac{G_2 r^2}{2g} \frac{l^2 \dot{\varphi}^2}{r^2}$$

или

$$T = \frac{l^2}{12g} (2G_1 + 9G_2) \dot{\varphi}^2.$$

Составляем уравнение Лагранжа (27.16) при $k=1$, учитывая, что $T=f(\dot{\varphi})$:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{l^2}{6g} (2G_1 + 9G_2) \dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{l^2}{6g} (2G_1 + 9G_2) \ddot{\varphi}.$$

Следовательно,

$$\frac{l^2}{6g} (2G_1 + 9G_2) \ddot{\varphi} = M - \frac{G_1 + 2G_2}{2} l \cos \varphi,$$

откуда

$$\ddot{\varphi} = \varepsilon = \frac{M - \frac{G_1 + 2G_2}{2} l \cos \varphi}{l^2 (2G_1 + 9G_2)} \cdot 6g.$$

Усилие, приложенное в точке B касания зубьев, определяется из теоремы о изменении кинетического момента спутника в относительном движении по отношению к оси, проходящей через точку C перпендикулярно чертежу:

$$\frac{dL_c}{dt} = M_c^e \text{ или } \frac{d(I_c \omega_1)}{dt} = I_c \varepsilon_1 = m_c (\bar{P}),$$

где $\varepsilon_1 = \frac{l}{r} \varepsilon = \frac{l}{r} \ddot{\varphi}$; $m_c(P) = Pr$. После подстановки в (*) $\frac{G_2 r^2}{2g} \cdot \frac{l}{r} \ddot{\varphi} = P \cdot r$,
откуда $P = \frac{G_2 l}{2g} \ddot{\varphi} = \frac{3G_2 \left[M - \frac{G_1 + 2G_2}{2} l \cos \varphi \right]}{l(2G_1 + 9G_2)}$.

Из рассмотренного примера видны основные преимущества уравнений Лагранжа второго рода:

— они дают единообразный, довольно простой способ решения задач динамики механических голономных систем, движущихся как угодно;

— число уравнений не зависит от количества точек механической системы, а зависит от числа обобщенных координат, количество которых в механизмах и приборах обычно не более двух;

— в уравнения входят обобщенные силы, включающие активные силы, действующие на точки системы, и не включающие реакции идеальных связей.

В случае когда на систему наложены связи с трением, для использования уравнений Лагранжа второго рода следует силу трения включать условно в число активных сил.

§ 142. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ДЛЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ ГОЛОНОМНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Как было показано, в том случае, когда все силы, действующие на точки системы, являются консервативными, т. е. имеющими потенциал, обобщенные силы равны

$$Q_k = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_k},$$

где $k=1, 2, \dots, m$ — число обобщенных координат.

Тогда, подставляя Q_k в уравнение (27.16), получаем следующие уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_k}, \quad (27.17)$$

где $k=1, 2, \dots, m$.

Потенциальная энергия системы зависит только от обобщенных координат, т. е. $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_m)$. Поэтому $\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_k} = 0$. Последнее позволяет записать уравнение (27.17) в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial q_k} = 0.$$

Обозначим

$$T - \Pi = L,$$

где L — функция Лагранжа или кинетический потенциал.

Тогда система уравнений Лагранжа будет иметь вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad (27.18)$$

где $k=1, 2, \dots, m$ — число обобщенных координат.

Пример. Для определения момента инерции тела вращения, например гребного винта, его помещают на вал, установленный в шарикоподшипники (рис. 27.4). К концу тонкого троса прикрепляют груз весом G_2 , а второй конец троса наматывают на ступицу винта. Опуская груз G_2 без начальной скорости, отмечают время, в течение которого он пройдет расстояние H . Пренебрегая весом троса и трением, получим формулу, определяющую момент инерции гребного винта.

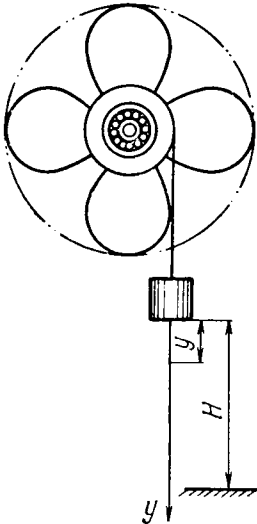


Рис. 27.4.

Решение. Действующие активные силы G_1 и G_2 — силы тяжести (веса) винта и груза — имеют потенциал.

Система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату выбираем расстояние y , пройденное грузом.

Составляем выражение, определяющее функцию Лагранжа, учитывая, что

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{G_2}{g} v^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2,$$

где $T_1 = \frac{1}{2} \frac{G_2}{g} v^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{G_2}{g} \dot{y}^2$ — кинетическая энергия падающего груза;

$T_2 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = \frac{1}{2} I_0 \left(\frac{\dot{y}}{r} \right)^2$ — кинетическая энергия вращающегося винта.

Потенциальная энергия груза равна $\Pi = -G_2 y$. Следовательно,

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2} \cdot \frac{G_2}{g} \dot{y}^2 + \frac{1}{2} I_0 \left(\frac{\dot{y}}{r} \right)^2 + G_2 y.$$

Определяем для составления уравнения Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \left(\frac{G_2}{g} + \frac{I_0}{r^2} \right) \dot{y}; \quad \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \left[\frac{G_2}{g} + \frac{I_0}{r^2} \right] \ddot{y};$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial y} = G_2.$$

Записываем уравнение Лагранжа (27.18):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = \left[\frac{G_2}{g} + \frac{I_0}{r^2} \right] \ddot{y} - G_2 = 0.$$

Интеграл полученного дифференциального уравнения

$$\left(\frac{G_2}{g} + \frac{I_0}{r^2} \right) y = G_2 \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2,$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

Учитывая начальные условия $t=0$; $y=0$; $\dot{y}=0$, находим, что $C_1=C_2=0$. Кроме того, известно, что за время $t=T$ падающий груз проходит расстояние H . Следовательно,

$$\left(\frac{G_2}{g} + \frac{I_0}{r^2} \right) H = G_2 \frac{T^2}{2},$$

откуда

$$I_0 = \frac{G_2 r^2}{g} \left[\frac{T^2 g}{2H} - 1 \right]. \quad (27.19)$$

ОСНОВЫ ДИНАМИКИ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

В динамике механизмов, которая является частью раздела «Динамика», изучаются движение звеньев механизма и приложенные к ним силы в их взаимной связи.

Динамический анализ механизмов состоит в том, что определяется движение звеньев механизма по приложенным к ним силам или определяются силы по заданному движению звеньев. При динамическом исследовании приводится динамическая схема механизма, т. е. графическое изображение механизма с применением условных обозначений звеньев и кинематических пар и указанием размеров и других характеристик звеньев, необходимых для динамического анализа механизмов. Отметим, что при динамическом синтезе механизмов проектируют динамическую схему по заданным динамическим условиям. В дальнейшем будет рассмотрен динамический анализ механизмов.

§ 143. КЛАССИФИКАЦИЯ СИЛ И МОМЕНТОВ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ЗВЕНЬЯ МЕХАНИЗМА

Силы и моменты пар сил, действующие на звенья механизма, условно можно разделить на следующие группы:

а) Движущие силы P_d и моменты пар сил M_d , которые приложены к ведущим звеньям механизма. К ним могут быть отнесены, например, сила от давления газов, действующая на поршень двигателя, момент, передаваемый электродвигателем, ротором газовой турбины и т. д.

б) Силы полезного сопротивления $P_{пс}$ и моменты пар сил $M_{пс}$ полезного сопротивления, для преодоления которых и предназначены данная машина или механизм. Так, например, сила тяжести шлюпки является полезным сопротивлением для крана, который поднимает ее на палубу корабля.

в) Силы $P_{вс}$ вредного сопротивления и моменты пар сил $M_{вс}$, на преодоление которых непроизводительно расходуется энергия движущих сил и моментов, как, например, трение поршня о стенки цилиндра, трение в подшипниках и т. д. Силы

сопротивления, приложенные к звену механизма, совершают отрицательную работу.

г) Силы тяжести. Если механизм работает с периодичностью, то силы тяжести за цикл совершают работу, равную нулю, хотя в отдельные периоды цикла эта работа может быть положительной и полезной, а в другие — вредной и отрицательной. Так, при погружении подводной лодки (ПЛ) сила тяжести совершает положительную и полезную работу, при всплытии необходимо преодолеть силу тяжести, работа которой будет отрицательной. Сила тяжести поршня вертикального дизеля за пол-оборота при движении поршня вниз совершает положительную работу, за вторые пол-оборота при ходе поршня вверх работа будет отрицательна, а за оборот она будет равна нулю.

д) Силы инерции $P_{и}$ и моменты сил инерции $M_{и}$. Для того чтобы уравнениям динамики придать форму уравнений равновесия в соответствии с принципом Даламбера, к звеньям механизма прикладывают силы и моменты сил инерций. Отметим, что в сплошном стержне реакциями связей являются молекулярные взаимодействия внутри звена. Поэтому, например, силы инерции одной части звена являются вполне реальной силой, приложенной к другой его части (см. пример на стр. 398). Вот почему в быстродействующих механических приборах, высокооборотных турбинах и дизелях и в других быстроходных машинах возникают большие силы инерции, которые вызывают дополнительные к статическим напряжения и деформации.

§ 144. СИЛОВОЙ РАСЧЕТ ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА

Расчет имеет целью установить величины сил и моментов, действующих на звенья механизма. Для этого следует, используя принцип Даламбера, рассмотреть условия равновесия каждого звена. На звено действуют активные силы, реакции связей и условно присоединяемые к ним силы и моменты сил инерции. Последние могут достигать значительных величин в быстродействующих механизмах, звенья которых имеют большие ускорения.

Силовой расчет механизма рекомендуется проводить в такой последовательности:

— построить с соблюдением масштабов кинематическую схему механизма, планы скоростей и ускорений;

— определить скорость и ускорение центра масс каждого звена, а также угловую скорость и угловое ускорение;

— определить массу и момент инерции каждого звена, а затем силу и момент сил инерции. Учитывая, что в общем случае звено механизма совершает плоское (плоскопараллельное) движение, последние определяются по формулам:

$$\bar{P}_{и} = -\frac{G}{g} \bar{w}_c \text{ и } \bar{M}_{и} = -I_c \bar{\omega},$$

где $\frac{G}{g}$ — масса звена, а I_c — момент инерции звена относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости движения звена.

В частных случаях, например для прямолинейно движущегося поршня (ползуна), $M_{II}=0$, для кривошипа, вращающегося с $\omega = \text{const}$, $\epsilon=0$ и $M_{II}=0$ и т. д. Начинать силовой расчет рекомендуется с последней ведомой пары, заканчивать — ведущим звеном. Для определения неизвестных целесообразно использовать уравнения равновесия и план сил;

— определить силу трения в кинематических парах, прочность звеньев, уточнить их размеры, мощность (мгновенную и среднюю) для приведения механизма в движение и т. д.

Рассмотрим пример графоаналитического силового расчета кривошипно-шатунного механизма (рис. 28.1).

Планы скоростей и ускорений представлены на рис. (28.1, б) и (28.1, в). Пусть звенья (кривошип и шатун) однородные, стержни постоянного сечения, центры масс которых расположены посередине звеньев.

Все известные силы и пары сил (моменты), действующие на звенья механизма, изображаем на кинематической схеме механизма (рис. 28.1, а). Силовой расчет начинаем со звена AB пары шатун—поршень. Освобождаясь от связей, заменяем их действие на кинематическую пару соответствующими реакциями, которые обозначаем $\bar{R}_{4,3}$ и $\bar{R}_{1,2}$ (рис. 28.1, д). Последнюю представляем через две составляющие: $\bar{T}_{1,2}$ и $\bar{N}_{1,2}$, направленные соответственно перпендикулярно и вдоль AB . Записываем условия равновесия пары в виде

$$\bar{R} = \bar{R}_{1,2} + \bar{G}_2 + \bar{P}_{и2} + \bar{G}_3 + \bar{R}_{4,3} + \bar{P}_{пс} + \bar{P}_{и3} = 0$$

или

$$\bar{R} = \bar{N}_{1,2} + \bar{T}_{1,2} + \bar{P}_{и2} + \bar{G}_2 + \bar{G}_3 + \bar{R}_{4,3} + \bar{P}_{пс} + \bar{P}_{и3} = 0. \quad (*)$$

В уравнении (*) неизвестными силами являются $\bar{N}_{1,2}$, $\bar{T}_{1,2}$ и $\bar{R}_{4,3}$, для определения которых одного уравнения недостаточно. Второе условие равновесия можно записать в виде равенства

$$\sum m_B(\bar{P}_i) = m_B(\bar{T}_{1,2}) + m_B(\bar{G}_2) + m_B(\bar{P}_{и2}) - M_{и2} = 0,$$

откуда и определить неизвестную $\bar{T}_{1,2}$.

Для определения $\bar{N}_{1,2}$ и $\bar{R}_{4,3}$ строим на основании (*) многоугольник сил (рис. 28.1, д) в такой последовательности: от произвольной точки на плоскости p_0 откладываем с соблюдением масштабов последовательно векторы $\bar{T}_{1,2}$, затем к нему прибавляем $\bar{P}_{и2}$, \bar{G}_2 и т. д. Через конец вектора $\bar{P}_{и3}$ проводим линию действия $\bar{R}_{4,3}$ (вертикальная прямая), а через полюс p_0 — линию действия $\bar{N}_{1,2}$ параллельно AB . Точка их пересечения определяет величины

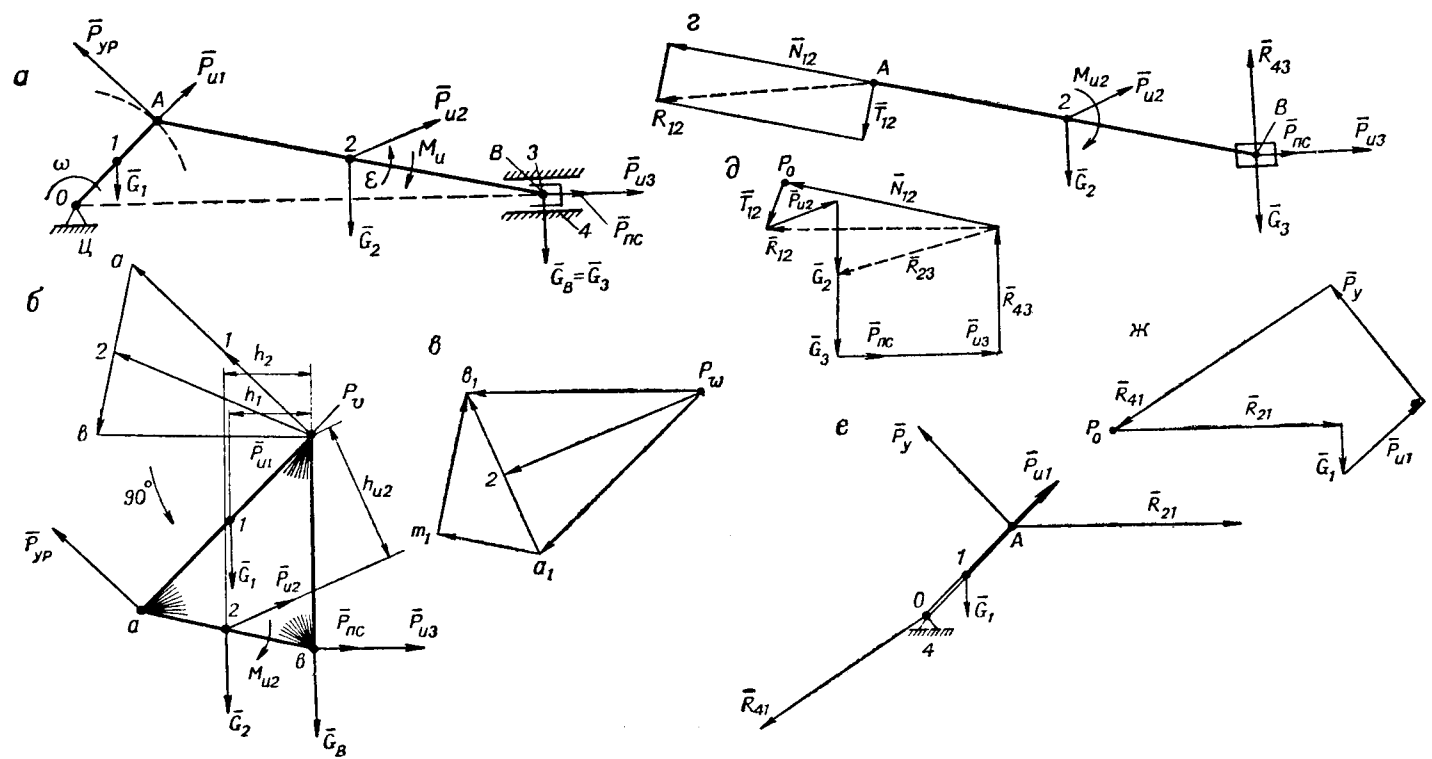


Рис. 28.1.

сил $\bar{R}_{4,3}$ и $\bar{N}_{1,2}$. Направления сил определяются из условия того, что многоугольник сил замкнут. Пунктиром показана реакция $\bar{R}_{1,2}$. При построении многоугольника сил необходимо вначале сложить силы, действующие на одно звено пары, затем на другое. В рассматриваемом случае вначале складывались все силы, действующие на звено 2 (шатун), затем на звено 3 (поршень, ползун).

Реакция $\bar{R}_{2,3}$ определяется из условия равновесия третьего звена

$$\bar{R}_{2,3} + \bar{G}_3 + \bar{R}_{4,3} + \bar{P}_{\text{пс}} + \bar{P}_{\text{из}} = 0.$$

При выбранной последовательности построений для определения реакции $\bar{R}_{2,3}$ может быть использован построенный план сил (на плане $\bar{R}_{2,3}$ показана пунктиром).

Аналогично производится построение плана сил для ведущего звена (рис. 28.1, e), условие равновесия которого записывается в виде

$$\bar{P}_{\text{ил}} + \bar{R}_{2,1} + \bar{G}_1 + \bar{P}_{\text{ур}} + \bar{R}_{4,1} = 0,$$

где $\bar{P}_{\text{ур}}$ — уравновешивающая сила, приложенная в точке A звена. Она может быть определена либо с помощью рычага Жуковского (§ 141), либо из равенства (когда $\bar{P}_{\text{ур}} \perp OA$):

$$\sum m_0(\bar{P}_l) = P_{\text{ур}} \cdot OA - m_0(\bar{G}_1) - m_0(\bar{R}_{2,1}) = 0,$$

откуда

$$P_{\text{ур}} = \frac{m_0(\bar{G}_1) + m_0(\bar{R}_{2,1})}{OA},$$

и направлена перпендикулярно OA .

Многоугольник сил представлен на рис. (28.1, ж), откуда определяется величина и направление реакции $\bar{R}_{4,1}$.

§ 145. ПРИВЕДЕННАЯ И УРАВНОВЕШИВАЮЩАЯ СИЛА МЕХАНИЗМА

При исследовании движения механизма систему сил и моментов, приложенных к его звеньям, удобно заменять одной, эквивалентной, приложенной к какой-либо точке обычно ведущего звена механизма. Эквивалентная сила называется приведенной силой $\bar{P}_{\text{пр}}$.

Таким образом, приведенная сила — это сила, условно приложенная к одной из точек механизма (точке приведения) и определяемая из условия, что мощность этой силы равна сумме мощностей сил и пар сил, приложенных к звеньям механизма. Сила, численно равная, но противоположно направленная приведенной и приложенная в точке приведения, называется уравновешивающей ($\bar{P}_{\text{ур}}$).

Кроме понятия «приведенная сила» в динамике механизмов пользуются понятием «приведенная пара сил». Это пара сил, условно приложенная к одному из звеньев механизма (звену приведения) и определяемая из условия, что мощность этой пары сил равна сумме мощностей сил и пар сил, приложенных к звеньям механизма. Момент приведенной пары сил называется приведенным моментом.

Пара сил, численно равная приведенной, но противоположно ей направленная и приложенная к звену приведения, называется уравновешивающей парой сил, а ее момент соответственно уравновешивающим ($M_{\text{уп}}$).

Рассмотрим механизм, на звенья которого действует совокупность сил и пар сил (моментов), включающая силы и моменты инерции, а также уравновешивающая сила. Применяя к нему принцип возможных скоростей, можно уравнение (26.10) записать в виде

$$\sum P_i v_i \cos(\bar{P}_i, \hat{\bar{v}}_i) + \sum M_i \omega_i + P_{\text{уп}} v_A \cos(\bar{P}_{\text{уп}}, \hat{\bar{v}}_A) = 0, \quad (28.1)$$

где A — точка обычно ведущего звена, к которой приложена уравновешивающая сила;

\bar{v}_A — абсолютная скорость точки A ;

$\bar{P}_i, \hat{\bar{v}}_i$ — сила, приложенная в центре масс i -го звена, и соответственно скорость центра масс;

M_i, ω_i — момент пары сил, действующей на i -е звено, и соответственно угловая скорость этого звена в относительном движении.

Величина уравновешивающей силы из (28.1) будет

$$P_{\text{уп}} = - \frac{\sum P_i v_i \cos(\bar{P}_i, \hat{\bar{v}}_i) + \sum M_i \omega_i}{v_A \cos(\bar{P}_{\text{уп}}, \hat{\bar{v}}_A)}. \quad (28.2)$$

Отметим, что в различного рода кривошипно-шатунных механизмах обычно за точку приложения $\bar{P}_{\text{уп}}$ принимают подвижный шарнир A кривошипа OA . Скорость $\bar{v}_A \perp OA$. Направим $P_{\text{уп}}$ в сторону, противоположную скорости \bar{v}_A . Тогда $\cos(\bar{P}_{\text{уп}}, \hat{\bar{v}}_A) = -1$ и величина уравновешивающей силы будет равна

$$P_{\text{уп}} = \frac{\sum P_i v_i \cos(\bar{P}_i, \hat{\bar{v}}_i) + \sum M_i \omega_i}{v_A}. \quad (28.3)$$

Учитывая, что $v_A = \omega \cdot OA = \omega r$, где r — радиус кривошипа, из (28.3) следует

$$P_{\text{уп}} \cdot r = M_{\text{уп}} = \frac{\sum P_i v_i \cos(\bar{P}_i, \hat{\bar{v}}_i) + \sum M_i \omega_i}{\omega}, \quad (28.4)$$

где $M_{ур}$ — уравнивающий момент, приложенный к ведущему звену.

Таким образом, система сил и моментов, приложенных к звеньям механизма, может быть заменена одной приведенной силой $\bar{P}_{пр} = -\bar{P}_{ур}$, приложенной в точке A ведущего звена, или приведенным моментом $M_{пр} = -M_{ур}$, приложенным к ведущему звену.

Знание величины $P_{ур}$ или $M_{ур}$ позволяет определить мгновенную мощность, потребную для приведения в действие механизма в данном положении, по формуле

$$N = M_{ур} \cdot \omega = P_{ур} \cdot v_A \cos(\bar{P}_{ур}, \hat{v}_A).$$

Определить $\bar{P}_{ур}$ можно и с помощью рычага Жуковского в такой последовательности (рис. 28.1):

— изобразить в масштабе механизм в заданном положении;
 — построить планы скоростей и ускорений, на которых должны быть изображены скорости и ускорения центров тяжести каждого звена;

— определить силы инерции и моменты сил инерции; показать на схеме механизма действующие силы и моменты, а также силы инерции, моменты сил инерции, уравнивающую силу;

— повернуть план скоростей на 90° , например, против хода часовой стрелки; приложить в соответствующих точках плана скоростей силы, сохраняя их направления, представленные на схеме механизма; направление пары силы сохраняется в том случае, когда малые буквы на рычаге Жуковского совпадают с большими на механизме по направлению. Действительно, приложенная к звену AB пара сил, момент которой равен M , может быть представлена состоящей из двух сил каждая величиной $P = \frac{M}{AB}$ и плеча AB ; переносим силы P , сохраняя их направления, в точки b и a рычага Жуковского. Если при этом ab на рычаге по направлению не будет соответствовать AB на чертеже, момент пары, приложенный к рычагу, будет иметь направление, противоположное паре, действующей на звено; кроме того, $P = \frac{M}{AB} = \frac{M'}{ab}$, т. е. при определении суммы моментов относительно оси рычага Жуковского нужно учитывать, что $M' = \frac{ab}{AB} M = kM$, где k — коэффициент приведения заданного момента M к рычагу Жуковского;

— определить величину уравнивающей силы $P_{ур}$ из условия равновесия рычага Жуковского по формуле

$$P_{ур} = \frac{\sum P_G h_G + \sum P_{пс} h_{пс} + \sum P_{вс} h_{вс} + \sum P_{и} h_{и} + \sum kM}{h_{ур}}, \quad (28.5)$$

где P_G , $P_{пс}$, $P_{вс}$, $P_{и}$ — величины сил тяжести, полезного сопротивления, вредного сопротивления и силы инерции соответственно;
 h_G , $h_{пс}$, $h_{вс}$, $h_{и}$ и $h_{ур}$ — плечи (расстояния), которые берутся не-

посредственно из чертежа от оси рычага Жуковского до соответствующих сил;

kM — моменты пар M , приведенные к рычагу Жуковского.

Отрицательный знак уравновешивающей силы, определенной по формуле (28.4) или (28.5), означает, что ее действительное направление обратно принятому ранее.

§ 146. ПРИВЕДЕННАЯ МАССА И ПРИВЕДЕННЫЙ МОМЕНТ ИНЕРЦИИ МЕХАНИЗМА

С понятием приведенного момента инерции механизмов мы уже встречались при решении задач (см., например, стр. 391). При динамическом исследовании механизмов машин и приборов удобно заменять действительные массы и моменты инерции звеньев механизма одной массой или моментом инерции одного звена (обычно ведущего), которые называются соответственно приведенной массой и приведенным моментом инерции механизма.

Приведенной массой механизма называется масса $m_{пр}$, которую надо сосредоточить в данной точке механизма (точке приведения), чтобы кинетическая энергия этой материальной точки была равна сумме кинетических энергий всех звеньев механизма. Приведенным моментом инерции механизма $I_{пр}$ называется момент инерции, которым должно обладать одно из звеньев механизма (звено приведения) относительно оси его вращения, чтобы кинетическая энергия этого звена равнялась сумме кинетических энергий всех звеньев механизма. Пусть точка A кривошипа, скорость которой \bar{v}_A , будет точкой приведения. Тогда

$$\frac{m_{пр}v_A^2}{2} = \sum_{i=1}^n T_i = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{I_{ci} \omega_i^2}{2}, \quad (28.6)$$

где m_i , I_{ci} — масса i -го звена и его момент инерции относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости движения звена; \bar{v}_i , ω_i — соответственно скорость центра масс и угловая скорость i -го звена.

Приведенная масса из (28.6) равна

$$m_{пр} = \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{v_i}{v_A} \right)^2 + \sum_{i=1}^n I_{ci} \left(\frac{\omega_i}{v_A} \right)^2$$

или, учитывая, что $v_A = r\omega$, последнее равенство можно записать в виде

$$m_{пр} = \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{v_i}{v_A} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^n I_{ci} \left(\frac{\omega_i}{\omega} \right)^2, \quad (28.7)$$

где r — расстояние от точки приведения, масса которой равна $m_{\text{пр}}$, до оси вращения, т. е. длина звена приведения.

Приведенный момент инерции звена приведения OA определяется из равенства

$$I_{\text{пр}} \frac{\omega^2}{2} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{v_i^2}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{I_{ci} \omega_i^2}{2}, \quad (28.8)$$

откуда

$$I_{\text{пр}} = \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{v_i}{\omega} \right)^2 + \sum_{i=1}^n I_{ci} \left(\frac{\omega_i}{\omega} \right)^2. \quad (28.9)$$

Из сопоставления (28.8) с (28.9) следует, что

$$I_{\text{пр}} = m_{\text{пр}} r^2. \quad (28.10)$$

Из полученных равенств (28.7) и (28.9) видно, что приведенная масса и приведенный момент инерции являются всегда положительными величинами, зависящими от угла поворота ведущего звена, так как $v_i = f_1(\varphi)$ и $\omega_i = f_2(\varphi)$.

Если в зубчатом механизме за звено приведения выбрать первую шестерню, угловая скорость которой ω_1 , тогда

$$\frac{I_{\text{пр}} \omega_1^2}{2} = \frac{I_1 \omega_1^2}{2} + \frac{I_2 \omega_2^2}{2} + \dots + \frac{I_n \omega_n^2}{2} + \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \dots + \frac{m_n v_n^2}{2}$$

или

$$I_{\text{пр}} = I_1 + I_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + \dots + I_n \left(\frac{\omega_n}{\omega_1} \right)^2 + m_1 \left(\frac{v_1}{\omega_1} \right)^2 + m_2 \left(\frac{v_2}{\omega_1} \right)^2 + \dots + m_n \left(\frac{v_n}{\omega_1} \right)^2.$$

Если оси шестерен в пространстве неподвижны, $v_1 = v_2 = \dots = v_n = 0$ или $v_i = \text{const}$, тогда приведенный момент инерции зубчатого механизма во все время движения сохраняет постоянное значение.

Пример. Определить момент инерции кривошипно-шатунного механизма, приведенный к звену OA , вращающемуся с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно чертежу (рис. 28.2).

Решение. Кривошипно-шатунный механизм (рис. 28.2, а) состоит из колена — кривошипа (две щеки и две шейки — шатунная или мотылевая и рамовая), момент инерции которого относительно оси вращения обозначим через I_k , шатуна, момент инерции которого относительно его центральной оси C , перпендикулярной плоскости чертежа, обозначим через $I_{\text{ш}}$, и поступательно движущегося поршня. Обозначим вес шатуна $G_{\text{ш}}$, вес поршня и связанных с ним деталей, движущихся поступательно (поршневой палец, поршневые кольца), $G_{\text{п}}$.

Кинетическая энергия кривошипно-шатунного механизма равна

$$T = T_k + T_{\text{ш}} + T_{\text{п}}.$$

где $T_K = \frac{I_K \omega^2}{2}$ — кинетическая энергия кривошипа;

$T_{ш} = \frac{I_{сш} \omega_{ш}^2}{2} + \frac{m_{ш} v_{сш}^2}{2}$ — кинетическая энергия шатуна;

$T_{п} = \frac{m_{п} v_{п}^2}{2}$ — кинетическая энергия поршня;

$m_{ш}$ и $\omega_{ш}$ — соответственно масса и угловая скорость шатуна в его относительном движении;

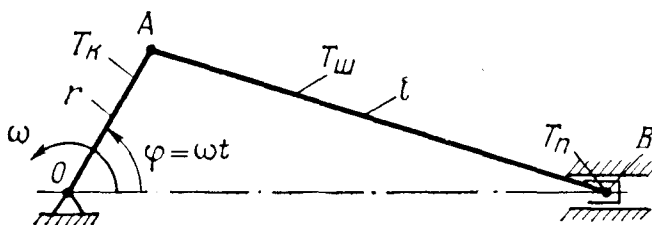


Рис. 28.2.

$I_{ш}$ — момент инерции шатуна относительно центральной оси, проходящей перпендикулярно плоскости его движения; для многих выполненных шатунов $I_{ш} = 0,17 m_{ш} l^2$, где l — длина шатуна;

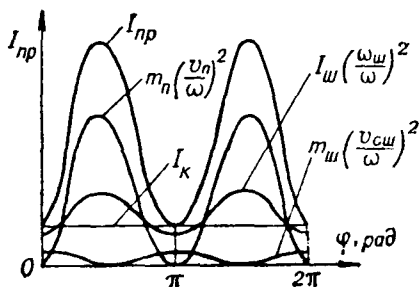


Рис. 28.3.

$v_{сш}$ — величина скорости центра тяжести шатуна;

$v_{п}$ — величина скорости поршня;

$m_{п}$ — масса поршня.

Следовательно,

$$\frac{1}{2} I_{пр} \omega^2 = \frac{I_K \omega^2}{2} + \frac{I_{ш} \omega_{ш}^2}{2} + \frac{G_{ш} v_{сш}^2}{2g} + \frac{G_{п} v_{п}^2}{2g},$$

откуда приведенный момент инерции

$$I_{пр} = I_K + I_{ш} \left(\frac{\omega_{ш}}{\omega} \right)^2 + \frac{G_{ш}}{g} \left(\frac{v_{сш}}{\omega} \right)^2 + \frac{G_{п}}{g} \left(\frac{v_{п}}{\omega} \right)^2 \quad (28.11)$$

или

$$I_{пр} = I_K + I_{пр}^{(1)} + I_{пр}^{(2)} + I_{пр}^{(3)}.$$

Приведенный момент инерции кривошипно-шатунного механизма (28.11) является периодической функцией, зависящей от угла поворота кривошипа, но не зависящей от скоростей точек системы, так как с увеличением ω пропорционально увеличиваются $\omega_{ш}$, $v_{сш}$, $v_{п}$ и т. д.

Отношения, стоящие в скобках, удобно брать непосредственно из плана скоростей, так как их аналитические выражения являются довольно громоздкими. Так, например,

$$\left| \frac{\omega_{ш}}{\omega} \right| = \frac{\lambda \cos \varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \cos^2 \varphi}}; \quad \left| \frac{v_{п}}{\omega} \right| = r \left[\sin \varphi - \frac{\lambda \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \cos^2 \varphi}} \right].$$

На рис. 28.3 представлен график изменения $I_{пр}$ и отдельных слагаемых в зависимости от угла поворота кривошипа.

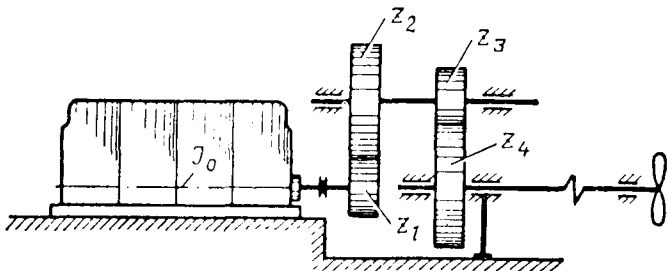


Рис. 28.4.

Пример. Определить приведенный момент инерции механизма, включая редуктор (рис. 28.4), состоящий из четырех шестерен соответственно с числом зубьев z_1 , z_2 , z_3 и z_4 , и винт.

Решение. Кинетическая энергия механизма равна

$$T = T_0 + T_1 + T_2,$$

где $T = \frac{I_{пр} \omega_1^2}{2}$ — кинетическая энергия механизма;

$T_0 = \frac{(I_0 + I_1) \omega_1^2}{2}$ — кинетическая энергия движущихся частей двигателя и шестерни 1;

$T_1 = \frac{(I_2 + I_3) \omega_2^2}{2}$ — кинетическая энергия вращающихся шестерен 2 и 3;

$T_2 = \frac{(I_4 + I_b) \omega_3^2}{2}$ — кинетическая энергия шестерни 4 и винта.

Линейные скорости точек касания шестерен 1 и 2 равны, т. е. $r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2$. Следовательно, $\omega_2 = \omega_1 \frac{r_1}{r_2} = \omega_1 \frac{z_1}{z_2}$. Аналогично получаем $\omega_3 = \omega_2 \frac{z_3}{z_4} = \omega_1 \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}$.

Тогда

$$\frac{I_{пр} \omega_1^2}{2} = \frac{(I_0 + I_1) \omega_1^2}{2} + \frac{(I_2 + I_3) \omega_1^2}{2} \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 + \frac{(I_4 + I_b) \omega_1^2}{2} \left(\frac{z_1 z_3}{z_2 z_4} \right)^2,$$

откуда

$$I_{пр} = (I_0 + I_1) + (I_2 + I_3) \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 + (I_4 + I_b) \left(\frac{z_1 z_3}{z_2 z_4} \right)^2.$$

Отношение $\frac{z_2}{z_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = i_{1,2}$ называют передаточным числом между шестернями 1 и 2, а $\frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3} = i_{1,2} \cdot i_{3,4}$ — передаточным числом редуктора $i_{1,4} = i_{1,2} \cdot i_{3,4}$. Таким образом,

$$I_{пр} = (I_0 + I_1) + (I_2 + I_3) \cdot \frac{1}{i_{1,2}^2} + (I_4 + I_b) \cdot \frac{1}{i_{1,4}^2} \quad (28.12)$$

и является величиной постоянной при $I_0 = \text{const}$.

Пример. Определить приведенный момент инерции кулачкового механизма, если момент инерции шайбы относительно оси равен $I_{шб}^{(0)} = \frac{m_{шб} a^2}{2}$, вес шайбы $G_{шб}$ и вес стержня клапана G_k (рис. 28.5). Массой пружины пренебречь.

Решение. Вычислим момент инерции кулачковой шайбы относительно оси вращения, $I_{шб}^{(0)}$ которой равен в соответствии с рисунком:

$$I_{шб}^{(0)} = \frac{m_{шб} a^2}{2} + m_{шб} a^2 = \frac{3}{2} m_{шб} a^2 = \frac{3}{2} \frac{G_{шб}}{g} a^2.$$

Определяем кинетическую энергию механизма

$$\frac{I_{пр} \omega^2}{2} = \frac{I_{шб} \omega^2}{2} + \frac{G_k r^2}{2g},$$

где

$$r = 2a \cos \varphi = 2a \cos \omega t;$$

$$\dot{r} = -2a\omega \sin \omega t.$$

Тогда

$$\frac{I_{пр} \omega^2}{2} = \frac{\frac{3}{2} \frac{G_{шб} a^2}{g} \omega^2}{2} + \frac{G_k 4a^2 \omega^2 \sin^2 \omega t}{2g};$$

откуда

$$I_{пр} = \frac{a^2}{g} \left[\frac{3}{2} G_{шб} + 4G_k \sin^2 \omega t \right], \quad (28.13)$$

т. е. приведенный момент рассматриваемого механизма является периодической функцией времени.

§ 147. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМА

Поставим перед собой задачу определить движение механизма или машины в зависимости от сил и моментов, действующих на его звенья. Для решения поставленной задачи используем понятия о приведенном моменте и о приведенном моменте инерции механизма, которые в общем случае являются величинами переменными, зависящими от времени. Поэтому используем теорему о

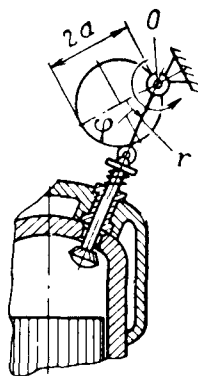


Рис. 28.5.

изменении кинетической энергии в дифференциальном виде (22.21)

$$dT = M_{\text{пр}} d\varphi \text{ или } \frac{dT}{d\varphi} = M_{\text{пр}},$$

где $T = \frac{1}{2} I_{\text{пр}} \omega^2$ — кинетическая энергия механизма, а $M_{\text{пр}}$ — приведенный момент, равный разности моментов сил движущих и сил сопротивлений приведенных к ведущему звену. Подставляя и учитывая что $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ получим

$$\frac{d I_{\text{пр}} \omega^2}{d\varphi} \frac{1}{2} + I_{\text{пр}} \frac{d\omega}{dt} = M_{\text{пр}}. \quad (28.14)$$

В частном случае, при $I_{\text{пр}} = \text{const}$ или когда $I_{\text{пр}}$ может быть принят постоянным и равным среднему значению за цикл его изменения

$$I_{\text{пр}} \frac{d\omega}{dt} = I_{\text{пр}} \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_{\text{пр}}. \quad (28.15)$$

Уравнение (28.15) является дифференциальным уравнением вращательного движения твердого тела с моментом инерции $I_{\text{пр}}$ вокруг неподвижной оси.

Уравнение (28.15) можно записать в виде

$$I_{\text{пр}} \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = M_{\text{пр}},$$

откуда

$$I_{\text{пр}} \omega d\omega = M_{\text{пр}} d\varphi$$

или

$$\frac{I_{\text{пр}} \omega_2^2}{2} - \frac{I_{\text{пр}} \omega_1^2}{2} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_{\text{пр}} d\varphi. \quad (28.16)$$

В частном случае при $M_{\text{пр}} = \text{const}$

$$\frac{I_{\text{пр}} \omega_2^2}{2} - \frac{I_{\text{пр}} \omega_1^2}{2} = M_{\text{пр}} (\varphi_2 - \varphi_1), \quad (28.17)$$

при $I_{\text{пр}} = f(\varphi)$

$$\frac{I_{\text{пр}2} \omega_2^2}{2} - \frac{I_{\text{пр}1} \omega_1^2}{2} = M_{\text{пр}} (\varphi_2 - \varphi_1).$$

Аналогично можно получить дифференциальное уравнение движения механизма, приведенная масса которого $m_{\text{пр}}$, а затем и уравнение, подобное (28.17).

§ 148. ПЕРИОДЫ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМА

Движения механизма или машины условно можно разделить на три основных периода (рис. 28.6).

1. **Разбег механизма.** Период от пуска ($\omega = 0$) до достижения некоторой постоянной средней угловой скорости ($\omega_{\text{ср}} = \text{const}$), на-

зывается периодом разбега механизма. Дифференциальное уравнение движения механизма или машины будет (при $I_{\text{пр}} = \text{const}$)

$$I_{\text{пр}} \frac{d\omega}{dt} = I_{\text{пр}} \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_{\text{пр}} > 0$$

или

$$I_{\text{пр}} d\omega = M_{\text{пр}} dt.$$

Интегрируя в пределах от $\omega=0$ до $\omega=\omega_{\text{ср}}$ при $M_{\text{пр}} = \text{const}$, получаем

$$I_{\text{пр}} \omega_{\text{ср}} = M_{\text{пр}} t_1 = [(M_{\text{дв}})_{\text{пр}} - (M_{\text{с}})_{\text{пр}}] t_1,$$

откуда время первого периода

$$t_p = \frac{I_{\text{пр}} \omega_{\text{ср}}}{(M_{\text{дв}})_{\text{пр}} - (M_{\text{с}})_{\text{пр}}}, \quad (28.18)$$

где $\omega_{\text{ср}}$ — конечная угловая скорость, которая соответствует угловой скорости установившегося движения.

При разбеге механизма часто пуск осуществляется моментом, приложенным непосредственно к ведущему звену, например, от электродвигателя. Тогда $(M_{\text{дв}})_{\text{пр}} = M_{\text{дв}}$ (пусковому моменту) для электродвигателя может быть взят по каталогу. В механизмах счетно-решающих, автоматического управления, особенно в тех, где пуск повторяется многократно, следует стремиться к уменьшению времени t_p , что, как следует из (28.18), может быть достигнуто или за счет уменьшения $I_{\text{пр}}$, или за счет увеличения пускового момента $M_{\text{дв}}$, или за счет одновременного их изменения, или, наконец, за счет уменьшения $(M_{\text{с}})_{\text{пр}}$, что достигается работой на холостом ходу.

2. Установившийся период. Период, когда $\omega_{\text{ср}} \approx \text{const}$, называется установившимся. Этот основной период, как правило, является наиболее продолжительным (главные судовые силовые дизельные, газотурбинные и другие установки), реже он может быть непродолжительным (приборы управления и наведения военно-морского оружия). Следует отметить, что в этот основной период угловая скорость не является строго постоянной (рис. 28.6), а колеблется вокруг средней. Это объясняется тем, что силы движущие, силы сопротивления (изменение подачи топлива, сопротивления винта и т. д.) и приведенный момент инерции механизма не сохраняют постоянных значений. Для этого периода времени принимают $M_{\text{пр}} = (M_{\text{дв}})_{\text{пр}} - (M_{\text{с}})_{\text{пр}} = 0$ и тогда

$$(M_{\text{дв}})_{\text{пр}} = (M_{\text{с}})_{\text{пр}}, \text{ где } M_{\text{с}} = M_{\text{пс}} + M_{\text{вс}}.$$

Таким образом, при установившемся движении* принимают, что момент движущих сил равен моменту сил вредного и полезного сопротивлений, а следовательно, $A_{\text{дв}} = A_{\text{пс}} + A_{\text{вс}}$.

* Установившимся движением называется такое, при котором обобщенная координата является периодической функцией времени.

3. **Выбег механизма.** Период от установившегося движения до полной остановки называется выбегом механизма или машины. Для этого периода движения дифференциальное уравнение движения механизма будет

$$I_{\text{пр}} \frac{d\omega}{dt} = M_{\text{пр}} < 0, \text{ так как } (M_{\text{дв}})_{\text{пр}} < (M_{\text{с}})_{\text{пр}},$$

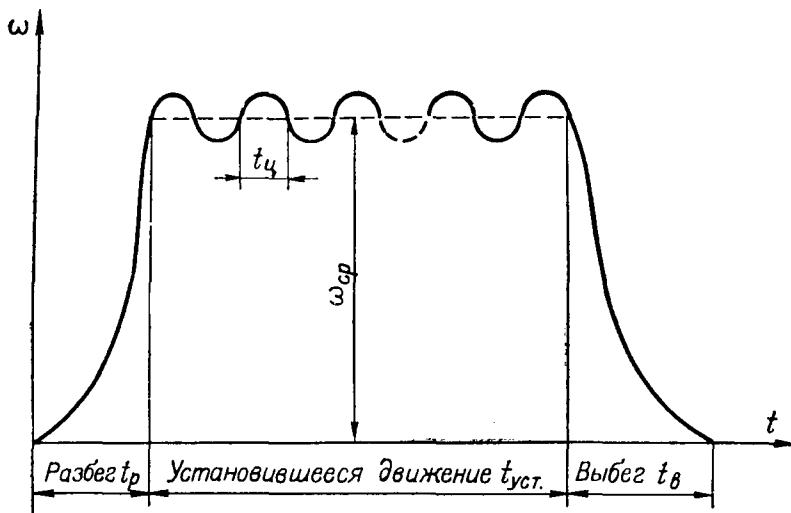


Рис. 28.6.

откуда, интегрируя в пределах от $\omega_{\text{ср}}$ при $M_{\text{пр}} = \text{const}$ до $\omega = 0$ (остановка), получаем $-I_{\text{пр}}\omega_{\text{ср}} = M_{\text{пр}}t_b$ и

$$t_b = -\frac{I_{\text{пр}}\omega_{\text{ср}}}{M_{\text{пр}}} = -\frac{I_{\text{пр}}\omega_{\text{ср}}}{(M_{\text{дв}})_{\text{пр}} - (M_{\text{с}})_{\text{пр}}}. \quad (28.19)$$

Для сокращения периода выбега целесообразно подвод энергии прекратить ($M_{\text{дв}} = 0$), т. е., например, отключить топливо или подачу энергии от постороннего источника, например электродвигателя. Иногда для этой же цели искусственно увеличивают силы вредного сопротивления за счет тормозного момента, прикладываемого к одному из звеньев, часто непосредственно к ведущему звену механизма или машины.

Для периода выбега $A = A_{\text{пс}} + A_{\text{вс}}$.

При отсутствии притока энергии кинетическая энергия механизма при установившемся движении расходуется до момента полной остановки на работу полезных и вредных сил сопротивлений, т. е.

$$\frac{I_{\text{пр}}\omega_{\text{ср}}^2}{2} = A_{\text{пс}} + A_{\text{вс}}.$$

§ 149. КОЭФФИЦИЕНТ ПОЛЕЗНОГО ДЕЙСТВИЯ МЕХАНИЗМА

Ранее было установлено, что коэффициент полезного действия характеризует степень полезного использования энергии в механизме или машине. При установившемся движении машины $A_{дв} = A_{пс} + A_{вс}$, т. е. $A_{дв} > A_{пс}$. Отношение работы сил полезных сопротивлений к работе сил движущих называется механическим коэффициентом полезного действия (КПД):

$$\eta = \frac{A_{пс}}{A_{дв}} = \frac{N_{пс}}{N_{дв}}$$

или

$$\eta = \frac{A_{дв} - A_{вс}}{A_{дв}} = 1 - \frac{A_{вс}}{A_{дв}}. \quad (28.20)$$

Из формулы (28.20) следует, что:

- КПД механизма всегда меньше единицы;
- с уменьшением вредного сопротивления (применение соответствующей смазки, шарико- или роликоподшипников вместо подшипников скольжения и т. п.) КПД увеличивается.

В счетно-вычислительных устройствах, приборах управления, измерительных приборах полезное сопротивление весьма мало; главное значение приобретает точность преобразования движения, быстрота действия и надежность. Однако увеличение КПД механизма свидетельствует об уменьшении трения, т. е. износа, и, как следствие этого, об увеличении точности и надежности механизма. При остановке некоторых машин ($A_{дв} = 0$), например подъемных, возможны два случая: либо машина остается в покое ($A_{вс} > A_{пс}$) — случай самоторможения, либо она самопроизвольно движется в обратном направлении ($A_{пс} > A_{вс}$). Рассмотрим первый случай. При установившемся движении $A_{дв} = A_{пс} + A_{вс} > 2A_{пс}$, откуда

$$\eta = \frac{A_{пс}}{A_{дв}} < 0,5. \quad (28.21)$$

Следовательно, самоторможение обеспечено при $\eta < 0,5$, что невыгодно в энергетическом отношении.

Машина обычно состоит из ряда простых механизмов, КПД которых известны или могут быть определены. В этом случае общий КПД определяется в зависимости от способа соединения простых механизмов. Рассмотрим два основных способа соединения механизмов: последовательное и параллельное.

Последовательное соединение (рис. 28.7, а). Пусть работа движущих сил, подводимая к первому механизму, $A_{дв}$, а полезная работа, отдаваемая последним, $A_{пс}$. Тогда полный общий КПД машины

$$\eta_{об} = \frac{A_{пс}}{A_{дв}}.$$

Частные КПД каждого механизма

$$\eta_1 = \frac{A_1}{A_{дв}}; \quad \eta_2 = \frac{A_2}{A_1}; \quad \dots; \quad \eta_n = \frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{A_{пс}}{A_{n-1}}.$$

Следовательно,

$$\eta_{\text{об}} = \frac{A_{\text{пс}}}{A_{\text{дв}}} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \dots \cdot \eta_n. \quad (28.22)$$

Вывод. Общий КПД машины, состоящей из последовательно соединенных механизмов, равен произведению частных величин КПД отдельных механизмов.

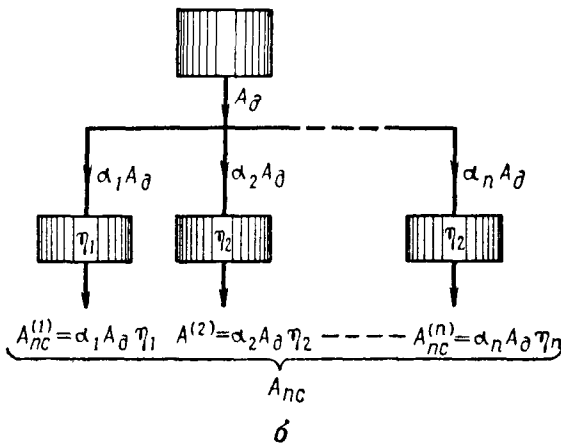
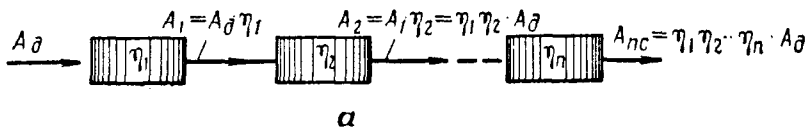


Рис. 28.7.

Параллельное соединение (рис. 28.7, б). Работа движущих сил распределяется на n механизмов, частные КПД которых, как и ранее, будут $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$. Пусть каждый механизм потребляет часть общей подводимой энергии, которая характеризуется коэффициентом α_i . Тогда полезное сопротивление 1, 2, ..., n -го механизма будет

$$A_{\text{пс}}^{(1)} = \alpha_1 A_{\text{дв}} \cdot \eta_1; \quad A_{\text{пс}}^{(2)} = \alpha_2 A_{\text{дв}} \eta_2; \quad \dots; \quad A_{\text{пс}}^{(n)} = \alpha_n A_{\text{дв}} \eta_n.$$

В соответствии с определением

$$\eta_{\text{об}} = \frac{A_{\text{пс}}}{A_{\text{дв}}} = \frac{\alpha_1 A_{\text{дв}} \eta_1 + \alpha_2 A_{\text{дв}} \eta_2 + \dots + \alpha_n A_{\text{дв}} \eta_n}{A_{\text{дв}}} \quad (28.23)$$

или

$$\eta_{\text{об}} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \eta_i,$$

где n — число механизмов, соединенных параллельно,

Пример. Сложный механизм состоит из четырех механизмов, имеющих одинаковые механические КПД, равные 0,9. Определить общий КПД сложного механизма при последовательном и параллельном соединении механизмов.

Решение. Последовательное соединение. Общий КПД по формуле (28.22)

$$\eta_{об} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \eta_4 = 0,9^4 = 0,656.$$

Параллельное соединение. Общий КПД по формуле (28.23)

$$\eta_{об} = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \eta_i = \eta \sum_{i=1}^4 \alpha_i = \eta \cdot 1 = 0,9,$$

так как

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1.$$

Смешанные соединения. С точки зрения получения более высокого общего КПД параллельное соединение простых механизмов более выгодно, чем последовательное. Выбор соединения часто определяется не только стремлением получить высокие КПД, но назначением и особенностями конструкции сложного механизма. Поэтому на практике применяют комбинации последовательных и параллельных соединений механизмов. Смешанные соединения механизмов встречаются в приводах различных устройств, в частности счетно-вычислительных. Так, в быстродействующих печатных механизмах электронно-вычислительных машин простейшие механизмы состоят из зубчатых, винтовых и других передач. Полезное сопротивление расходуется на передвижение красящей ленты, колес и подачу бумаги.

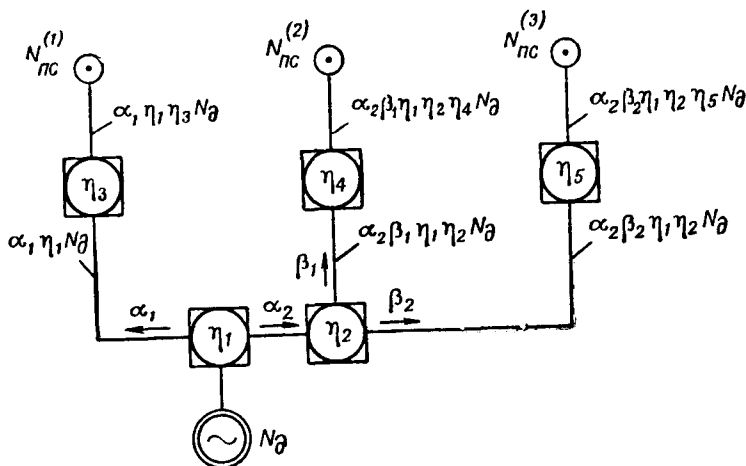


Рис. 28.8.

Пример. Определить общий КПД механизма, представленного на рис. 28.8, если распределение мощности, расходуемой отдельными механизмами, α_1 , α_2 и β_1 , β_2 , КПД механизмов заданы и их значения показаны на схеме.

Решение. Определяем мощность полезного сопротивления

$$N_{пс} = N_{пс}^1 + N_{пс}^2 + N_{пс}^3 = (\alpha_1 \eta_1 \eta_3 + \alpha_2 \beta_1 \eta_1 \eta_2 \eta_4 + \alpha_2 \beta_2 \eta_1 \eta_2 \eta_5) N_{дв}$$

или

$$N_{пс} = \eta_1 [\alpha_1 \eta_3 + \alpha_2 \eta_2 (\beta_1 \eta_4 + \beta_2 \eta_5)] N_{дв}.$$

Определяем общий КПД механизма

$$\eta_{\text{об}} = \frac{N_{\text{пс}}}{N_{\text{дв}}} = \eta_1 [\alpha_1 \eta_3 + \alpha_2 \eta_2 (\beta_1 \eta_4 + \beta_2 \eta_6)].$$

Пример. Мощность, передаваемая ведущим валом зубчатой передачи, равна $N_1 = 200$ кВт при частоте вращения $n = 600$ об/мин. Определить вращающий момент $M_в$, действующий на ведомом валу, если КПД передачи $\eta = 0,9$, а передаточное число $i_{1,2} = 2$ (рис. 28.9).

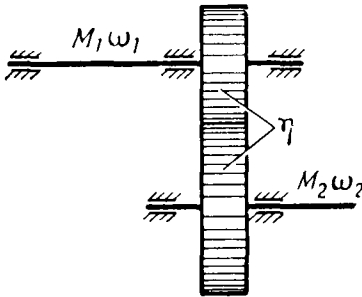


Рис. 28.9.

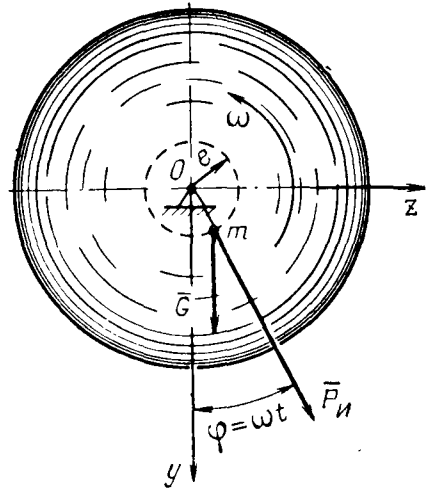


Рис. 28.10.

Решение. Вращающий момент, действующий на ведущем валу:

$$M_1 = 97400 \frac{N_1}{n_1} [\text{кгс} \cdot \text{см}] = 974 \frac{N_1}{n_1} [\text{кгс} \cdot \text{м}] = 9550 \frac{N_1}{n_1} [\text{Н} \cdot \text{м}].$$

Определяем мощность, передаваемую ведомым валом:

$$\begin{aligned} N_2 &= \eta N_1 \text{ или } M_2 \omega_2 = \eta M_1 \omega_1, \text{ откуда } M_2 = M_1 \frac{\omega_1}{\omega_2} \eta = M_1 i_1 \eta = \\ &= 97400 \frac{N_1}{n_1} i_1 \eta = 97400 \cdot \frac{200}{600} \cdot 2 \cdot 0,9 = 58500 \text{ кгс} \cdot \text{м} = 5750 \text{ Н} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

§ 150. ПОНЯТИЕ ОБ УРАВНОВЕШИВАНИИ ВРАЩАЮЩИХСЯ МАСС

При движении звеньев механизмов и машин с ускорениями возникают силы и моменты сил инерции. Вследствие этого появляются дополнительные напряжения и деформации звеньев, изменяется давление на стойку (опоры), увеличиваются трение и износ подшипников, появляются вибрации, которые могут быть причиной аварии. Все это снижает точность и надежность работы механизмов, машин и приборов и уменьшает срок их службы.

Рассмотрим статически неуравновешенное колесо (рис. 28.10), т. е. такое, центр тяжести которого не совпадает с геометрической осью вращения. Это может произойти из-за неравномерности рас-

пределения материала относительно оси вращения или неправильной посадки детали на вал, т. е. по технологической или монтажной причине.

В некоторых случаях неуравновешенность является особенностью конструкции (коленчатый вал). При вращении шкива с постоянной угловой скоростью ω величина центробежной силы инерции, направленная от оси вращения, будет равна

$$P_n = me\omega^2 = \frac{G}{g} e\omega^2,$$

где $m = \frac{G}{g}$ — масса колеса или шкива с валом;

e — эксцентриситет — расстояние от оси вращения до центра тяжести колеса или шкива.

Проекция этой силы на неподвижные оси прямоугольной системы координат будут (рис. 28.10):

$$\left. \begin{aligned} Y = P_y &= G + \frac{G}{g} e\omega^2 \cos \omega t = G \left(1 + \frac{e\omega^2}{g} \cos \omega t \right); \\ Z = P_z &= \frac{G}{g} e\omega^2 \sin \omega t, \end{aligned} \right\} \quad (28.24)$$

где

$$\omega t = \varphi.$$

Максимальное значение вертикальной силы будет при $\varphi = 0$

$$Y_{\max} = G \left(1 + \frac{e\omega^2}{g} \right) = Gk_{\text{дин}}, \quad (28.25)$$

где динамический коэффициент $k_{\text{дин}} = 1 + \frac{e\omega^2}{g} > 1$.

Минимальное значение вертикальной силы будет при $\varphi = \pi$

$$Y_{\min} = G \left(1 - \frac{e\omega^2}{g} \right). \quad (28.26)$$

При $\frac{e\omega^2}{g} > 1$ сила Y_{\min} будет направлена по вертикали вверх. Из полученных равенств (28.24) — (28.26) следует, что:

а) силы, действующие на подшипники, являются функцией угла поворота вала $\varphi = \omega t$; наибольшие значения вертикальных составляющих этих сил равны (рис. 28.11):

$$R_A = k_{\text{дин}} \frac{Gb}{l}; \quad R_B = k_{\text{дин}} \frac{Ga}{l},$$

т. е. они превышают статические; так, если ротор гироскопического прибора вращается с $n = 18000$ об/мин ($\omega = 600\pi$ рад/с), то при эксцентриситете, равном $e = 0,1$ мм $= 1 \cdot 10^{-4}$ м, динамический коэффициент будет

$$k_{\text{дин}} = 1 + \frac{e\omega^2}{g} = 1 + \frac{1 \cdot 10^{-4} (600\pi)^2}{9,8} \approx 37,$$

т. е. силы, действующие на подшипники вала, в 37 раз превышают статические;

б) в некоторые моменты времени появляются силы, вызывающие износ верхней и боковых частей вкладышей подшипников;

в) увеличиваются напряжения в сечениях вала и их перемещения;

г) вал подвергается действию переменных нагрузок, вызывающих за цикл при некоторых условиях даже изменение знака напряжений, что может вызвать усталость материала и как следствие разрушение вала.

Периодически изменяющиеся нагрузки вызывают нежелательные вынужденные колебания, амплитуда которых может достигнуть недопустимо больших величин.

Пусть механическая система состоит из n масс, которые совершают вращательное движение вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью ω . Условием статической уравновешенности такой системы будет равенство нулю главного вектора сил инерции, т. е.

Пусть механическая система состоит из n масс, которые совершают вращательное движение вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью ω . Условием статической уравновешенности такой системы будет равенство нулю главного вектора сил инерции, т. е.

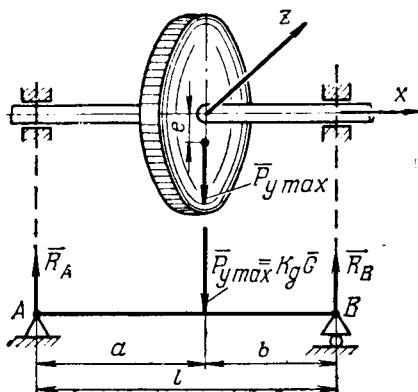


Рис. 28.11.

$$\bar{R}_n = \sum_{i=1}^n \bar{P}_{ni} = \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_i = \frac{\omega^2}{g} \sum_{i=1}^n G_i \bar{r}_i = 0, \quad (28.27)$$

где сила инерции i -й массы $P_{ni} = \omega^2 m_i \bar{r}_i$ и $m_i = \frac{G_i}{g}$.

В равенстве (28.27) под \bar{r}_i следует понимать радиус-вектор i -й массы, отсчитываемый от неподвижной оси вращения.

Если равенство (28.27) не соблюдается, система является статически неуравновешенной, многоугольник сил инерции не замкнут, имеет место статический дисбаланс, который может быть сведен до минимума за счет установки добавочных масс. В сложных механических системах уравновешенность можно получить за счет взаимодействия сил инерции звеньев механизма (многоцилиндровые двигатели).

Добавочная масса — масса противовеса, обеспечивающая статическую уравновешенность, определяется из условия, что многоугольник сил инерции замкнут, т. е. чтобы

$$\omega^2 \sum m_i \bar{r}_i + \omega^2 m_{nc} \bar{r}_{nc} = 0 \quad (28.28)$$

или после сокращения

$$G_1 \bar{r}_1 + G_2 \bar{r}_2 + \dots + G_{nc} \bar{r}_{nc} = 0, \quad (28.28a)$$

где $G_{\text{пс}}\bar{r}_{\text{пс}}$ — статический дисбаланс — вектор, который может быть найден:

— графически как замыкающий векторного многоугольника сил, построенного для определенного момента времени;

— аналитически, определяя проекции всех сил по оси неподвижной системы прямоугольных координат.

В дальнейшем воспользуемся графическим способом, как более наглядным. Зная величину замыкающего вектора, задаются величиной $r_{\text{пс}}$ и определяют вес противовеса $G_{\text{пс}}$.

Таким образом, при статическом уравнивании вращающихся масс системы стремятся вращающиеся массы распределить так, чтобы ось вращения системы проходила через ее центр масс.

Условием динамической уравновешенности рассматриваемой системы будет равенство нулю главного момента сил инерции при приведении их к центру масс, т. е.

$$\bar{M}_{\text{ис}} = \sum_{i=1}^n \bar{m}_c (\bar{P}_{\text{и}i}) = \sum_{i=1}^n \bar{m}_c (\omega^2 m_i \bar{r}_i) = \omega^2 \sum_{i=1}^n \bar{m}_c (m_i \bar{r}_i) = 0. \quad (28.29)$$

В дальнейшем условно вектор момента силы инерции каждой массы относительно, например, центра масс C системы $\bar{m}_c (\bar{P}_{\text{и}i})$ направляют по линии действия силы $\bar{P}_{\text{и}i}$, т. е. поворачивая его на угол 90° . Тогда условие динамической уравновешенности системы будет

$$\bar{M}_{\text{ис}} = \omega^2 \sum_{i=1}^n \bar{m}_c (m_i \bar{r}_i) = \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_i a_i = \frac{\omega^2}{g} \sum_{i=1}^n G_i \bar{r}_i a_i = 0, \quad (28.30)$$

где a_i — длина перпендикуляра, опущенного из точки C на линию действия $\bar{P}_{\text{и}i}$.

Если равенство (28.30) не соблюдается, система является динамически неуравновешенной, многоугольник моментов сил инерции не замкнут, имеет место динамический дисбаланс. Подбираем противовес весом $G_{\text{пд}}$ из условия, что

$$G_1 a_1 \bar{r}_1 + G_2 a_2 \bar{r}_2 + \dots + G_{\text{пс}} a_{\text{пс}} \bar{r}_{\text{пс}} + G_{\text{пд}} l_{\text{пд}} \bar{r}_{\text{пд}} = 0, \quad (28.31)$$

где $G_{\text{пд}} l_{\text{пд}} \bar{r}_{\text{пд}}$ — динамический дисбаланс — вектор, который может быть определен графически как замыкающий векторного многоугольника. Если система статически уравновешена ($\bar{R}_{\text{и}} = 0$), за точку приведения сил инерции может быть взята любая точка, лежащая на оси вращения. При этом, чтобы не нарушить статическую уравновешенность, динамический дисбаланс устраняется с помощью двух противовесов, образующих пару сил. Задаваясь $l_{\text{пд}}$ и величиной $r_{\text{пд}}$, определяют $G_{\text{пд}}$ — вес каждого противовеса.

Условием полной статической и динамической уравновешенности являются равенства нулю главного вектора и главного момента сил инерции, т. е. уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}_n &= \sum_{i=1}^n G_i \bar{r}_i + G_{nc} \bar{r}_{nc} = 0; \\ \bar{M}_n &= \sum_{i=1}^n G_i \bar{r}_i a_i + G_{nc} a_{nc} \bar{r}_{nc} + G_{нд} I_{нд} \bar{r}_{нд} = 0. \end{aligned} \right\} (28.32)$$

Процесс выявления сил и моментов сил инерции и сведение дисбаланса до минимальных величин называется соответственно статическим, динамическим или полным уравновешиванием или балансировкой.

Уравновешивание сил инерции механизма сводится к такому распределению масс звеньев механизма, при котором полностью или частично устраняется давление подвижных звеньев на стойку механизма.

Для дискообразных тел, как-то: зубчатых колес, шкивов, маховиков, тонких дисков и т. п.—обычно проводят только статическое уравновешивание.

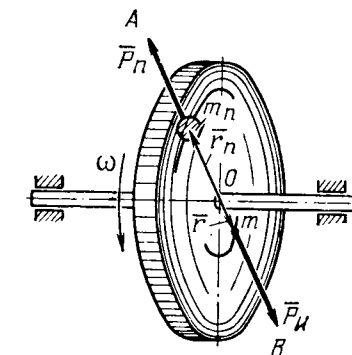


Рис. 28.12.

Пусть диск, вращающийся вокруг неподвижной оси, имеет центр тяжести, смещенный на расстояние r от оси вращения. Для статического уравновешивания достаточно поместить противовес (рис. 28.12) массой m_n в той же плоскости вращения, на прямой AOB , в точке, расстояние до которой $|\bar{r}_n|$ определяется из условия

$$m_n \omega^2 |\bar{r}_n| = m \omega^2 |\bar{r}|, \quad (28.33)$$

откуда

$$|\bar{r}_n| = \frac{m |\bar{r}|}{m_n} = \frac{G |\bar{r}|}{G_n},$$

где $G r$ — величина статического дисбаланса вращающегося диска.

Для статического уравновешивания n масс, расположенных в одной плоскости, на $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n$ (рис. 28.13) от оси вращения, можно использовать одну массу. Величина этой массы m_n определяется из условия, при котором многоугольник сил инерции был бы замкнут (28.28).

Статическая балансировка тел вращения (диски, маховики и т. п.) производится на балансировочных станках. Простейший из них представлен на рис. 28.14. Он состоит из двух призм, установленных строго горизонтально и параллельно друг другу. Вал

с диском, подлежащие статической балансировке, укладываются на призмы-опоры. Вследствие наличия дисбаланса вал с диском займет такое положение, при котором центр тяжести системы C

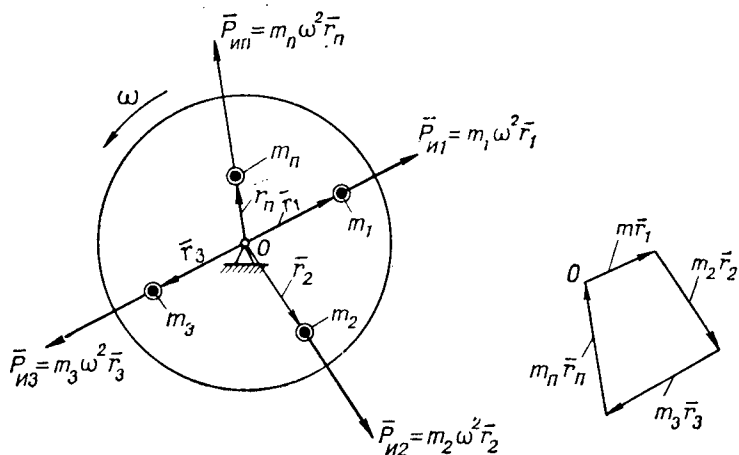


Рис. 28.13.

окажется в низшем положении (положение устойчивого равновесия). Противовес должен быть установлен на вертикальной прямой $I-I$ выше оси вращения*.

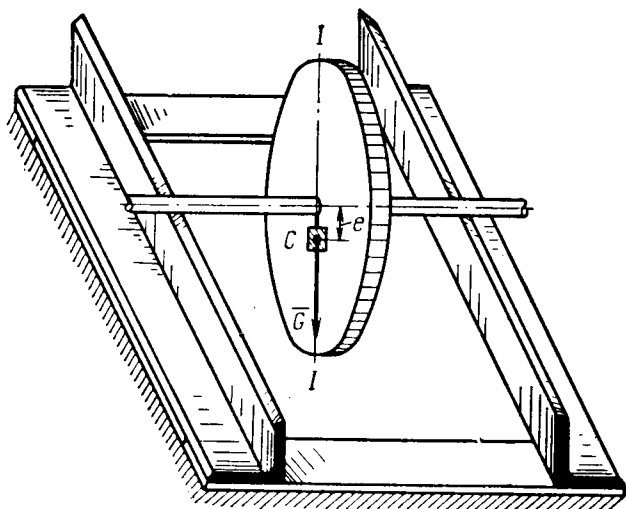


Рис. 28.14.

Для вращающихся звеньев значительной длины (барабаны, роторы многоступенчатых турбин, коленчатые валы и т. д.) кроме

* Последовательность балансировки изложена в руководствах по проведению лабораторных работ по механике,

статического должно быть проведено и динамическое уравновешивание с помощью противовесов.

На рис. 28.15 представлен цилиндр, уравновешенный статически, ($m_1 r_1 = m_2 r_2$), но неуравновешенный динамически; при этом

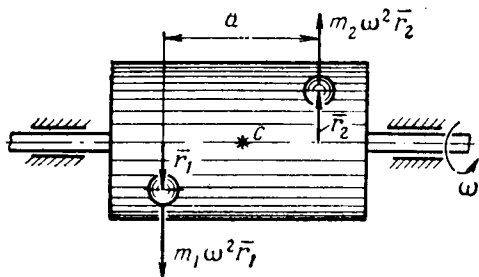


Рис. 28.15.

величина неуравновешенного момента сил инерции равна $M_{и} = m\omega^2 r a$ (при $m_1 = m_2 = m$, $r_1 = r_2 = r$).

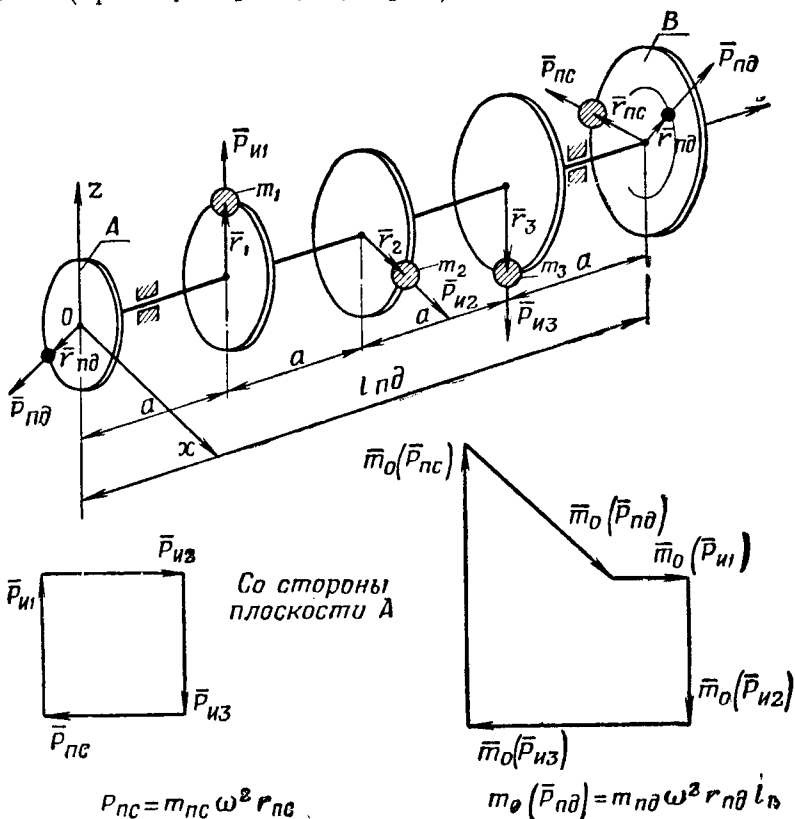


Рис. 28.16.

На рис. 28.16 представлен пример графического решения задачи уравновешивания системы, состоящей из трех неуравнове-

шенных дисков. За плоскости расположения противовесов выбраны плоскости *A* и *B*. Задачу рекомендуется решать в такой последовательности:

- определить величины сил инерции $P_{ин}$;
- выбрать масштаб и построить многоугольник сил инерции;
- определить величину и направление замыкающего вектора $\bar{P}_{пс}$;
- задаваясь величиной $r_{пс}$, определить требуемую массу противовеса по равенству

$$m_{пс} = \frac{P_{пс}}{\omega^2 r_{пс}},$$

которую помещаем в плоскости *B*;

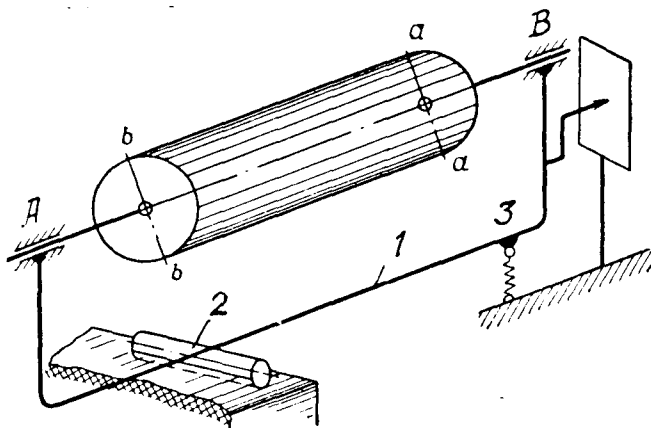


Рис. 28.17.

— определить величины моментов сил инерции относительно любой точки, например, точки *O*;

— выбрать масштаб и построить многоугольник моментов от сил инерции; определить величину и направление замыкающего вектора $\bar{M}_{п} = \bar{m}_0(\bar{P}_{пд})$; задаваясь величиной $r_{пд}$ и зная плечо пары $l_{пд}$, которое в рассматриваемом случае равно расстоянию между плоскостями *A* и *B*, вычисляем $m_{пд}$ по формуле

$$m_{пд} = \frac{m_0(\bar{P}_{пд})}{l_{пд} r_{пд} \omega^2}. \quad (28.34)$$

За плоскости установки противовеса могут быть выбраны и другие, например плоскости первого и последнего дисков.

Динамическая балансировка. Динамическая балансировка осуществляется после статической на специальных станках. На рис. 28.17 представлена в качестве примера схема такого станка. Рама-1 имеет подшипники *A* и *B*, в которые устанавливаются вал с цилиндром, подлежащие динамическому уравниванию. Рама опирается в точке 2 на шарнир, вокруг которого она может вращаться, и в точке 3 на пружину.

Система обладает собственной частотой. Для обнаружения динамической неуравновешенности пользуются тем, что при изменении числа оборотов цилиндра наступает резонанс, когда частота собственных колебаний системы совпадает с частотой возмущающих сил. Для уменьшения неуравновешенного момента сил инерции, которые и вызывают вынужденные колебания, добавляют грузики в соответствии с направлением \bar{M}_H в плоскости $a-a$ и под углом 180° в плоскости $b-b$ на равных расстояниях от оси вращения. Подобная операция повторяется до тех пор, пока рамка с цилиндром при числах оборотов вала, близких или равных резонансному, почти не будет совершать колебаний; цилиндр будет уравновешен.

§ 151. ПОНЯТИЕ ОБ АМОРТИЗАЦИИ И УСПОКОЕНИИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Машины и механизмы, используемые в Военно-Морском Флоте, могут являться источником, вызывающим вибрации, например дизельные установки, пусковые установки военно-морского оружия и т. д., либо сами могут подвергаться ударным и вибрационным нагрузкам, например при приводнении авиационных торпед или мин, колебаниях звеньев механизмов и т. д.

Устройства, уменьшающие действие внезапно приложенных или переменных по времени периодических нагрузок, называются амортизаторами. Конструкции амортизаторов основаны на принципе преобразования части кинетической энергии движущихся масс в другой вид энергии. Амортизаторы могут быть пружинные, резиновые и др.

Система, состоящая из механизма и амортизаторов, является упругой системой, которая под действием возмущений может быть приведена в состояние колебаний.

Устройства, которые предназначены для уменьшения продолжительности и амплитуды колебаний, называются успокоителями или демпферами. Успокоители нашли широкое распространение как в силовых установках (например, демпферы крутильных колебаний в дизельных установках), так и в приборах. В приборах успокоители служат для демпфирования (гашения) собственных колебаний подвижных частей, вызванных ударной или внезапно приложенной нагрузкой, или вынужденных колебаний, вызванных периодически изменяющейся нагрузкой. Установка успокоителей позволяет снять неискаженные показания приборов, установленных на корабельных двигателях, ракетах, самолетах и т. п. Демпфирование свободных колебаний достигается введением в прибор дополнительных сопротивлений. Отметим, что если момент сил сопротивления M_c создать за счет трения в подшипниках, то увеличение сил трения действительно способствует успокоению системы. Однако одновременно увеличивается и ошибка в показаниях прибора, так как трение действует и в состоянии

покою. Поэтому в приборах стремятся по возможности уменьшить трение, а момент M_c , демпфирующий систему, создать таким, чтобы он был пропорционален угловой скорости, т. е. $M_c = \beta_y \frac{d\varphi}{dt}$

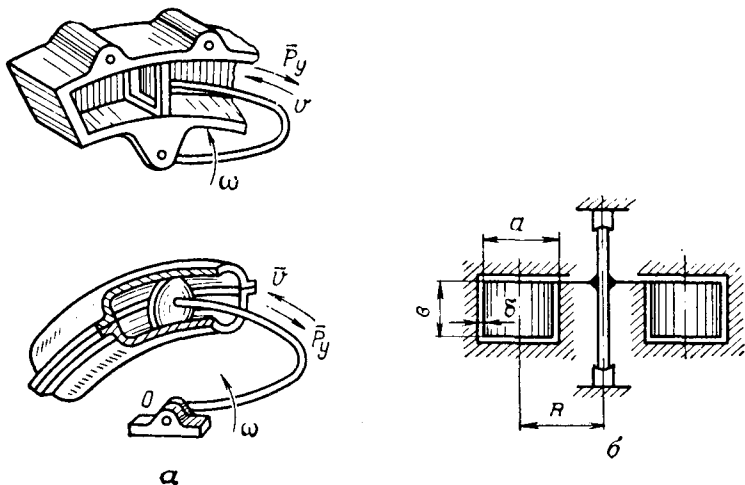


Рис. 28.18.

(в покое $\frac{d\varphi}{dt} = 0$). Коэффициент успокоения β_y определяется расчетным или опытным путем. В зависимости от способа демпфи-

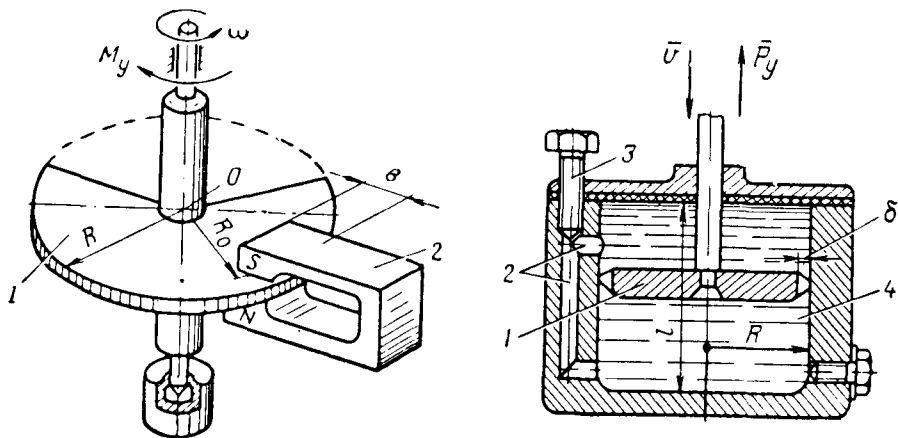


Рис. 28.19.

Рис. 28.20.

рования колебаний успокоители могут быть воздушными, электромагнитными, гидравлическими и т. д.

Воздушные успокоители просты и дешевы (рис. 28.18). Они бывают крыльчатые или поршневые. Применяются воздушные

успокоители тогда, когда требуется получить небольшое тормозящее усилие или когда по условиям эксплуатации невозможно применить другие.

Электромагнитные успокоители (рис. 28.19). Тормозящее усилие создается при движении металлического диска или сектора *I* в магнитном поле магнита (в стационарных приборах — электромагнита). Успокоители этого типа хорошо регулируются с помощью шунта, надежны, по дорожке других. Основным недостатком их — возможное действие полей успокоителя на электромагнитные элементы прибора.

Жидкостные успокоители позволяют получить значительное успокоение, но степень их успокоения зависит от температуры жидкости, заполняющей систему (турбинное или трансформаторное масло, глицерин и др.). Схема простейшего успокоителя представлена на рис. 28.20. Поршень *1*, связанный с подвижной системой, перемещаясь в цилиндре, заполненном жидкостью, прогоняет ее через зазор и отверстие *2*. При закрытом отверстии винтом *3* эффект успокоения наибольший. Подробные сведения о расчете успокоителей можно найти в специальной литературе.

ПОНЯТИЕ О РЕГУЛИРОВАНИИ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 152. ОБЩИЕ ЗАДАЧИ РЕГУЛИРОВАНИЯ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ

Из трех периодов движения механизма, рассмотренных ранее (§ 148), основным, часто наиболее продолжительным, является установившийся. В этот период машина или механизм выполняют рабочие операции, для которых они предназначены (судовой дизель или турбина, приборы управления и т. д.).

При установившемся движении обобщенная координата является периодической функцией времени. Пусть ведущее звено является звеном приведения и совершает вращательное движение. За обобщенную координату механизма с одной степенью свободы принимаем φ — угол поворота ведущего звена. Обозначим φ_1 и φ_2 значения обобщенной координаты, соответствующие началу и концу периода ее изменения. Тогда установившееся движение характеризуется тем, что

$$I_{\text{пр}}(\varphi_2) \frac{\omega_2^2}{2} - I_{\text{пр}}(\varphi_1) \frac{\omega_1^2}{2} = A_{\text{дв}} - A_{\text{с}} = 0, \quad (29.1)$$

т. е. за период изменения φ работа движущих сил равна работе сопротивления. Учтем, что $I_{\text{пр}}(\varphi_2) = I_{\text{пр}}(\varphi_1)$. Тогда $\omega_2 = \omega_1$.

Таким образом, при установившемся движении угловая скорость через период, равный или кратный периоду оборота ведущего звена, возвращается к своему значению в начале периода. Установившееся движение механизма может быть равномерным и неравномерным.

При равномерном движении равенство (29.1) соблюдается для любого момента времени; угловая скорость ведущего звена $\omega = \text{const}$.

При неравномерном движении в пределах периода изменения обобщенной координаты угловая скорость ведущего звена изменяется, т. е. $\omega = \omega(\varphi)$. Очевидно, при $A_{\text{дв}} > A_{\text{с}}$ угловая скорость ω увеличивается, при $A_{\text{дв}} < A_{\text{с}}$ уменьшается. Отметим, что соотношение между $A_{\text{дв}}$ и $A_{\text{с}}$ может изменяться как вследствие изменения движущих сил, например давления газов в цилиндрах двигателя

внутреннего сгорания, так и изменения сил сопротивления, например изменения нагрузки на корабельный генератор электрического тока. Кроме того, в течение периода может изменяться $I_{пр}$ — приведенный момент инерции механизма.

На рис. 29.1 представлены кривые $M_{дв} = M_{дв}(\varphi)$, $M_c = \text{const}$ и $\omega = \omega(t)$, из которых видно, что угловая скорость достигает наибольшего значения ω_{\max} в точках 2' и 4' и наименьшего ω_{\min} —

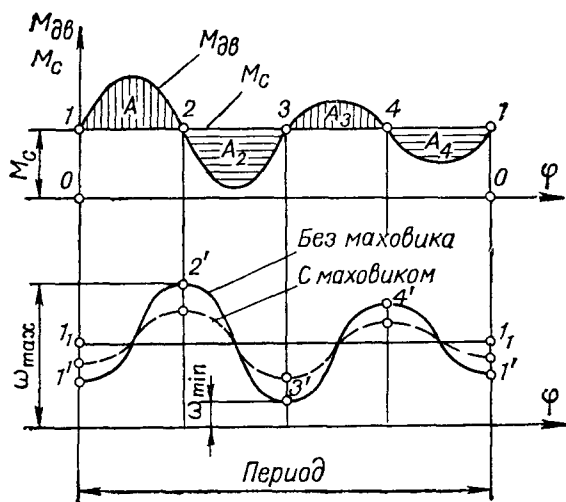


Рис. 29.1.

в точках 3' и 1'. Вводим понятия средней угловой скорости $\omega_{\text{ср}}$ и коэффициента неравномерности δ . Средней угловой скоростью называют скорость такого равномерного вращения, при которой звено повернется на угол φ за такой же промежуток времени, что и при неравномерном его вращении. Принимаем, что

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}. \quad (29.2)$$

Коэффициентом неравномерности движения механизма δ называется отношение разности максимальной и минимальной угловых скоростей звена приведения к их среднему значению за один цикл установившегося движения, т. е.

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{ср}}}. \quad (29.3)$$

По условиям работы обычно известно, что $\omega_{\text{ср}} = \frac{\pi n}{30}$, и задается допускаемый коэффициент неравномерности $[\delta]$. В связи с этим возникают две задачи, а именно: как обеспечить заданные величины $\omega_{\text{ср}}$ и δ при периодическом изменении I_n и $A_{дв} - A_c$, т. е. при установившемся движении, и в том случае, когда $A_{дв} - A_c$

является непериодической функцией времени, как, например, при внезапном сбросе нагрузки, т. е. при неустановившемся движении. Первая задача решается с помощью маховика, вторая — с помощью специального прибора — регулятора. Процесс, связанный с поддержанием значений определенных параметров в требуемых, наперед заданных, пределах, называется регулированием. В том случае, когда значение параметра должно изменяться по определенному закону, регулирование называется программным.

§ 153. РЕГУЛИРОВАНИЕ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ С ПОМОЩЬЮ МАХОВИКА

Маховиком называется колесо, большая часть массы которого, как правило, сосредоточена на ободе. Маховик имеет большой момент инерции относительно оси вращения и обычно устанавливается на ведущий вал механизма. При изменении угловой скорости вала возникающий момент сил инерции маховика препятствует этому изменению и уменьшает амплитуду колебаний угловой скорости. Пусть $A_{дв} > A_c$, т. е. $\Delta A = A_{дв} - A_c > 0$. Тогда кинетическая энергия маховика увеличивается. В дальнейшем при $A_{дв} < A_c$, т. е. при $\Delta A < 0$, угловая скорость ведущего вала начинает уменьшаться и тогда маховик является как бы дополнительным источником энергии и отдает запасенную им кинетическую энергию, препятствуя уменьшению угловой скорости вала. Рассмотрим, как подобрать момент инерции маховика так, чтобы отклонения угловой скорости ведущего звена ω_{max} и ω_{min} от среднего значения ω_{cp} находились в заданных пределах. Эти пределы определяются из равенств (29.3) и (29.4):

$$\omega_{max} + \omega_{min} = 2\omega_{cp} \quad \text{и} \quad \omega_{max} - \omega_{min} = \omega_{cp}\delta,$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \omega_{max} &= \omega_{cp} \left(1 + \frac{\delta}{2} \right); \\ \omega_{min} &= \omega_{cp} \left(1 - \frac{\delta}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (29.5)$$

Обозначим искомый момент инерции маховика через I_M . Тогда, применяя теорему о изменении кинетической энергии, можно записать

$$[I_{пр}(\varphi_2) + I_M] \frac{\omega_{max}^2}{2} - [I_{пр}(\varphi_1) + I_M] \frac{\omega_{min}^2}{2} = A_{дв} - A_c,$$

где $I_{пр} = f(\varphi)$. Обычно $I_{пр} \ll I_M$. Из последнего равенства следует

$$\frac{1}{2} I_M (\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2) = -I_{пр}(\varphi_2) \frac{\omega_{max}^2}{2} + I_{пр}(\varphi_1) \frac{\omega_{min}^2}{2} + A_{дв} - A_c. \quad (29.6)$$

В правой части уравнения (29.6) все величины могут быть определены: ω_{max} и ω_{min} при известном δ по формуле (29.5), $I_{пр}(\varphi_2)$

и $I_{\text{пр}}(\varphi_1)$ — графически или аналитически, работа сил — из равенств $A_{\text{дв}} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_{\text{дв}} d\varphi$; $A_c = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_c d\varphi$.

Обозначим всю правую часть уравнения (29.6) индексом ΔA . Тогда

$$\frac{1}{2} I_M (\omega_{\text{max}}^2 - \omega_{\text{min}}^2) = \Delta A. \quad (29.7)$$

Используя (29.3) и (29.4), получаем

$$\omega_{\text{max}}^2 - \omega_{\text{min}}^2 = (\omega_{\text{max}} + \omega_{\text{min}}) (\omega_{\text{max}} - \omega_{\text{min}}) = 2\omega_{\text{cp}}^2 \delta.$$

Следовательно, равенство (29.7) можно записать в виде

$$I_M \omega_{\text{cp}}^2 [\delta] = \Delta A,$$

откуда

$$I_M = \frac{\Delta A}{\omega_{\text{cp}}^2 [\delta]} = \frac{900 \Delta A}{\pi^2 n^2 [\delta]} \approx \frac{90 \Delta A}{n^2 [\delta]}, \quad (29.8)$$

где n — номинальное число оборотов в минуту;

$[\delta]$ — допускаемый коэффициент неравномерности.

Так, для судовых двигателей с винтом $[\delta] = 0,05 \div 0,025$; для электрогенераторов постоянного тока $[\delta] = 0,01 \div 0,005$; для электрогенераторов переменного тока $[\delta] = 0,005 \div 0,003$ и т. д. Диаметр маховика определяют из равенства (29.8) и условия, что $I_M = \frac{G}{g} \left(\frac{D}{2}\right)^2 =$

$= \frac{GD^2}{4g}$, где D — диаметр окружности центров тяжести обода маховика. У выполненных маховиков ширина обода $b = \phi D$, толщина $h = 0,4 b = 0,4 \phi D$, где $\phi = 0,08 \div 0,2$. Тогда, пренебрегая массой спиц:

$$I_M = \frac{GD^2}{4g} = \frac{\gamma \pi D h b D^2}{4g} = \frac{\gamma \pi D \cdot 0,4 \phi D \phi D D^2}{4g} = \frac{90 \Delta A}{n^2 [\delta]},$$

где γ — вес единицы объема. После простейших преобразований

$$D = \sqrt[5]{\frac{900 \Delta A g}{\pi \gamma \phi^2 n^2 [\delta]}}. \quad (29.9)$$

Полученные размеры маховика должны быть проверены по условию прочности, вывод которого опускаем. При этом величина скорости точек обода маховика должна удовлетворять условию

$$v_{\text{max}} \leq \sqrt{\frac{g [\sigma]_p}{\gamma}}, \quad (29.10)$$

где $[\sigma]_p$ — допускаемое напряжение на растяжение. Тогда, учитывая, что $v = \omega \frac{D}{2}$ и $\omega = \frac{\pi n}{30}$, получаем

$$D \leq \frac{2}{\omega} \sqrt{\frac{g [\sigma]_p}{\gamma}} = \frac{60}{\pi n} \sqrt{\frac{g [\sigma]_p}{\gamma}}. \quad (29.11)$$

Обычно допускают в зависимости от $[\sigma]_p$ и γ в формуле (29.10) для стальных маховиков $v_{\max} = 70 \div 120$ м/с, для чугунных — $v_{\max} = 30 \div 40$ м/с. Так, для чугуна при $\gamma = 7,2 \cdot 10^{-2}$ М·Н/М³ $[\sigma]_p = 15$ МН/М²; $v_{\max} \cong 45$ м/с.

§ 154. ПОНЯТИЕ О РЕГУЛЯТОРАХ СКОРОСТИ

При установившемся режиме работы угловая скорость ведущего звена механизма или постоянна, или периодически изменяется, возвращаясь через период к первоначальному значению. Для выравнивания угловой скорости ведущего звена за время одного периода применяют маховик. В тех случаях, когда между момен-

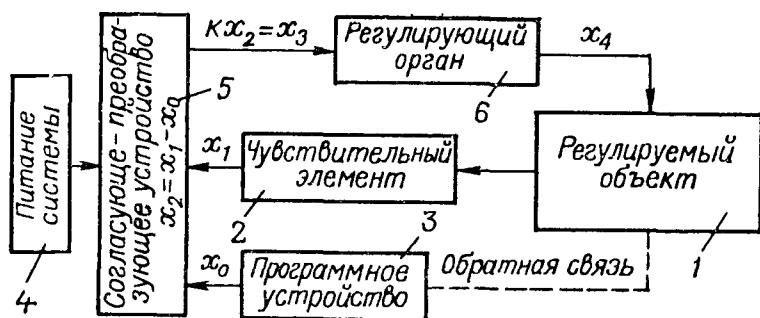


Рис. 29.2.

тами движущих сил и сил сопротивления нарушается равновесие и это носит неперIODический характер, движение механизма имеет неустановившийся характер и при $\Delta A > 0$ машина, как говорят, «пойдет в разнос». В этом случае инерция маховика не может быть использована для выравнивания угловой скорости, поэтому применяют специальные устройства — регуляторы. Регуляторами называются механизмы, предназначенные для автоматического поддержания (сохранения на определенном уровне) угловой скорости ведущего звена при изменяющихся моментах $M_{дв}$ и M_c . Так, при увеличении угловой скорости, связанной с уменьшением сил сопротивления, регулятор автоматически должен уменьшить величину движущих сил (например, уменьшить подачу топлива в дизель или газа в газовую турбину).

Схема автоматического регулирования угловой скорости представлена на рис. 29.2. За угловой скоростью объекта регулирования 1 следит датчик 2, который преобразует поступающий импульс в параметр x_1 . В специальном программном устройстве 3 вырабатывается параметр x_0 , соответствующий заданной угловой скорости $\omega_{ср}$. При нарушении режима работы механизма возникает разность $x_2 = x_1 - x_0$. Параметр x_2 усиливается в усилительно-преобразующем устройстве 5 до $x_3 = kx_2$, который затем поступает в регу-

лирующий орган 6. Последний воздействует либо на поступление энергии к регулируемому объекту, либо на величину сил сопротивления. Источник питания обозначен цифрой 4.

Одним из основных элементов регулятора является датчик 2, регистрирующий изменение угловой скорости. Наиболее часто в качестве датчиков скорости используют:

— грузы центробежного регулятора; центробежная сила инерции грузов пропорциональна квадрату угловой скорости;

— тахогенераторы, вырабатывающие электрический ток, напряжение или сила тока которого пропорциональна угловой скорости.

В некоторых механизмах и приборах требуется производить периодическую остановку и пуск, для чего используются специальные пусковые устройства.

Остановимся на принципе действия некоторых регуляторов скорости, применяемых в приборах*.

Тормозные регуляторы. В приборах с целью надежности работы $M_d > M_c$. Разность между ними $\Delta M = M_d - M_c$ идет на преодоление момента сопротивления тормозного устройства в самом регуляторе. Дополнительный тормозной момент увеличивается с повышением угловой скорости вращения ведущего звена. Тормозной момент может быть создан трением между тормозными башмаками и корпусом, трением о воздух, магнитоиндукционным сопротивлением, гидравлическим трением и т. д. Применяются тормозные регуляторы обычно в механизмах приборов малой мощности; энергия движущих сил расходуется на преодоление сил сопротивления механизма и регулятора.

Рассмотрим тормозной регулятор с трением о воздух с постоянным размахом крыльев прямоугольной формы. Приближенно можно принять, что сопротивление движению крыла в воздухе пропорционально квадрату скорости. Так, если выделить на крыле элементарную площадку $dF = h dx$, расположенную на расстоянии x от оси вращения, тогда величина элементарного момента сопротивления будет

$$dM_{\text{торм}} = x dP = x k v^2 dF = x k (x\omega)^2 dF = k \omega^2 h x^3 dx, \quad (29.12)$$

где k — коэффициент, зависящий от формы крыла и плотности воздуха, приближенно принимают равным $k = 0,8 \cdot 10^{-8} \text{ Н} \cdot \text{М}^{-4} \cdot \text{с}$;

$\omega = \frac{\pi n}{60}$ — угловая скорость крыльев;

h и b — высота и соответственно ширина одной лопасти (см).

Интегрируя равенство (29.12), получаем для двух крыльев

$$M_{\text{торм}} = 2k\omega^2 h \int_0^b x^3 dx = \frac{k\omega^2 h b^4}{2}. \quad (29.13)$$

* Более подробно см., например, в книге С. И. Борисова и др. «Теория механизмов и детали точных приборов». М., Машиностроение, 1966.

Если линейные размеры в формуле (29.13) брать в сантиметрах, тогда для получения достаточно большого тормозного момента число оборотов регулятора должно быть $n=1800—3000$ об/мин ($\omega=60\pi—100\pi$ рад/с). Для воздушных регуляторов с трением о воздух, но с переменным размахом крыльев

$$M_{\text{торм}} = \frac{k\omega^2hb^4}{2,5} \sin \alpha, \quad (29.14)$$

где угол α — угол между осью крыла и осью вращения.

Тормозные регуляторы осевого или радиального действия с трением между твердыми телами. В тормозных регуляторах подобного типа тормозное усилие создается за счет сил трения, возникающих между твердыми подвижными и неподвижными поверхностями регулятора. С увеличением угловой скорости регулятора увеличиваются силы инерции, а следовательно, и силы трения и, как следствие, тормозной момент. Торможение начинается при так называемом критическом числе оборотов регулятора.

Магнито-индукционные регуляторы. В результате взаимодействия магнитного поля и вихревых токов, возникающих в металлическом диске, вращающемся в поле постоянного магнита, возникает тормозной момент, пропорциональный угловой скорости диска ω .

Спускные регуляторы. Регуляторы предназначены для регулирования скорости периодическим пуском и остановкой регулируемого механизма (тахометры, счетчики различного назначения, реле, часовые механизмы и др. приборы). Продолжительность работы и остановка регулируется с помощью маятника или системы, состоящей из спирали и баланса. Более подробно с конструкцией и теорией регуляторов можно ознакомиться в специальной литературе.

**ПЕРЕДАТОЧНЫЕ МЕХАНИЗМЫ И ЭЛЕМЕНТЫ
МЕХАНИЗМОВ МАШИН И ПРИБОРОВ**

§ 155. ВВЕДЕНИЕ

В машинах и приборах, применяемых в Военно-Морском Флоте, чаще всего используются механизмы, назначение которых — передача и преобразование вращательного движения.

Практическая необходимость передачи вращательного движения обуславливается требованием изменения числа оборотов электродвигателей в больших пределах. Это необходимо при выполнении ряда задач. Поэтому между электродвигателями и машинами приходится устанавливать механизмы, которые служат для передачи вращающегося момента с заданным отношением угловых скоростей.

Кроме того, механизмы вращательного движения, и в частности зубчатые передачи, часто используются как механические трансформаторы для преобразования крутящего момента и скорости. Во многих кинематических схемах зубчатые передачи реверсируют направление вращения. В вычислительных устройствах в качестве суммирующих устройств применяются дифференциальные механизмы (разновидность зубчатых передач).

В данном разделе дано краткое изложение основ теории и устройства основных передаточных механизмов и деталей механизмов.

Г Л А В А 30

ПЕРЕДАТОЧНЫЕ МЕХАНИЗМЫ

§ 156. ФРИКЦИОННЫЕ МЕХАНИЗМЫ

Процесс передачи вращательного движения может происходить или с использованием сил трения, или путем зацепления.

Передача вращения конструктивно осуществляется либо в результате непосредственного касания ведущего и ведомого звеньев, либо на расстоянии путем применения в передачах гибкой нити — ремня или цепи.

Различают два случая передачи вращательного движения от ведущего звена:

— скорость ведомого звена должна быть постоянной в течение полного оборота;

— скорость ведомого звена в течение оборота должна периодически изменяться по заранее заданному закону.

В работе механических систем чаще всего наблюдается первый случай, и для передачи вращения в этом случае применяют круглые фрикционные и зубчатые колеса. Второй случай встречается более редко, и тогда применяют некруглые колеса.

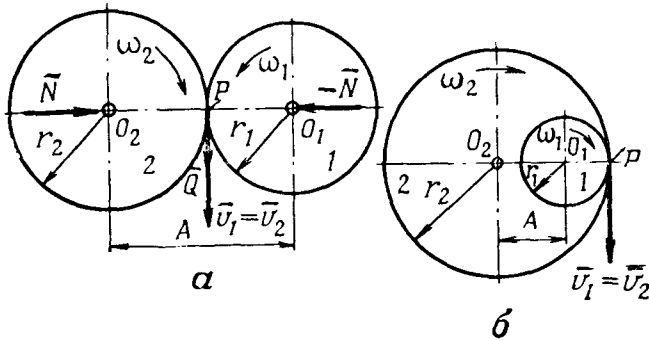


Рис. 30.1.

Рассмотрим основной параметр всех механизмов вращательного движения — передаточное число.

Наиболее простым механизмом, предназначенным для передачи вращательного движения, является фрикционный механизм (рис. 30.1).

Звенья фрикционной передачи выполнены в виде цилиндрических колес. Ведущее колесо может вращаться вокруг неподвижной оси O_1 . Ведомое, соприкасающееся с ведущим, вращается вокруг оси O_2 . Если приложить к колесам силу, сжимающую их, то вращение ведущего колеса будет передаваться ведомому благодаря трению, возникающему между колесами. При отсутствии проскальзывания между колесами $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$ и, следовательно,

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2, \quad (30.1)$$

где $\omega_1 = \frac{\pi n_1}{30}$ и r_1 — угловая скорость и соответственно радиус первого колеса;

$\omega_2 = \frac{\pi n_2}{30}$ и r_2 — угловая скорость и радиус второго колеса;
 n — число оборотов в минуту.

Из (30.1) следует

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{r_2}{r_1} = i. \quad (30.2)$$

Отношение угловой скорости ведущего колеса к угловой скорости ведомого называется передаточным числом.

Передаточное число является частным случаем более общего определения передаточного отношения.

Передаточным отношением называется отношение угловой скорости одного звена к другому в механизме с одной степенью свободы. Передаточное отношение обычно имеет двойной индекс, например, i_{12} или i_{21} , который показывает отношение угловых скоростей колес, какие рассматриваются.

Межцентровым расстоянием A называется расстояние, равное сумме радиусов колес (рис. 30.1, a), т. е.

$$A = r_1 + r_2, \quad (30.3)$$

величина постоянная при постоянном передаточном числе.

Во внешнем зацеплении (рис. 30.1, b) направления вращений колес противоположны, а точка касания P лежит между центрами колес. Во внутреннем зацеплении направления вращений колес одинаковы, а точка касания P тоже лежит на линии центров, но вне их.

Межцентровое расстояние при внутреннем зацеплении будет

$$A = r_2 - r_1 = \text{const.}$$

Для того чтобы колеса не проскальзывали относительно друг друга, необходимо, чтобы сила трения $F_{\text{тр}}$ между колесами была больше окружного усилия Q , т. е.

$$F_{\text{тр}} \geq Q,$$

где Q — передаваемое окружное усилие;

$F_{\text{тр}}$ — сила трения, равная

$$F_{\text{тр}} = fN,$$

где f — коэффициент трения;

N — нормальное усилие;

$$N \geq \frac{Q}{f}.$$

Большое усилие, необходимое для сжатия обоих колес, увеличивает потери на трение в подшипниках, снижает коэффициент полезного действия. Поэтому фрикционные колеса применяются для передачи сравнительно небольших окружных усилий. Кроме того, во фрикционных передачах трудно гарантировать постоянство передаточного числа, так как коэффициент трения в процессе работы может изменяться вследствие нагрева механизма, попадания масла на колеса и других причин. Все это ограничивает область применения фрикционных передач. Наибольшее применение нашли передачи, составленные из зубчатых колес.

§ 157. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧАХ

В тех случаях, когда важно иметь постоянное передаточное число, а также при передаче больших нагрузок применяют зубчатые колеса. В самой простой передаче не меньше двух колес. Оба они имеют выступы и впадины такой формы, что зубья одного колеса входят в впадины другого.

Передача вращательного движения зубчатыми колесами осуществляется с помощью нажатия зубьев ведущего колеса на зубья ведомого.

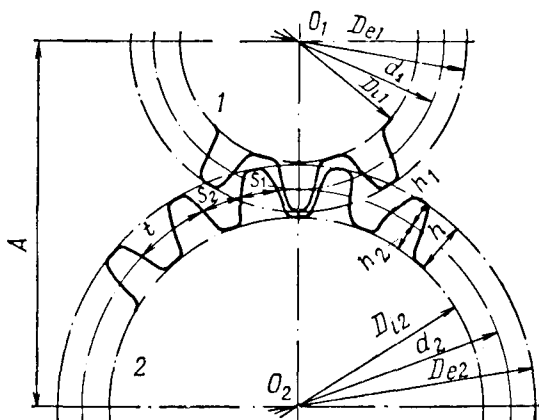


Рис. 30.2.

В современных машинах и приборах чаще всего используется зубчатая передача. Возможность передачи практически любой мощности, вращающего момента, работа с окружной скоростью от 0,02 м/с до 140 м/с, высокая надежность работы и ряд других достоинств обеспечили зубчатой передаче широкое применение.

В Военно-Морском Флоте зубчатые передачи применяются почти во всех образцах техники вооружения.

По взаимному расположению геометрических осей обычно различают:

- передачу с цилиндрическими колесами, применяемую, когда оси валов параллельны,— цилиндрические передачи;
- передачу с коническими колесами между валами, оси которых пересекаются,— конические передачи;
- передачу с винтовыми колесами и червячную, которые применяются при скрещивающихся осях валов,— червячные и винтовые передачи.

На рис. 30.2 приведено зацепление двух цилиндрических колес с прямыми зубьями. Рассмотрим основные элементы зубчатого зацепления.

Основное в зубчатом зацеплении—это окружности диаметров d_1 и d_2 , перекатывающиеся одна по другой без скольжения и называемые начальными окружностями.

Окружности диаметров D_{i_1} и D_{i_2} , ограничивающие глубину впадин зубьев, называются окружностями впадин. Окружности диаметров D_{e_1} и D_{e_2} , ограничивающие высоту зубьев, называются окружностями выступов. Расстояние t , измеренное по дуге начальной окружности между одноименными сторонами соседних зубьев, называется шагом зубчатого зацепления. Расстояние s_1 , измеренное по начальной окружности между сторонами одного зуба, называется толщиной зуба. Расстояние s_2 , измеренное по дуге начальной окружности между сторонами соседних зубьев, называется шириной впадины.

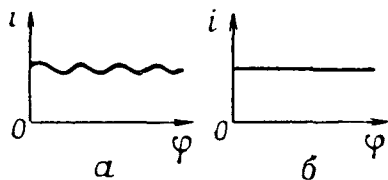


Рис. 30.3.

Расстояние h между окружностью выступов и окружностью впадин называется высотой зуба. Расстояние h' между окружностью выступов и начальной окружностью называется высотой головки зуба и аналогично расстояние h'' между окружностью впадин и начальной окружностью называется высотой ножки зуба. Таким образом, $h = h' + h''$.

Основной закон зубчатого зацепления. Главное требование, предъявляемое к зубчатой передаче, состоит в том, чтобы передаточное число i оставалось постоянным.

На первый взгляд кажется, что это выполняется само собой, если зубья расположить на окружностях круглых колес.

Однако этого недостаточно. Исследования показывают, что, для того чтобы обеспечить $i = \text{const}$, необходимо не только расположить зубья по окружности, но и выбрать соответствующий профиль зубьев.

При неправильно выбранном профиле зубьев закон изменения передаточного числа в зависимости от угла поворота графически представляется в виде волнистой линии (рис. 30.3, а). Колебание передаточного числа в течение периода вызовет неравномерный ход машины, толчки, излишний шум передач и, наконец, преждевременный износ машин и механизмов.

Закон зубчатого зацепления формулируется следующим образом: для обеспечения постоянства передаточного числа боковые профили зубьев должны очерчиваться по таким кривым, чтобы общая нормаль в точке соприкосновения профилей проходила через неизменную точку P , которая всегда должна находиться на линии центров и тем самым делить последнюю в постоянном отношении ($i = \text{const}$). Точка P называется полюсом зацепления.

Профили зубьев, соответствующие условиям данного закона, называются сопряженными. На рис. 30.3, б показана зависимость $i(\varphi)$ для сопряженного профиля.

Кривых, обеспечивающих $i = \text{const}$, может быть множество.

Однако на практике в большинстве случаев пользуются одним видом кривой — эвольвентой. Эвольвенты обеспечивают правильную передачу с постоянным передаточным числом. Кроме того, эвольвентные профили могут быть просто и точно изготовлены.

Модуль зубчатого зацепления. Если обозначить число зубьев ведущего колеса — шестерни z_1 , а число зубьев ведомого колеса z_2 , то длину начальной окружности можно представить как

$$\pi d_1 = z_1 t \text{ и } \pi d_2 = z_2 t,$$

откуда

$$d_1 = z_1 \frac{t}{\pi} \text{ и } d_2 = z_2 \frac{t}{\pi},$$

где t — шаг.

Как видно из формул, d_1 и d_2 — числа иррациональные, а потому и все размеры колес тоже будут иррациональными. Чтобы этого не было, введем новый параметр — модуль зубчатого зацепления m :

$$m = \frac{t}{\pi}$$

(модуль всегда выражается в мм).

Диаметры начальных окружностей в таком случае будут:

$$d_1 = z_1 m \text{ и } d_2 = z_2 m.$$

Все линейные параметры зубчатого колеса и зацепления двух колес выражаются через модуль. Тем самым упрощаются все расчеты, так как иррациональное число π исключено.

Модуль является как бы масштабным коэффициентом. Если, например, сравнить два колеса — одно с модулем 1 мм, а другое с модулем 3 мм, то размеры последнего при прочих равных условиях будут в три раза больше. Чем выше передаваемая зубчатым механизмом нагрузка, тем больше должен быть модуль колес. В приборах, где передаваемые нагрузки небольшие, колеса изготавливаются с мелким модулем (от 0,2 до 1,0 мм). При этом обеспечивается компактность механизма.

Значения модуля приводятся в таблицах стандартных модулей. Величина модуля, необходимого для каждой конкретной передачи, определяется из расчета зубьев на прочность. Покажем, как через модуль выражаются элементы зубчатого зацепления.

Нормальная высота головки зуба принята равной модулю $h' = m$, а высота ножки зуба $h'' = 1,25m$. Следовательно, диаметры окружностей выступов колес для внешнего зацепления равны:

$$D_{e_1} = d_1 + 2h = z_1 m + 2m = m(z_1 + 2); \quad (30.1)$$

$$D_{e_2} = d_2 + 2h = z_2 m + 2m = m(z_2 + 2). \quad (30.2)$$

Диаметры окружностей впадин колес равны:

$$D_{i_1} = d_1 - 2h'' = z_1 m - 2 \cdot 1,25m = m(z_1 - 2,5); \quad (30.3)$$

$$D_{i_2} = d_2 - 2h'' = z_2 m - 2 \cdot 1,25m = m(z_2 - 2,5). \quad (30.4)$$

Межцентровое расстояние A для внешнего зубчатого зацепления будет

$$A = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{z_1 m + z_2 m}{2} = \frac{m}{2} (z_1 + z_2)$$

или

$$A = \frac{m z_1}{2} (1 + i), \quad (30.5)$$

так как $z_2 = i z_1$.

Для внутреннего зацепления диаметры окружностей выступов будут равны:

$$D_{e_1} = m (z_1 + 2) \text{ и } D_{e_2} = m (z_2 - 2), \quad (30.6)$$

а диаметры окружностей впадин колес:

$$D_{i_1} = m (z_1 - 2,5) \text{ и } D_{i_2} = m (z_2 + 2,5). \quad (30.7)$$

Межцентровое расстояние для внутреннего зацепления будет

$$A = \frac{d_2 - d_1}{2} = \frac{m (z_2 - z_1)}{2}$$

или

$$A = \frac{m z_1}{2} (i - 1). \quad (30.8)$$

Коэффициент перекрытия и наименьшее количество зубьев шестерни. В процессе работы зубчатой передачи особое значение имеет количество пар одновременно зацепляющихся зубьев обоих колес.

Если требовалось бы обеспечить только передачу вращения, то достаточно было бы иметь в зацеплении не меньше одной пары зубьев. Однако при работе зубчатых колес на больших скоростях нарушается равномерность передачи окружных усилий, возникают шум и удары в зацеплении. Эти дефекты работы колес на больших скоростях объясняются погрешностями, допущенными при их изготовлении и монтаже, а также некоторой деформацией профилей зубьев.

Уменьшить вредное действие этих факторов и добиться плавной работы механизма можно путем увеличения количества пар одновременно зацепляющихся зубьев. В то же время излишне большое количество зубьев на колесе увеличивает размеры механизма.

Найдем критерий, определяющий количество пар зубьев, находящихся в зацеплении одновременно. Из рис. 30.4 следует, что зубья войдут в зацепление в точке A и выйдут из зацепления в точке B .

Эти точки получаются в результате пересечения окружностей выступов обоих колес линией зацепления mn — геометрическим местом точек касания пары сопряженных зубьев. Участок AB , обозначенный через l , называется рабочим (активным) участком линии зацепления.

где k — коэффициент высоты головки зуба. Для нормальных зубьев ($k=1$ и $\alpha=20^\circ$) получаем $z_{\min}=17$.

Таким образом, чтобы спроектировать зубчатую передачу с нормальными колесами наименьших размеров, надо принимать количество зубьев шестерни (малого колеса) $z_1=17$, а количество зубьев колеса, работающего в паре с шестерней, определяется по заданному передаточному числу i :

$$i = \frac{z_2}{z_1},$$

откуда

$$z_2 = i \cdot z_1.$$

Иногда бывают необходимы зубчатые колеса с количеством зубьев $z_1 < z_{\min}$. В таких случаях нормальная форма зубьев непригодна, так как зубья будут подрезаться. Чтобы избежать этого, исправляют (корректируют) форму зуба в процессе нарезания зубьев.

Условия работы зубчатых передач. Зубчатые передачи широко применяются в кораблестроении и вооружении. Они используются и в мощных силовых установках, и в малогабаритных и малонагруженных приборах. Поэтому условия их работы также весьма разнообразны.

Зубчатые передачи делятся на передачи открытого и закрытого типа. Передачи открытого типа не защищены от окружающей среды и подвергаются загрязнению.

Передачи закрытого типа работают в масляной ванне, они защищены от воздействия внешней среды. Анализ работы механизма позволяет сделать вывод, что характер разрушений зубьев зависит от условий работы передачи.

Основными причинами разрушений зубьев являются:

- большие перегрузки ударного и статического действия;
- усталость материала, вызванная многократными нагрузками;
- неправильный монтаж механизма, недостаточная точность изготовления зубьев, а также деформации, которые приводят к сосредоточению нагрузки на конце зуба, в результате чего происходит косой излом.

Причиной поломки зубьев открытых передач чаще всего бывает абразивный износ и возникновение больших напряжений изгиба у основания зуба.

Самое серьезное и распространенное повреждение закрытых передач — это выкрашивание поверхностных слоев зубьев из-за их усталости.

Выкрашивание выражается в появлении на рабочих поверхностях небольших трещин — углублений. Эти углубления с течением времени растут, превращаясь в каверны. Дальнейший рост каверн связан с проникновением в них масла, в процессе работы оно передает гидравлическое давление.

Чтобы предотвратить выкрашивание, зубья рассчитывают на контактную прочность, которая является важнейшим критерием работоспособности зубчатых колес закрытого типа, находящихся в условиях хорошей смазки.

Итак, с учетом условий работы зубья открытых передач рассчитываются на изгиб, а зубья закрытых передач — на контактную прочность с проверкой на изгиб.

Расчет открытых зубчатых передач. В процессе работы зубчатых колес передача усилия от ведущего колеса к ведомому начинается в тот момент, когда ножка зуба ведущего колеса соприкасается с головкой зуба ведомого колеса. Усилие \bar{P}_n , возникающее при точном изготовлении передач, равномерно распределится по всей длине b зуба (рис. 30.5).

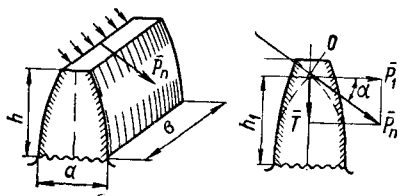


Рис. 30.5.

Будем считать, что всю нагрузку воспринимает один зуб. Перенесем силу \bar{P}_n в точку O пересечения оси симметрии с линией зацепления. Разложим силу \bar{P}_n на ее составляющие \bar{P}_1 и \bar{T} по касательной и нормали к траектории точки O .

На рис. 30.5 видно, что составляющая \bar{P}_1 будет изгибать зуб, создавая изгибающий момент, равный $M_{из} = P_1 h_1$, а составляющая \bar{T} будет сжимать зуб. Наибольшее распространение получили замедлительные передачи, у которых ведущим является зубчатое колесо с меньшим диаметром, чем у ведомого. В этом случае ведущее колесо называется шестерней, ведомое — колесом. Расчет обычно проводят для зуба шестерни.

Основным и наиболее опасным состоянием зубьев является изгиб. Напряжения сжатия незначительны по сравнению с напряжениями изгиба, и поэтому на практике ими часто пренебрегают.

Условие прочности на изгиб имеет вид

$$\sigma_{из} = \frac{M_{из}}{W} \leq [\sigma]_{из},$$

где $M_{из}$ — изгибающий момент;

W — осевой момент сопротивления сечения зуба.

$$M_{из} = P_1 h_1; \quad W = \frac{ba^2}{6},$$

где b — длина зуба, равная ширине обода, равная длине линии контакта.

Подставляя в условие прочности значения $M_{из}$ и W , получим

$$\sigma_{из} = \frac{P_1 h_1}{\frac{ba^2}{6}} \leq [\sigma]_{из}.$$

Представим размеры зуба h_1 и a в долях модуля m , тогда

$$h_1 = \beta m \text{ и } a = \gamma m,$$

где β и γ — коэффициенты пропорциональности.

Условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\text{н}} = \frac{P_1 \beta m}{b \gamma^2 \frac{m^2}{6}} \leq [\sigma]_{\text{н}}.$$

Решая относительно P_1 , имеем

$$P_1 \leq [P_1] = \frac{\gamma^2}{6\beta} [\sigma]_{\text{н}} b m.$$

Составляющую P_1 заменим окружным усилием P

$$P = \frac{2M_1}{d_1},$$

где M_1 — вращающий момент на валу шестерни;

d_1 — диаметр начальной окружности колеса.

Введем также обозначение

$$\frac{\gamma^2}{6\beta} = y,$$

где y — коэффициент формы зуба.

Подставив значение y в выражение для окружного усилия P , получим

$$P \leq [P] = y [\sigma]_{\text{н}} b m.$$

Полученная формула удобна для проверочного расчета, но не пригодна для определения размеров проектируемых колес.

Подставив в эту формулу значения диаметра начальной окружности шестерни $d_1 = z_1 m$, длины зуба шестерни $b = \phi_m m$ и окружного усилия $P = \frac{2M_1}{d_1}$, получим

$$\frac{2M_1}{z_1 m} \leq y [\sigma]_{\text{н}} \phi_m m^2,$$

здесь ϕ_m — коэффициент относительной ширины обода шестерни.

Выражение для вращающего момента будет иметь вид

$$2M_1 \leq y [\sigma]_{\text{н}} \phi_m z_1 m^3.$$

Решая это выражение относительно m и принимая расчетный момент $M_{1p} = kM_1$ ($k > 1$), получим

$$m \geq \sqrt[3]{\frac{2M_{1p}}{y \phi_m z_1 [\sigma]_{\text{н}}}}. \quad (30.9)$$

Вращающий момент M_1 можно выразить через мощность N_1 и число оборотов в минуту через n_1 , т. е.

$$M_1 = 97400 \frac{N_1}{n_1} = 71620 \frac{N_{\text{л.с.}}}{n} \text{ кгс} \cdot \text{см},$$

где N_1 — передаваемая мощность в кВт на валу шестерни;
 z_1 и n_1 — соответственно количество зубьев и число оборотов
в минуту вала рассчитываемой шестерни;
 y — коэффициент формы зуба, определяемый в зависимости
от количества зубьев шестерни;
 $[\sigma]_н$ — допускаемое напряжение изгиба при пульсирующем
или симметричном (реверсивные передачи) циклах;
 $\psi_m = \frac{b}{m}$ — коэффициент ширины обода колеса;
 k — коэффициент нагрузки.

Полученную величину модуля необходимо округлить до ближайшего стандартного значения. Далее, зная модуль, определяют основные размеры зубчатой передачи по приведенным выше формулам. Таков порядок проектного расчета открытых передач.

Расчет закрытых зубчатых передач. Для расчета зубьев на контактную прочность пользуются формулой Герца, которая была получена для определения максимального напряжения сжатия в зоне контакта двух параллельно расположенных цилиндров, сжатых по их образующей.

Рассмотрим зубья в момент их зацепления в полюсе как цилиндры длиной b и радиусами кривизны ρ_1 и ρ_2 (рис. 30.6). Максимальное напряжение обозначают $\sigma_к$ и называют контактным напряжением

$$\sigma_к = 0,418 \sqrt{\frac{q E_{нр}}{\rho_{нр}}}, \quad (30.10)$$

где q — удельная нагрузка, т. е. нагрузка на единицу длины контактной линии;

$E_{нр}$ — приведенный модуль упругости, $E_{нр} = \frac{2E_1 E_2}{E_1 + E_2}$ (E_1 и E_2 — модули упругости материала шестерни и колеса; при одинаковых материалах $E = E_1 = E_2$);

$\rho_{нр}$ — приведенный радиус кривизны

$$\rho_{нр} = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2},$$

здесь ρ_1, ρ_2 — радиусы кривизны профилей зубьев шестерни и колеса в полюсе зацепления.

Расчет на контактную прочность ведут из условия $\sigma_к \leq [\sigma]_н$, где $[\sigma]_н$ — допускаемое напряжение, учитывающее цикличность нагрузки.

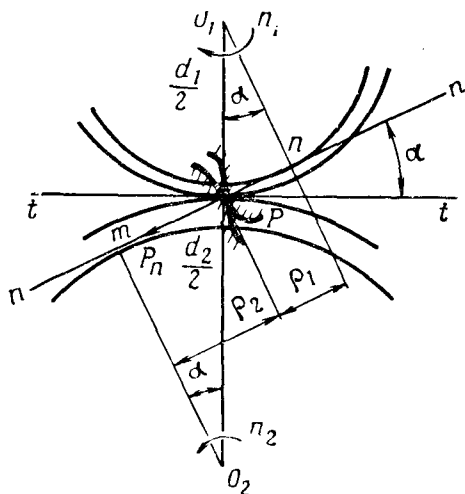


Рис. 30.6.

Преобразуем формулу Герца и выразим ее через параметры передачи. В таком случае удельная нагрузка будет

$$q = \frac{P_n}{b \cos \alpha} = \frac{2M_1}{d_1 b \cos \alpha} = \frac{M_1 (i+1)}{A b \cos \alpha}, \quad (*)$$

где b — длина линии контакта, равная длине зуба;
 α — угол зацепления;
 d_1 — диаметр рассчитываемой шестерни;
 P_n — нагрузка на зуб, направленная по линии зацепления;
 M_1 — вращающий момент, действующий на валу шестерни;
 A — межцентровое расстояние.

Радиусы ρ_1 и ρ_2 выразим через диаметры шестерни и колеса:

$$\rho_1 = \frac{d_1 \sin \alpha}{2}; \quad \rho_2 = \frac{d_2 \sin \alpha}{2}; \quad \rho_{np} = \frac{d_1 d_2 \sin \alpha}{2(d_2 + d_1)}.$$

Диаметры колес можно выразить через межцентровое расстояние A :

$$d_1 = \frac{2A}{i+1}; \quad d_2 = \frac{2Ai}{i+1} \quad \text{и} \quad \rho_{np} = \frac{A_i \sin \alpha}{(i+1)^2}.$$

Для обеспечения прочности зубьев необходимо учесть динамический характер, а также концентрацию удельной нагрузки, возникающих в зацеплении. Для этого вводят понятие расчетного момента $M_{1p} = kM$, где $k = k_d \cdot k_k$,

где k_d — коэффициент динамичности;

k_k — коэффициент концентрации удельной нагрузки по ширине венца шестерни;

Обычно коэффициент k находится в пределах $k = 1,3—1,5$.

Подставляя полученные значения ρ_{np} , E_{np} и q в формулу (30.10) и принимая для стальных колес $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2 = 2,15 \cdot 10^4 \text{ кгс/мм}^2$, после математических преобразований получим:

Проверочный расчет*:

а) в системе СИ

$$\sigma_k = \frac{340}{A} \sqrt{\frac{M_{1p} (i+1)^2}{b \cdot i}} \leq [\sigma]_k, \quad (30.11)$$

где A , b — мм;

M_{1p} — Н·мм;

σ_k — Н/мм²;

б) в системе МКГСС

$$\sigma_k = \frac{108}{A} \sqrt{\frac{M_{1p} (i+1)^2}{b \cdot i}} \leq [\sigma]_k, \quad (30.12)$$

где A , b — мм;

M_{1p} — кгс·мм;

σ_k — кгс/мм².

* Окончательные формулы расчета зубчатых и червячных передач заимствованы из учебника Батурина А. Г., Ицковича Г. М. и др. «Детали машин», изд. 1970 г.

Проектный расчет:

а) в системе СИ

$$A = (i + 1) \sqrt[3]{\left(\frac{340}{[\sigma]_K}\right)^2 \frac{M_{1P}}{\psi_A \cdot i}}; \quad (30.13)$$

б) в системе МКГСС

$$A = (i + 1) \sqrt[3]{\left(\frac{108}{[\sigma]_K}\right)^2 \frac{M_{1P}}{\psi_A \cdot i}}, \quad (30.14)$$

где $\psi_A = \frac{b}{A}$ — коэффициент ширины обода колеса по отношению к A (принимается от 0,2 до 0,6).

Все рекомендации о целесообразном выборе параметров, входящих в формулы, приведены в справочниках.

Определив межцентровое расстояние A , находят модуль

$$m = \frac{2A}{z_1 + z_2},$$

а затем остальные размеры колес.

§ 158. КОСОЗУБАЯ И ШЕВРОННАЯ ПЕРЕДАЧИ

При рассмотрении цилиндрических передач с прямыми зубьями было установлено, что очень важно иметь достаточно большой коэффициент перекрытия. Он указывает на среднее количество пар зубьев, одновременно находящихся в зацеплении: чем больше это число, тем спокойнее работают зубчатые колеса на больших скоростях. Возникает вопрос, какими конструктивными мерами можно достичь больших значений коэффициента перекрытия?

Практически это достигается применением в цилиндрических колесах косых (винтовых) зубьев.

На рис. 30.7 изображены колеса с косыми зубьями. Как видно, эти зубья имеют различные направления на шестерне и на колесе. Если на шестерне косые зубья правого хода, то на колесе должны быть зубья левого хода, и наоборот.

Угол β между образующей начального цилиндра и направлением зуба называется углом наклона зубьев. Из рисунка следует, что благодаря наклонному расположению зубьев в зону зацепления попадает большее их количество.

Постепенное вхождение зубьев в зону зацепления повышает значение ε (коэффициента перекрытия), содействует плавности и бесшумности работы косозубых передач, так как при этом сни-

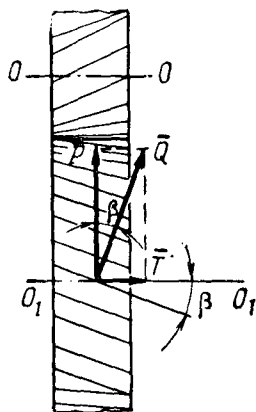


Рис. 30.7.

жается величина ударов, неизбежных при входе зубьев в зацепление.

Косозубые передачи применяются при больших окружных скоростях, достигающих в современных машинах до 100 м/с, и при больших мощностях. Они применяются также при больших передаточных числах. В шестернях этих передач может быть меньше 17 зубьев.

Однако у косозубых колес есть существенный недостаток — это наличие у них осевого усилия T . При угле наклона зубьев $\beta = 12^\circ$ осевое усилие T может восприниматься радиальными шарикоподшипниками, а при $\beta > 12^\circ$ необходимо применять радиально-упорные подшипники.

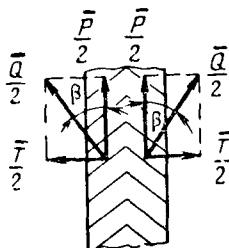


Рис. 30.8.

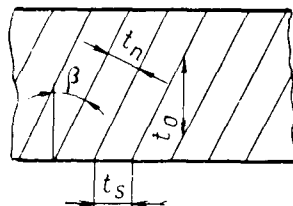


Рис. 30.9.

Можно избежать применения упорных подшипников, если поставить на валу вместо одного колеса два колеса с зубьями, наклоненными в разные стороны, или если использовать так называемые шевронные колеса. У шевронного колеса (рис. 30.8) зуб выполнен в виде угла, благодаря чему осевые составляющие двух половин зуба уравниваются.

Колеса с шевронными зубьями отличаются прочностью и плавной передачей усилий, т. е. они обладают всеми преимуществами косозубых колес и при их работе исключено вредное явление — образование осевой составляющей. В косозубых колесах различают:

— нормальный шаг t_n (рис. 30.9):

$$t_n = \pi m_n,$$

где m_n — нормальный модуль;

— торцовый шаг t_s ,

$$t_s = \frac{t_n}{\cos \beta};$$

— осевой шаг t_o ,

$$t_o = \frac{t_n}{\sin \beta}.$$

Следовательно, торцовый модуль зубчатого зацепления будет

$$m_s = \frac{t_s}{\pi} = \frac{t_n}{\pi \cos \beta} = \frac{m_n}{\cos \beta}.$$

Зная нормальный модуль, определяем диаметры начальных окружностей шестерни и колеса, которые равны:

$$d_1 = \frac{m_n}{\cos \beta} z_1 \text{ и } d_2 = \frac{m_n}{\cos \beta} z_2.$$

Диаметры окружностей выступов равны:

$$D_{e_1} = d_1 + 2m_s(z_1 + 2) \text{ и } D_{e_2} = d_2 + 2m_s(z_2 + 2).$$

А диаметры окружностей впадин будут

$$D_{i_1} = m_s(z_1 - 2,5) \text{ и } D_{i_2} = m_s(z_2 - 2,5).$$

(30.15)

Межцентровое расстояние

$$A = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{m_n}{2 \cos \beta} (z_1 + z_2). \quad (30.16)$$

Диаметры начальных окружностей шевронных колес определяются по тем же формулам, что и диаметры прямозубых колес.

Принципиальные основы расчета косозубых передач, его методика и обозначения в основном те же, что и для прямозубых передач. Поэтому рассмотрим лишь некоторые особенности расчета.

Косозубые колеса целесообразно применять с экономической и технической точек зрения при окружных скоростях, превышающих 6 м/с, так как при этих скоростях прямозубые колеса работают удовлетворительно лишь при высокой точности изготовления. Шевронные колеса применяются при больших нагрузках.

Для расчета нормального модуля косозубых и шевронных колес по изгибу пользуются формулой, применяемой при расчете прямозубых колес, с той лишь разницей, что в этой формуле под корнем появляются $\cos \beta$ и коэффициент ϵ , учитывающие одновременное участие в зацеплении нескольких пар зубьев. В таком случае нормальный модуль будет

$$m_n = \sqrt[3]{\frac{2M_{1p}}{y \psi_m z_1 v_n [\sigma]_n}}, \quad (30.17)$$

где v_n — коэффициент, учитывающий повышение прочности на изгиб зубьев косозубых передач по сравнению с прямозубыми; по опытным данным для $\beta = 8-15^\circ$ $v_n = 1,3-1,4$;

M_{1p} — расчетный момент, $y = y\left(\frac{z_1}{\cos^3 \beta}\right)$.

Угол наклона зубьев в косозубых колесах выбирается в пределах от 8 до 15°, а в шевронных — от 25 до 40°.

Количество зубьев шестерен для некоррегированных колес принимают из условия $z_{\min} > 17 \cos^3 \beta$.

В закрытых передачах межцентровое расстояние A определяется из расчета по контактным напряжениям по формуле

$$A = (i + 1) \sqrt[3]{\left(\frac{c}{[\sigma]_k}\right)^2 \frac{M_{1p}}{i \psi_A \psi_k}},$$

где $c = 340$ в системе СИ (30.13);

$c = 108$ в системе МКГСС (30.14);

$\psi_k = 1,25 - 1,30$ для $\beta = 8 - 15^\circ$.

§ 159. КОНИЧЕСКАЯ ЗУБЧАТАЯ ПЕРЕДАЧА

Для передачи вращения между лежащими в одной плоскости и пересекающимися валами O_1 и O_2 применяют конические зубчатые колеса (рис. 30.10).

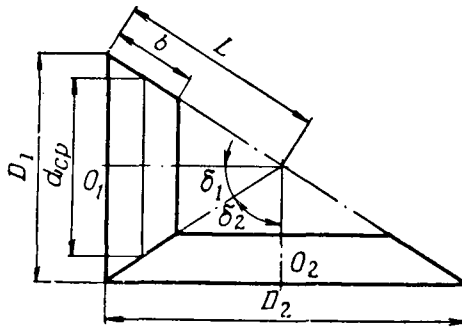


Рис. 30.10.

Угол $\delta = \delta_1 + \delta_2$ между геометрическими осями валов называется межосевым углом (чаще всего $\delta = 90^\circ$), а углы δ_1 и δ_2 — углами конусности.

Передаточное число i находится следующим образом:

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{\cos \delta_1}{\sin \delta_1} = \operatorname{ctg} \delta_1 = \operatorname{tg} \delta_2,$$

где d_1 и d_2 — наибольшие диаметры начальных окружностей колес.

Зубья конических колес профилируются так же, как и зубья цилиндрических колес.

Для определения основных размеров конических колес открытых передач пользуются теми же формулами, что и при определении цилиндрических колес. Сначала определяют средний модуль зацепления m_{cp} , т. е. модуль, соответствующий среднему диаметру колес. С учетом понижения несущей способности (k_k):

$$m_{cp} = \sqrt[3]{\frac{2M_{1p}}{\psi \psi_{z_1} [\sigma]_и k_k}}, \quad (30.18)$$

где y — коэффициент формы зуба, его следует выбирать так же, как и для цилиндрических прямозубых колес, но не по действительному количеству зубьев z_1 , а по фиктивному $z_{1ф} = \frac{z_1}{\cos \delta_1}$.

После определения $m_{ср}$ находят модуль m зная, что

$$d_1 = d_{ср} + b \sin \delta_1.$$

Разделим обе части уравнения на z_1

$$\frac{d_1}{z_1} = \frac{d_{ср}}{z_1} + \frac{b \sin \delta_1}{z_1}.$$

Так как

$$\frac{d_1}{z_1} = m,$$

то

$$m = m_{ср} + \frac{b \sin \delta_1}{z_1}.$$

Модуль m , называемый иногда максимальным, округляют до ближайшего стандартного его значения.

Расчет закрытых конических передач ведется по наибольшим нормальным напряжениям в среднем сечении. Из условия контактной прочности обычно определяют конусное расстояние L , затем задаются коэффициентом длины зуба $\psi_L = \frac{b}{L}$. В большинстве случаев принимают $\psi_L = \frac{1}{3}$. С учетом понижения несущей способности конических колес по сравнению с цилиндрическими расчетные формулы будут:

Проверочный расчет

а) в системе СИ

$$\sigma_k = \frac{3.0}{L} \sqrt{\frac{M_{1p} (V i^2 + 1)^3}{b \cdot i \cdot k_k}} \leq [\sigma]_k, \quad (30.19)$$

где L — мм;

M_{1p} — Н·мм;

σ_k — Н/мм²;

б) в системе МКГСС

$$\sigma_k = \frac{108}{L} \sqrt{\frac{M_{1p} (V i^2 + 1)^3}{b \cdot i \cdot k_k}} \leq |\sigma|_k, \quad (30.20)$$

где L — мм;

M_{1p} — кгс·мм;

σ_k — кгс/мм².

Проектный расчет:

а) в системе СИ

$$L = \sqrt{i^2 + 1} \sqrt[3]{\left(\frac{340}{|\sigma|_k}\right)^2 \frac{M_{1p}}{\psi_L \cdot i k_k}}, \quad (30.21)$$

где L — мм;
 M_{1p} — Н · мм;
 σ_k — Н/мм²;

б) в системе МКГСС

$$L = \sqrt{i^2 + 1} \sqrt[3]{\left(\frac{108}{|\sigma|_k}\right)^2 \frac{M_{1p}}{\psi_L \cdot i k_k}}, \quad (30.22)$$

где L — мм;
 M_{1p} — кгс · мм;
 σ_k — кгс/мм².

§ 160. ЧЕРВЯЧНЫЕ МЕХАНИЗМЫ

Червячные механизмы широко применяются в военно-морской технике как в силовых, так и в маломощных (приборных) механических системах.

По сравнению с зубчатыми червячные механизмы имеют ряд достоинств, основными из которых являются:

— возможность получения больших передаточных чисел при компактной передаче (в силовых механизмах передаточные числа равны 7—80, в приборах они могут быть значительно больше — 100—150);

— плавность хода и бесшумность работы передач;

— червячная передача может быть самотормозящей.

Наряду с отмеченными достоинствами червячная передача имеет и недостатки, а именно:

— сравнительно невысокий КПД (не превышает 80%);

— сильный нагрев передачи при длительной непрерывной работе, вследствие чего необходимо применять специальные устройства охлаждения.

Элементы червячных механизмов. Червячная передача (рис. 30.11) состоит из червяка (винта) и червячного колеса, валы которых не лежат в одной плоскости, а обычно располагаются под углом 90°. При вращении червяка колесо вращается вокруг своей оси. Червячные передачи получили большое распространение в механизмах, передающих большие нагрузки, а также в приборах, входящих составной частью в различные образцы вооружения.

По типу червяки подразделяются на одно-, двух-, трех- и четырехзаходные.

Ходом червяка называется его шаг по одной и той же винтовой линии (ход червяка обозначается буквой S). Шаг чер-

в я к а — это расстояние между одноименными сторонами витков червяка. Он соответствует расстоянию между одноименными сторонами зубьев червячного колеса, измеренному по начальной окружности. Шаг обозначается буквой t . Независимо от числа заходов червяка между двумя его соседними витками можно поместить только один зуб колеса. Таким образом, шаг червяка должен быть равен шагу колеса.

При повороте однозаходного червяка на один оборот зуб червячного колеса сместится по начальной окружности на один шаг t . За время одного оборота двухзаходного или трехзаходного червяка зуб колеса соответственно сместится на $2t$ или на $3t$.

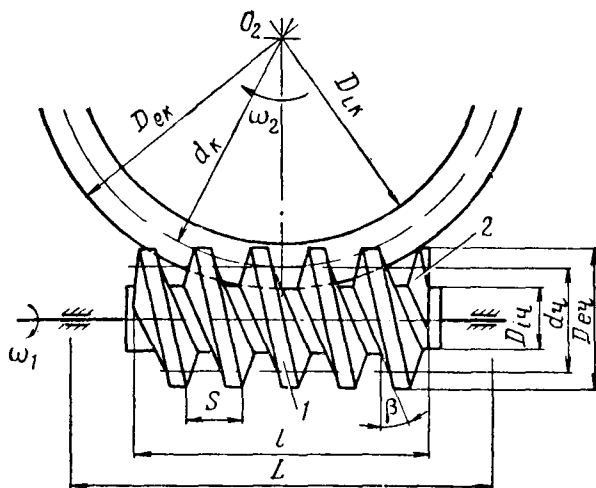


Рис. 30.11.

Число заходов червяка обычно обозначается $z_ч$. Ход червяка и шаг t колеса связаны зависимостью

$$S = z_ч \cdot t.$$

Обычно червяки имеют резьбу трапецеидального профиля в плоскости сечения, проходящей вдоль червяка. Если такой червяк рассечь плоскостью, перпендикулярной его оси, то сечение профиля будет очерчено по архимедовой спирали. Эти червяки называют архимедовыми. Есть передачи с глобоидными червяками, у которых число зубьев больше, чем в обычной передаче.

Червячные передачи выполняются либо открытыми, либо в виде отдельных закрытых агрегатов. В судостроении и образцах оружия широко применяются оба вида передач.

Передаточное число i червячной передачи определяется из соотношения

$$i = \frac{\omega_ч}{\omega_к} = \frac{n_ч}{n_к} = \frac{z_к}{z_ч} = \frac{d_к}{d_ч \operatorname{tg} \beta},$$

где $\omega_{\text{ч}}$, $n_{\text{ч}}$ — угловая скорость и число оборотов в минуту червяка;

$\omega_{\text{к}}$, $n_{\text{к}}$ — угловая скорость и число оборотов в минуту червячного колеса;

$z_{\text{к}}$ — число зубьев червячного колеса;

$z_{\text{ч}}$ — количество заходов червяка.

С увеличением количества заходов червяка возрастает угол подъема винтовой линии, а следовательно, и КПД передачи. Когда

нужна самотормозящая червячная передача, например в корабельных подъемных устройствах, червяк делают однозаходным. Рассмотрим основные геометрические соотношения червяка и червячного колеса.

При расчете червячных передач модуль берется в торцевом сечении колеса, т. е. в плоскости вращения колеса или, что то же самое, в осевом сечении червяка.

Связь между торцовым (осевым) шагом, модулем и ходом червяка выражается формулой

$$t_s = \pi m_s = \frac{t}{\operatorname{tg} \beta},$$

где β — угол подъема винтовой линии.

Диаметр начального цилиндра червяка (рис. 30.12) принимается кратным торцовому модулю колеса, т. е.

$$d_{\text{ч}} = q m_s,$$

где $q = \frac{d_{\text{ч}}}{m_s}$ — относительный диаметр червяка или количество модулей в диаметре начального цилиндра.

Величина торцового модуля m_s и относительный диаметр червяка взаимосвязаны, и рекомендуемые соотношения их приводятся в специальных таблицах.

Диаметр окружности выступов червяка

$$D_{e\text{ч}} = d_{\text{ч}} + 2m_s = m_s (q + 2). \quad (30.23)$$

Диаметр окружности впадин червяка

$$D_{i\text{ч}} = d_{\text{ч}} - 2,4m_s = m_s (q - 2,4). \quad (30.24)$$

Длина нарезаемой части червяка принимается по соотношению

$$l \geq (11 + 0,06z_{\text{к}}) m_s.$$

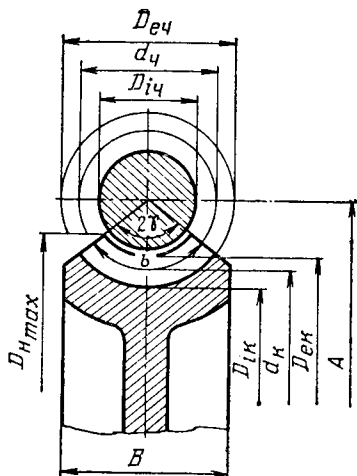


Рис. 30.12.

Расстояние между опорами червячного вала нужно делать возможно меньше. При расчетах его обычно принимают

$$L = (0,8 \div 1,0) d_k.$$

Основные геометрические размеры червячного колеса представлены на рис. 30.12.

Диаметр начальной (делительной) окружности червячного колеса

$$d_k = z_k \cdot m_s. \quad (30.25)$$

Диаметр окружности выступов червячного колеса в среднем сечении для нормального профиля зуба

$$D_{ek} = m_s (z_k + 2). \quad (30.26)$$

Диаметр окружности впадин червячного колеса в среднем сечении

$$D_{ik} = m_s (z_k - 2,4). \quad (30.27)$$

Наружный диаметр червячного колеса определяется по формулам:

$$D_n \leq D_{ik} + 2m_s \text{ (при } z_q = 1) \quad (30.28)$$

и

$$D_n \leq D_{ik} + 1,5m_s \text{ (при } z_q = 2 \div 3). \quad (30.29)$$

Ширина венца колеса B принимается по соотношению

$$B \leq 0,75D_{eq}.$$

Угол охвата червяка венцом колеса 2γ обычно для силовых передач принимают

$$2\gamma = 90^\circ \div 110^\circ.$$

Расчетная длина зуба b по окружности D_{ek} равна

$$b = (D_{eq} - 0,5m_s) \gamma,$$

где угол γ выражен в радианах.

Межцентровое расстояние

$$A = \frac{d_k + d_q}{2} = \frac{m_s(z_k + q)}{2}.$$

Для изготовления червяка обычно используют среднеуглеродистые стали (сталь 45, Ст.6), в тихоходных передачах применяют цельные литые чугунные червячные колеса. Для быстроходных передач центральная часть колеса изготавливается из чугуна, а венец колеса (наружный обод) — из бронзы, которая обладает высокими механическими и антифрикционными свойствами. В последнее время для изготовления венца внедряются синтетические материалы. Корпуса червячных передач отливаются из чугуна или свариваются из стали.

При определении основных размеров передачи следует иметь в виду, что если разрезать передачу плоскостью, проходящей через ось червяка перпендикулярно оси червячного колеса, то в разрезе получим профиль зубчатого колеса, сцепляющегося с рейкой. Поэтому в основу расчета передач положен метод, применяемый для расчета обычных цилиндрических зубчатых передач.

Червячные передачи, так же как и зубчатые, рассчитывают исходя из условия прочности зубьев на изгиб и на контактные напряжения колеса, а не червяка.

При расчете червячных передач на изгиб прежде всего определяется модуль по следующей формуле:

$$m_s = \sqrt[3]{\frac{1,8M_{pk}}{y|\sigma|_k q z_k}} \quad (30.30)$$

Определив модуль m_s , нужно согласовать полученное значение с ГОСТ и принять в случае несовпадения для дальнейших расчетов его большее стандартное значение.

Червячные передачи, как и цилиндрические зубчатые колеса, рассчитывают на контактные напряжения. В основу вывода формул расчета контактной прочности червячных передач принят тот же принцип, что и для вывода формул расчета контактной прочности цилиндрических зубчатых колес.

Проверочный и проектный расчеты червячной передачи на контактную прочность производятся по следующим формулам:

Проверочный расчет:

а) в системе СИ

$$\sigma_k = \frac{476}{d_k} \sqrt{\frac{M_{pk}}{d_q}} \leq |\sigma|_k, \quad (30.31)$$

где d_k, d_q — мм;

M_{pk} — Н·мм, расчетный момент на валу колеса;

σ_k — Н/мм²;

б) в системе МКГСС

$$\sigma_k = \frac{150}{d_k} \sqrt{\frac{M_{pk}}{d_q}} \leq |\sigma|_k, \quad (30.32)$$

где d_k и d_q — мм;

M_{pk} — кгс·мм;

σ_k — кгс/мм².

Проектный расчет:

а) в системе СИ

$$A = \left(\frac{z_k}{q} + 1\right) \sqrt[3]{\left(\frac{169}{|\sigma|_k \frac{z_k}{q}}\right)^2 \cdot M_{pk}}, \quad (30.33)$$

где A — мм;

M_{pk} — Н·мм;

σ_k — Н/мм²;

б) в системе МКГСС

$$A = \left(\frac{z_k}{q} + 1 \right) \sqrt[3]{ \left(\frac{54}{|\sigma|_k \frac{z_k}{q}} \right)^2 \cdot M_{\text{рк}} }, \quad (30.34)$$

где A — мм;
 $M_{\text{рк}}$ — кгс · мм;
 σ_k — кгс/мм².

После определения межцентрового расстояния находят торцовый (осевой) модуль m_s :

$$m_s = \frac{2A}{q + z_k}.$$

Полученное значение модуля округляется до ближайшего стандартного, по которому выбирается новое значение q . Принятие стандартного модуля (вместо расчетного) повлечет за собой изменение межцентрового расстояния.

После выбора стандартных m и q необходимо вычислить фактическое значение межцентрового расстояния, соответствующего принятым параметрам. Далее определяются основные размеры передачи по формулам, приведенным ранее.

§ 161. СЛОЖНЫЕ ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ

Все рассмотренные ранее зубчатые передачи представляют собой простые механизмы. С помощью простых передач трудно получить большие передаточные числа при заданном изменении угловой скорости и передаваемого момента или осуществить передачу вращения при относительно больших расстояниях между валами и получить требуемое направление вращения выходного вала.

Чаще всего необходимо бывает уменьшить скорости вращения, так как большинство двигателей, используемых в механизмах, машинах и приборах военно-морского вооружения, быстроходные, а скорости рабочих машин и приборов значительно меньше. Поэтому между двигателями и рабочей машиной устанавливаются механизмы, которые уменьшают скорость двигателей, — так называемые редукторы. Такие механизмы входят в привод торпедных аппаратов, артиллерийских установок и приборов.

При редукции скорости на выходном валу моменты усиливаются в несколько раз, что позволяет преодолевать большие сопротивления с помощью маломощного двигателя.

Понижающие передачи применяются в приборах, где необходимо обеспечить точную настройку или установку вводимой в прибор величины.

В зависимости от количества пар зубчатых колес зубчатые механизмы делятся на одноступенчатые и многоступенчатые. Одноступенчатые механизмы — это простые механизмы, состоящие из одной кинематической зубчатой или червячной пары.

Многоступенчатые механизмы образуются путем соединения нескольких одноступенчатых. Соединение механизмов может быть последовательным, параллельным или смешанным.

В зависимости от характера подвижности геометрических осей зубчатые механизмы делятся на передачи с неподвижными осями и передачи, в которых геометрическая ось хотя бы одного колеса перемещается в процессе работы. Такие передачи называются планетарными.

Колеса — сателлиты вращаются в них вокруг собственной оси и вокруг центрального колеса.

В зависимости от числа степеней свободы планетарные передачи делятся на планетарные механизмы, имеющие одну степень свободы, и дифференциальные механизмы, имеющие две степени свободы и более.

Механизмы с рядовой и ступенчатой передачами. Рядовая передача (рис. 30.13)

представляет собой последовательное

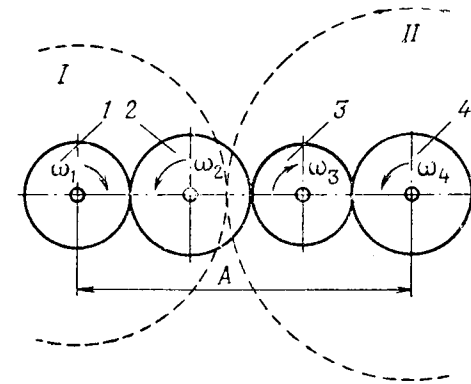


Рис. 30.13.

соединение зубчатых колес. Частные передаточные числа между отдельными колесами 1—2, 2—3, 3—4 равны:

$$i_1 = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}; \quad i_2 = \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{r_3}{r_2}; \quad i_3 = \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{r_4}{r_3}.$$

Общее передаточное число всего механизма, т. е. отношение угловой скорости первого (входного) колеса к угловой скорости последнего (выходного вала), можно получить, перемножив частные передаточные числа с учетом изменения направления вращения:

$$i = i_1 \cdot i_2 \cdot i_3 = \left(-\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \cdot \left(-\frac{\omega_2}{\omega_3}\right) \cdot \left(-\frac{\omega_3}{\omega_4}\right) = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(-\frac{z_3}{z_2}\right) \cdot \left(-\frac{z_4}{z_3}\right) = \left(-\frac{\omega_1}{\omega_4}\right) = \left(-\frac{z_4}{z_1}\right).$$

Из формулы следует, что в рядовой передаче промежуточные колеса никакого влияния на величину передаточного числа не оказывают и оно получается таким же, как в случае непосредственного соединения двух крайних колес. По этой причине промежуточные колеса часто называют паразитными.

При нечетном количестве колес внешнего зацепления угловая скорость ведомого колеса совпадает по направлению с угловой скоростью ведущего. При четном количестве колес угловые скорости ведущего и ведомого колес имеют противоположные направления.

Рядовая передача используется для изменения направления

вращения, например в коробках скоростей, а также для осуществления передачи при больших межцентровых расстояниях входного и выходного валов. Замена четырех колес расстоянием одной пары (колесами I и II, показанными на рис. 30.13 пунктиром) привела бы к увеличению габаритов механизма.

Ступенчатая передача (рис. 30.14) представляет собой последовательное соединение колес. На промежуточных валах ступенчатой передачи имеется по два колеса. Передаточное число передачи равно

$$i_{14} = i_{12} \cdot i_{2'3} \cdot i_{3'4} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(-\frac{z_3}{z_2}\right) \left(+\frac{z_4}{z_3}\right) = \frac{z_2 \cdot z_3 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_2' \cdot z_3'}$$

Из формулы следует, что в окончательный результат входит количество зубьев всех колес.

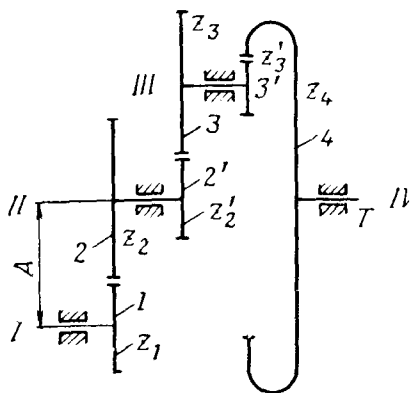


Рис. 30.14.

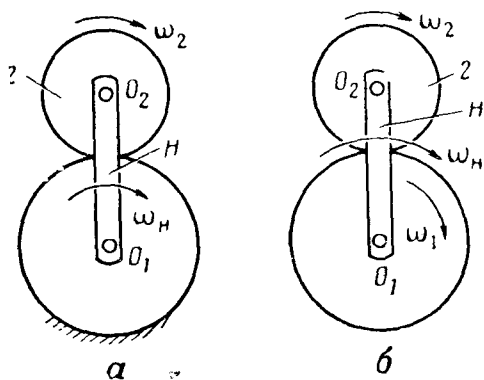


Рис. 30.15.

Ступенчатая передача применяется для получения больших передаточных чисел. Целесообразно применять колеса, передаточное число одной пары которых не больше 4.

За счет увеличения количества ступеней можно получить значительные передаточные числа. Обычно применяют двух-, трех- и четырехступенчатые редукторы.

Планетарные и дифференциальные механизмы. В предыдущих параграфах были рассмотрены зубчатые передачи, валы колес которых вращаются в неподвижных подшипниках.

В современном кораблестроении и вооружении приобретают все большее распространение так называемые планетарные механизмы, у которых одно или несколько колес имеют подвижную ось. Такие механизмы по сравнению с обычными зубчатыми передачами обладают рядом положительных качеств. Зубчатые механизмы с подвижными осями некоторых колес называются еще эпициклическими.

На рис. 30.15 представлены две схемы, на которых изображены простейшие планетарный (рис. 30.15, а) и дифференциальный

(рис. 30.15, б) механизмы. И планетарный, и дифференциальный зубчатые механизмы состоят из четырех звеньев — солнечного колеса 1, сателлита 2, водила H и стойки.

Если вычислить степень подвижности этих механизмов по формуле Чебышева, то выяснится, что планетарный механизм имеет одну степень подвижности, а дифференциальный — две. Количество степеней подвижности позволяет сделать вывод, что планетарный механизм имеет одно ведущее звено, а дифференциальный — два.

Планетарный механизм может быть выполнен в двух вариантах:

- 1-й вариант: водило H — ведущее звено, сателлит 2 — ведомое;
- 2-й вариант: сателлит 2 — ведущее звено, водило H — ведомое.

Дифференциальный механизм может быть выполнен в трех вариантах:

- 1-й вариант: звенья 1 и 2 — ведущие, звено H — ведомое;
- 2-й вариант: звенья 1 и H — ведущие, звено 2 — ведомое;
- 3-й вариант: звенья 2 и H — ведущие, звено 1 — ведомое.

При кинематическом исследовании планетарных и дифференциальных механизмов и определении передаточного отношения принципиально недопустимо применять формулы, полученные для передач с неподвижными осями. Для определения передаточного отношения планетарных и дифференциальных механизмов можно воспользоваться методом обращения движения.

Рассмотрим схему дифференциального механизма (рис. 30.15, в). Сообщим вращательное движение солнечному колесу 1 с угловой скоростью ω_1 , водилу с угловой скоростью ω_H , угловую скорость сателлита обозначим ω_2 . Предположим, что сателлит является ведомым звеном. Теперь сообщим механизму в целом, т. е. всем его звеньям (в том числе и стойке), вращение со скоростью ($-\omega_H$), т. е. в направлении, обратном вращению водила. При этом относительное движение звеньев не изменяется. В обращенном движении водило H , вращаясь по часовой стрелке со скоростью ω_H , а вместе с механизмом в обратном направлении с такой же скоростью, окажется неподвижным и, следовательно, оси всех колес будут неподвижны. Дифференциальный механизм превращается в рядовую или ступенчатую передачу и его передаточное отношение в обращенном движении определяется по формулам, выведенным для зубчатых передач. Теперь передаточное число дифференциального механизма можно представить в виде

$$i_{12} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_2 - \omega_H} = \frac{n_1 - n_H}{n_2 - n_H},$$

где $\omega_1 - \omega_H$ — угловая скорость солнечного колеса в обращенном движении;

$\omega_2 - \omega_H$ — угловая скорость сателлита в обращенном движении;

$n_1 - n_H$ и $n_2 - n_H$ — соответствующие числа оборотов в минуту.

Преобразуем полученное выражение следующим образом:

$$n_1 = n_2 i_{12} + n_n (1 - i_{12}).$$

Для внутреннего и внешнего зацеплений это выражение имеет вид

$$n_1 = n_2 (\pm i_{12}) + n_n [1 - (\pm i_{12})] \quad (30.35)$$

или

$$\omega_1 = \omega_2 (\pm i_{12}) + \omega_n [1 - (\pm i_{12})], \quad (30.36)$$

где знак «+» — для внутреннего зацепления и знак «-» для внешнего зацепления.

Полученные уравнения позволяют определить число оборотов и угловую скорость центрального (солнечного) колеса 1.

Аналогичным образом можно написать уравнение для определения числа оборотов и угловой скорости сателлита 2

$$n_2 = n_1 (\pm i_{21}) + n_n [1 - (\pm i_{21})]$$

или

$$\omega_2 = \omega_1 (\pm i_{21}) + \omega_n [1 - (\pm i_{21})].$$

Теперь найдем формулу, определяющую число оборотов и угловые скорости планетарного механизма. Рассмотрим схему планетарного механизма (рис. 30.15, а), у которого $n_1=0$ и $\omega_1=0$. Для сателлита 2 получим

$$n_2 = n_n (1 + i_{21}) = n_n \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right)$$

или в общем виде:

$$n_2 = n_n [1 - (\pm i_{21})]; \quad \omega_2 = \omega_n [1 - (\pm i_{21})]. \quad (30.37)$$

Эти выражения позволяют определить число оборотов и угловую скорость сателлита, если известно количество зубьев колес. В частном случае, когда $z_1=z_2$, $n_2=2n_n$, т. е. за один оборот водила сателлит делает два оборота.

Передаточное отношение водила к сателлиту 2 определяется следующим образом:

$$i_{n2} = \frac{n_n}{n_2} = \frac{\omega_n}{\omega_2} = \frac{1}{1 + i_{21}} = \frac{1}{1 + \frac{z_1}{z_2}} = \frac{z_2}{z_2 + z_1}$$

Итак, передаточное отношение планетарного механизма следует определять через его передаточное отношение в обращенном движении.

Теперь получим зависимости, позволяющие определить передаточное отношение для любого планетарного механизма. Так как вывод будет носить общий характер, введем следующие обозначения: K — любое колесо планетарного механизма; O — неподвижное колесо; H — водило. Условимся также указывать в круглых скоб-

ках индекс того звена, которое в рассматриваемом движении неподвижно. Передаточное отношение колеса K к неподвижному колесу O при неподвижном водиле можно записать так

$$i_{KO}^H = \frac{\omega_K^H}{\omega_O^H} = \frac{\omega_K - \omega_H}{-\omega_H} = -i_{KH}^O + 1 \quad (30.38)$$

или

$$i_{KH}^O = 1 - i_{KO}^H.$$

Это правило формулируется следующим образом: передаточное отношение любого колеса K планетарного механизма к водилу равно единице минус передаточное отношение в обратном движении этого же колеса K к неподвижному колесу.

Передаточное отношение водила H к колесу K можно получить, используя равенство обратного передаточного отношения, т. е.

$$i_{KH} = \frac{1}{i_{HK}}.$$

Передаточное отношение между двумя колесами K и L согласно теореме о полном передаточном отношении будет

$$i_{KL} = i_{KH} \cdot i_{HL},$$

т. е. передаточное отношение колеса K к колесу L равно произведению передаточных отношений колеса K к водилу, умноженному на передаточное отношение водила к колесу L .

Теперь рассмотрим несколько примеров расчета планетарных и дифференциальных механизмов.

Пример. Планетарный редуктор (рис. 30.16) входит составной частью в привод радиолокационной антенны. Ведущее колесо I делает 1500 об/мин, число зубьев колес

$$z_1 = 20; z_2' = 26 \text{ и } z_2 = 72.$$

Определить число оборотов водила H .

Решение. Применим формулу

$$n_1 = n_2 (\pm i_{12}) + n_H' [1 - (\pm i_{12})].$$

Так как колесо 2 неподвижно, $n_2 = 0$ и, следовательно,

$$n_1 = n_H [1 - (\pm i_{12})],$$

а передаточное число

$$i_{12} = \left(-\frac{z_2'}{z_1} \right) \left(\frac{z_2}{z_2'} \right) = -\frac{z_2}{z_1}.$$

Число оборотов n_1 определится из выражения

$$n_1 = n_H \left[1 - \left(-\frac{z_2}{z_1} \right) \right] = n_H \left(1 + \frac{72}{20} \right) = 4,6n_H.$$

Число оборотов водила H равно

$$n_H = \frac{n_1}{4,6} = \frac{1500}{4,6} = 326 \text{ об/мин.}$$

Пример. Определить передаточное отношение водила H к колесу 3 в планетарном механизме, изображенном на рис. 30.17. (Такие механизмы применяют-

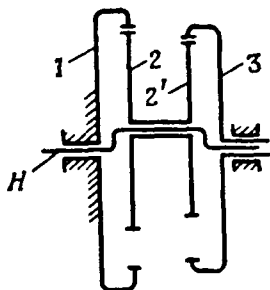


Рис. 30.17.

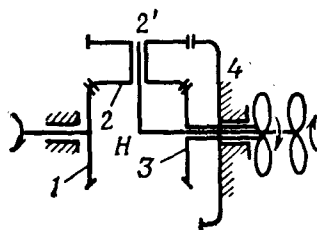


Рис. 30.18.

ся, например, в приборах управления стрельбой, устройствах наведения радиолокационных станций.) Число зубьев колеса:

$$z_1 = 101; z_2 = 100; z'_2 = 99; z_3 = 100.$$

Решение. При неподвижном колесе 1 передаточное отношение от водила H к колесу 3 будет

$$i'_{3H} = \frac{1}{i'_{H3}} = \frac{1}{1 - i'_{31}},$$

где

$$i'_{31} = i'_{32} \cdot i'_{21} = \frac{z'_2}{z_3} \cdot \frac{z_1}{z_2}.$$

Окончательно

$$i'_{3H} = \frac{1}{1 - \frac{z'_2 z_1}{z_3 z_2}} = \frac{1}{1 - \frac{99 \cdot 101}{100 \cdot 100}} = \frac{1}{1 - 0,9999} = 10000.$$

Этот пример показывает, какие большие передаточные отношения можно получить с помощью планетарных механизмов. Однако следует помнить, что КПД при таких больших передаточных отношениях будет мал. Поэтому планетарные механизмы применяются в маломощных приборах.

Пример. На рис. 30.18 приведен планетарный редуктор с коническими колесами, обеспечивающий вращение винтов в разных направлениях и с одинаковыми скоростями. Этот редуктор имеет особое назначение в торпедах — он устраняет гироскопический эффект, возникающий во время хода торпеды, и удерживает ее на заданном курсе. Число зубьев колес:

$$z_1 = z_2 = z'_2 = z_3 = 25; z_4 = 50.$$

Найти передаточное отношение от ведущего вала I к ведомому 3 и водилу H .

Решение. Передаточное отношение от колеса I к водилу H будет

$$i_{1H}^I = 1 - i_{14}^I,$$

где

$$i_{14}^I = \left(-\frac{z_3}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_2} \right); i_{1H}^I = 1 + \frac{z_2 z_4}{z_1 \cdot z_2} = 1 + \frac{25 \cdot 50}{25 \cdot 25} = 3.$$

Передаточное отношение от колеса I к колесу 3 будет

$$i_{13}^I = i_{1H}^I = i_{H3}^I = 3 \frac{1}{i_{3H}^I} = \frac{1}{1 - i_{3H}^H} = \frac{1}{1 - \frac{z_2 \cdot z_4}{z_3 \cdot z_2}} = \frac{3}{1 - 2} = -3.$$

Следовательно, оба вала вращаются с одинаковой скоростью, в три раза меньшей, чем скорость ведущего вала.

С помощью планетарных механизмов можно получить большие передаточные отношения при меньших габаритах и весе механизма по сравнению с обычными зубчатыми передачами. Это имеет особое значение для военно-морского вооружения.

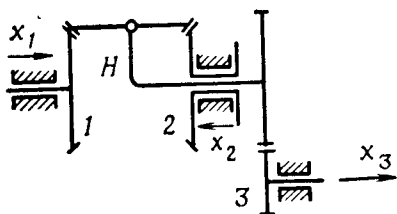


Рис. 30.19.

Добиться большого уменьшения габаритов и веса зубчатых передач можно, используя механизмы с несколькими сателлитами. Дополнительные сателлиты не изменяют кинематической схемы механизма, однако уменьшается нагрузка на каждую пару звеньев и, следовательно, появляется возможность применить колеса с меньшим модулем.

Малогабаритные дифференциальные механизмы применяются в счетно-решающих и астрономических приборах. С помощью этих механизмов осуществляется суммирование, а также дифференцирование, компенсация систематических ошибок и другие вычисления. Например, если в коническом дифференциале (рис. 30.19) поворачивать валы колес 1 и 2 на углы, пропорциональные слагаемым x_1 и x_2 , то вал водила H повернется на угол, пропорциональный полусумме слагаемых, т. е. получим зависимость

$$x_3 = \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2.$$

Если к дифференциальному механизму присоединить зубчатую передачу с передаточным отношением $i=0,5$, то суммирующий механизм выполнит зависимость

$$x_3 = x_1 + x_2.$$

§ 162. РЕДУКТОРЫ

Редукторами называются механизмы, состоящие из совокупности одной или нескольких пар зубчатых или червячных передач, заключенных в корпус и предназначенных для уменьшения угловой скорости и увеличения момента выходного вала. На рис. 30.20 представлены некоторые виды редукторов, где буквами «Б» и «Т» обозначены быстроходный и тихоходные валы. Вы-

бор схемы редуктора обуславливается величиной передаточного числа, а также взаимным расположением входного и выходного валов.

Конструкций редукторов чрезвычайно много. Однако различные конструкции их можно классифицировать по следующим основным признакам:

— по типу передачи различают зубчатые, червячные и зубчато-червячные редукторы;

— по числу ступеней — одноступенчатые, двухступенчатые, трехступенчатые и т. д.;

— по типу зубчатых колес — цилиндрические, конические и коническо-цилиндрические;

— по относительному расположению валов в пространстве — горизонтальные и вертикальные.

Общее передаточное число редуктора разбивается по ступеням. От целесообразной разбивки по ступеням общего передаточного числа двух- и трехступенчатых редукторов зависят их габариты и удобства эксплуатации.

Для коническо-цилиндрических редукторов передаточное число конической пары обычно принимают не более 4. Для зубчато-червячных редукторов следует принимать передаточное число цилиндрической прямозубой пары не более 3,5—4.

Корпус редуктора служит для размещения в нем деталей редуктора и для обеспечения смазки передач и подшипников. Для удобства монтажа деталей корпус обычно выполняется разъемным.

Чтобы уменьшить потери мощности, необходима смазка зацеплений и подшипников. Смазка зубчатых и червячных зацеплений осуществляется довольно просто. Колеса и червяки окунаются в масло, заливаемое внутрь корпуса.

В редукторах большой мощности или быстроходных смазка подается насосами через трубопроводы. Колеса погружаются в масло на высоту зуба.

В редукторах должно быть устройство для залива и слива масла, а также устройство для контроля масла и вентиляционное устройство.

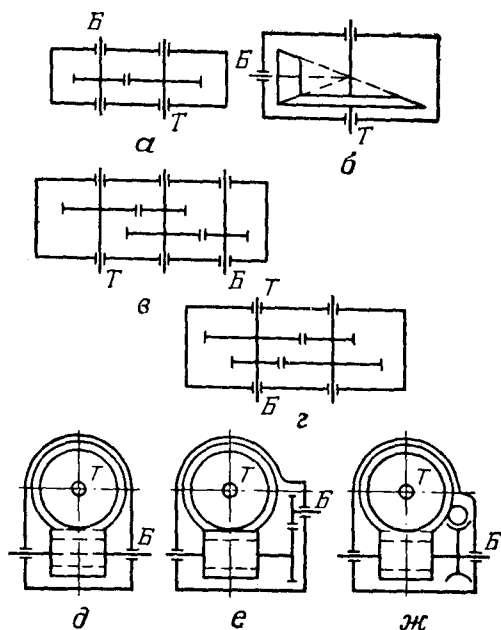


Рис. 30.20.

ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИЗМОВ

§ 163. ОСИ И ВАЛЫ МЕХАНИЗМОВ

Оси и валы механизмов служат для крепления на них вращающихся деталей, и чаще всего они представляют собой цилиндрические стержни, опирающиеся на специальные опоры. С конструктивной точки зрения между осью и валом нет никакой разницы.

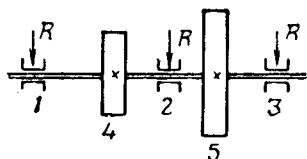


Рис. 31.1.

Однако по условиям работы они существенно отличаются друг от друга. Ось, поддерживающая деталь, при работе испытывает только изгиб. Вал является звеном механизма, передающим крутящий момент, и, следовательно, помимо изгиба подвергается еще и кручению.

Оси в свою очередь подразделяются на неподвижные, т. е. такие, которые поддерживают вращающиеся детали, оставаясь неподвижными, и подвижные оси, которые вращаются вместе с деталями.

Части вала или оси, которые лежат на опоре, называются цапфами. Концевые цапфы называются шипами, а промежуточные — шейками. Шипы и шейки (рис. 31.1) передают только радиальную нагрузку. Цапфа, передающая опоре осевую нагрузку вала или оси, называется пятой.

Неподвижные опорные части, на которые опираются шипы или шейки, образующие вращательные кинематические пары, называются подшипниками, а опоры для пят — подпятниками. Крепление деталей на осях и валах производится с помощью шпонок и зубчатых соединений.

Расчет осей. Длина оси определяется конструктивно, диаметр — из условия прочности на изгиб

$$\sigma_{\text{и}} = \frac{M_{\text{и}}}{W_{\text{и}}} \leq [\sigma]_{\text{и}},$$

где $M_{\text{и}}$ — изгибающий момент, определяется из эпюры $M_{\text{и}}(x)$;

$W_{\text{и}} = \frac{\pi d^3 (1 - \alpha^4)}{32}$ — осевой момент сопротивления сечения вала

$$\left(\alpha = \frac{d_1}{d} \right);$$

d_1 — внутренний диаметр;

d — наружный диаметр;

$[\sigma]_{\text{и}}$ — допускаемое напряжение на изгиб.

Из условия прочности следует

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 M_{\text{и}}}{\pi [\sigma]_{\text{и}} (1 - \alpha^4)}}. \quad (31.1)$$

При наличии шпонки расчетный диаметр увеличивается на 10%. Допускаемое напряжение выбирается с учетом материала вала и характера нагрузки; для вращающихся осей принимают симметричный цикл, для неподвижных — пульсирующий или постоянный при статической нагрузке.

Расчет валов. Вначале определяют приблизительные конструктивные размеры вала, и в первую очередь его длину. Диаметр вала определяют из условия, что вал подвергается одновременно кручению, изгибу, а иногда и растяжению (сжатию), т. е. находится в сложном напряженном состоянии.

Тогда диаметр вала

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 M_{\text{расч}}^i}{\pi [\sigma]_{\text{и}} (1 - \alpha^4)}}, \quad (31.2)$$

где $M_{\text{расч}}^i$ — расчетный момент, определяется в зависимости от условий нагружения по одной из теорий прочности (§ 60). При циклической нагрузке расчетный момент определяют по формуле

$$M_{\text{расч}} = \sqrt{M_{\text{и}}^2 + (\beta M_{\text{к}})^2},$$

где $\beta = 1$ при одинаковом (симметричном) цикле изменения $M_{\text{и}}$ и $M_{\text{к}}$. $\beta \approx 0,6 \div 0,75$ при изменении $M_{\text{и}}$ по симметричному, а $M_{\text{к}}$ по пульсирующему циклу и $\beta = 0,4 \div 0,5$ при $M_{\text{к}} = \text{const}$.

При предварительном (приближенном) расчете диаметра иногда учитывают только кручение. Тогда из условий прочности

$$\tau = \frac{M_{\text{к}}}{W_{\text{р}}} \leq [\tau]_{\text{к}},$$

откуда определяют диаметр вала

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_{\text{к}}}{\pi [\tau]_{\text{к}} (1 - \alpha^4)}}, \quad (31.3)$$

где $M_{\text{к}}$ — крутящий момент, определяется из эпюры $M_{\text{к}}(x)$;

$[\tau]_{\text{к}}$ — допускаемое напряжение при кручении, выбирается с учетом материала валов.

Опорой называется устройство, обеспечивающее движение одной детали механизма относительно другой с заданной точностью и постоянством взаимного положения.

Опора, обеспечивающая вращательное движение, состоит из трущейся части вала (или оси), которая называется цапфой, и охватывающей цапфу детали, называемой подшипником, которые вместе представляют вращательную кинематическую пару.

Подшипники воспринимают усилия, передаваемые осью или валом на опору. Усилие и относительное движение, возникающее между поверхностями цапфы и подшипника, порождают силу трения. Работа этой силы трения ведет к износу цапфы и подшипника, уменьшает КПД механизма и понижает степень точности его работы.

Особенностью механизмов, применяемых в ВМФ, является сравнительно большой диапазон их рабочих режимов. Поэтому целесообразно рассмотреть опоры силовых и приборных механизмов.

По виду трения между соприкасающимися деталями (цапфой и подшипником) все опоры можно разделить на следующие группы:

— опоры с трением скольжения; к ним относятся неразъемные, разъемные и самоустанавливающиеся подшипники, а также цилиндрические, конические и сферические опоры, применяемые в приборах;

— опоры с трением качения; к этим опорам относятся шариковые, роликовые, игольчатые подшипники, приборные шарикоподшипники и опоры на ножках;

— опоры с трением упругости (опоры на подвесках или растяжках);

— опоры с воздушным или жидкостным трением;

— магнитные опоры.

По характеру воспринимаемой нагрузки все опоры можно разделить на три группы.

К первой группе относятся опоры, конструкция которых позволяет воспринимать радиальную нагрузку (перпендикулярную оси цапфы).

Ко второй группе относятся опоры, воспринимающие осевую нагрузку.

К третьей группе относятся опоры, воспринимающие как радиальную, так и осевую нагрузку.

Главное отличие в конструкции и расчете силовых опор от приборных состоит в том, что силовые опоры воспринимают значительные радиальные и осевые нагрузки, чего не происходит в приборных опорах. Этим обуславливаются образование больших сил трения и, как следствие их появления, повышение температуры опоры в результате длительной работы механизма. Силовые опоры должны быть рассчитаны на прочность.

Конструкция приборных опор должна обеспечивать главным образом минимальный момент трения и повышенную точность работы. Поэтому расчет приборных опор сводится в основном к определению момента трения в опоре. В тех случаях, когда удельные давления в опоре велики, производится расчет на прочность.

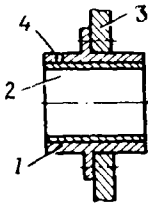


Рис. 31.2.

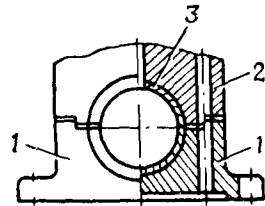


Рис. 31.3.

Опоры с трением скольжения. К силовым опорам с трением скольжения относятся неразъемные, разъемные и самоустанавливающиеся подшипники.

Неразъемный подшипник простейшей конструкции (рис. 31.2) состоит из корпуса с фланцем, с помощью которого подшипник прикрепляется к стенке. Эти подшипники применяются в тех случаях, когда валы вращаются с небольшой скоростью.

Для уменьшения износа цапф в корпус подшипника впрессовывается втулка (обычно из бронзы), которую в случае износа можно легко заменить новой.

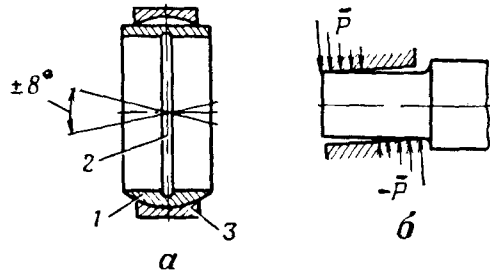


Рис. 31.4.

Разъемные подшипники (рис. 31.3) используют в непрерывно работающих валах. Разъемный подшипник состоит из корпуса, крышки, вкладышей и соединительных болтов.

Наиболее ответственную деталь — вкладыш облицовывают антифрикционными материалами (баббит, дерево, текстолит). Для подвода и распределения смазки по всей длине цапфы во вкладыше делают канавки. Смазывается подшипник в основном двумя способами — капельным, при котором отверстие масленки сообщается с канавкой вкладыша, в которую поступает смазка, и кольцевым, при котором свободное кольцо на цапфе при вращении подает масло в верхнюю часть цапфы.

Самоустанавливающийся подшипник (рис. 31.4) воспринимает только радиальные нагрузки. Он применяется также в подвижных соединениях с колебательным движением валов относительно оси

подшипника. Эти подшипники допускают угловое перемещение осей валов в пределах $\pm 8^\circ$.

В процессе работы подшипников имеют место следующие основные виды трения скольжения:

1. Сухое трение, возникающее, когда между трущимися поверхностями нет слоя смазки. В этом случае сила трения может быть определена по уравнению

$$F_{\text{тр}} = fN,$$

где $F_{\text{тр}}$ — сила трения; f — коэффициент трения; N — нормальная сила.

2. Полусухое трение, возникающее, когда смазка частично протекает между трущимися поверхностями.

3. Полужидкостное трение, которое является переходной фазой между полусухим трением и жидкостным. Коэффициент трения для этого вида смазки $f_{\text{ск}} = 0,005 \div 0,10$.

4. Жидкостное трение возникает там, где рабочие поверхности цапф и вкладышей разделены слоем смазки.

Масло воспринимает внешнюю нагрузку, предотвращая непосредственное соприкосновение рабочих поверхностей. Сопротивление трению в этом случае обусловлено только внутренним трением смазки. Коэффициент трения при жидкостном трении $f = 0,001 \div 0,003$.

Для получения жидкостного трения необходимы следующие условия:

— между двумя скользящими поверхностями должен быть зазор клиновидной формы, который должен быть заполнен маслом;

— скорость движения одной из поверхностей должна быть такой, чтобы в масляном слое создавалось внутреннее давление за счет образования масляного клина;

— помимо режима работы, на характер трения влияет качество смазки, которая должна обладать достаточной вязкостью.

Силу трения в подшипниках при жидкостном режиме смазки можно определить по уравнению

$$F_{\text{тр}} = \mu \frac{vS}{h},$$

где μ — коэффициент жидкостного трения;

v — окружная скорость цапфы;

S — площадь поверхности скольжения;

h — толщина масляного слоя.

Теоретическим обоснованием жидкостного трения является гидродинамическая теория, разработанная проф. Петровым. Суть этой теории в следующем. В процессе работы подшипника пограничный слой масла, прочно прилипший к поверхности цапфы, имеет окружную скорость $v = \omega r$, где r — радиус цапфы. Пограничный слой масла, прилипший к поверхности вкладыша, имеет скорость $v = 0$. Представим, что между этими двумя слоями находится ряд слоев — 1, 2, 3, ..., n .

Вследствие вязкости смазки (трение между слоями) пограничный слой, находящийся на цапфе, будет последовательно вовлекать во вращение и вдавливать под цапфу в виде клина все последующие слои. В результате такого воздействия слоев смазки и благодаря ее вязкости в клиновом масляном слое возникает давление, стремящееся поднять центр цапфы.

Рассмотрим опоры, применяемые в приборах.

Наиболее простую конструкцию опоры с трением скольжения представляют собой цилиндрические опоры.

Цилиндрическая опора (рис. 31.5) состоит из цапфы и втулки или буксы. Втулка неподвижна; цапфа, находящаяся внутри втулки, вращается.

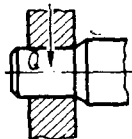


Рис. 31.5.

Цилиндрические опоры воспринимают радиальные усилия. Момент трения в них больше, чем в других опорах такого типа.

Момент трения $M_{тр}$ от действия радиальных усилий, перпендикулярных осям цапф, зависит от характера прикосновения цапфы и втулки и определяется по приближенной формуле

$$M_{тр} = \frac{1}{2} Qfd,$$

где Q — нагрузка на цапфу;
 f — коэффициент трения;
 d — диаметр цапфы.

Опыты показывают, что у смазанных и несмазанных опор коэффициент трения покоя одинаковый. Слой смазки в условиях покоя выдавливается цапфой.

Величину трения можно уменьшить, если заставить опору вибрировать. Однако в приборах, используемых в вооружении Военно-Морского Флота и постоянно работающих в условиях вибрации, допускают увеличенный момент трения.

Для втулок обычно применяют материал более мягкий, чем для осей. Однако в точных приборах с целью уменьшить их износ и сохранить весьма малые зазоры в передачах втулки делают из материалов более твердых, чем те, которые идут на изготовление цапфы. Это закаленная до высокой степени твердости сталь, корунд, агат и другие материалы.

Конические опоры (рис. 31.6) воспринимают и осевые, и радиальные усилия. Опора на конической цапфе дает возможность точно сохранить положение геометрической оси, так как при равномерном износе коническая цапфа опускается строго вертикально.

Устойчивость и надежность конической опоры возрастают с увеличением ее длины, т. е. когда уменьшается угол α . Однако при этом давление p и момент трения $M_{тр}$ увеличиваются.

Момент трения в конической опоре равен

$$M_{\text{тр}} = \frac{Qf \cdot r_{\text{ср}}}{\sin \alpha}, \quad (31.4)$$

где $r_{\text{ср}}$ — средний радиус конической поверхности;
 f — коэффициент трения;
 Q — усилие на опору.

Материалами для конических опор служат высококачественные углеродистые стали, бронза и латунь. Такие опоры применяются в оптических, астрономических и гидрографических приборах.

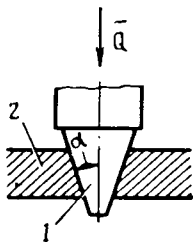


Рис. 31.6.

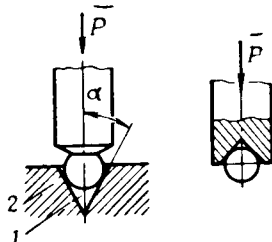


Рис. 31.7.

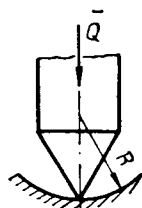


Рис. 31.8.

Другая разновидность опор этого типа — шаровые опоры (рис. 31.7). Шаровая опора состоит из шаровой цапфы и конической втулки. Цапфа соприкасается с втулкой по узкому шаровому поясу. Шаровая опора воспринимает радиальные и осевые усилия. Чем меньше угол конуса втулки, тем больше точность центрирования опоры. Угол конуса втулки обычно равен 45° .

Момент трения в шаровой опоре при осевой силе P равен

$$M_{\text{тр}} = \frac{P \cdot f \cdot r_n}{\sin \alpha},$$

где α — половина угла при вершине конуса;
 r_n — радиус шарового пояса, по которому соприкасаются цапфа и втулка.

Шаровая опора подвержена значительному износу (ввиду малой площади соприкосновения) и поэтому применяется при малых количествах оборотов и небольших нагрузках.

В приборах часто применяются опоры на кернях. Опоры на кернях (рис. 31.8) состоят из цапфы со сферической полированной поверхностью, опирающейся на сферическую поверхность. Такая цапфа называется кернем, а опора с внутренней сферической поверхностью большего радиуса называется подпятником. В зависимости от положения керня опоры делятся на горизонтальные и вертикальные.

Подпятники изготовляются из твердых естественных и искусственных камней: агата, рубина, корунда. Весьма важным качеством минералов, применяемых для изготовления камней подпятников, является их механическая стойкость.

Подшипники качения. Подшипники трения скольжения имеют ряд недостатков. В частности, сравнительно большое трение, большой расход смазки. Поэтому чаще применяются подшипники качения.

На рис. 31.9 показано устройство шарикоподшипника. Между двумя кольцами, из которых одно закреплено на валу, а другое находится в корпусе, расположены стальные шарики. При вращении вала шарики катятся по канавкам, сделанным в обоих кольцах. Шарики отделены друг от друга сепаратором.

Подшипники качения по форме тел качения делятся на шариковые, роликовые и игольчатые.

Шарико- и роликоподшипники применяются в зависимости от следующих свойств этих подшипников. Шарикоподшипники, имея желоба для качения, кроме основной радиальной нагрузки могут воспринимать небольшие осевые нагрузки. Роликоподшипники имеют более высокую нагрузочную способность, чем шарикоподшипники.

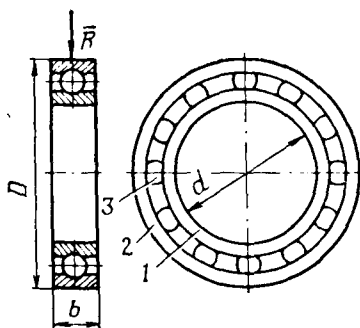


Рис. 31.9.

В зависимости от того, какого характера нагрузку могут воспринимать подшипники качения, они делятся на три группы:

- радиальные подшипники, которые могут воспринимать нагрузки, направленные радиально;
- упорные подшипники, предназначенные для восприятия только осевой нагрузки, действующей вдоль оси вала;
- радиально-упорные подшипники, предназначенные для восприятия комбинированной нагрузки — радиальной и осевой.

Подшипники качения изготавливаются трех основных серий — легкой, средней и тяжелой. При одинаковом диаметре внутреннего кольца они отличаются остальными размерами и нагрузочной способностью.

При значительной радиальной нагрузке применяются двухрядные подшипники. Упорные подшипники предназначены для восприятия осевой нагрузки, действующей на одну или обе стороны. Они могут быть однорядные и двухрядные (рис. 31.10).

Шариковый радиально-упорный подшипник (рис. 31.11) имеет такую конструкцию канавок во внутреннем и наружном кольцах, что он может одновременно воспринимать радиальное R и осевое A усилия.

На рис. 31.12 показана конструкция роликоподшипника. Ролики помещаются между двумя кольцами, причем внутреннее кольцо снабжено двумя бортами для направления роликов. Наружное кольцо цилиндрической формы со скосами, сделанными для удобства закладывания роликов. Ролики удерживаются на определенном расстоянии друг от друга сепаратором.

На рис. 31.13 показан радиально-упорный роликовый подшипник.

Самоустанавливающиеся подшипники применяются, когда необходимо допустить некоторое отклонение геометрической оси вала. Они могут быть шариковыми или роликовыми.

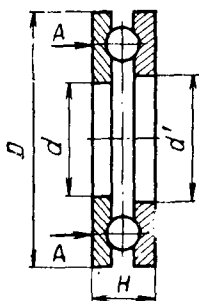


Рис. 31.10.

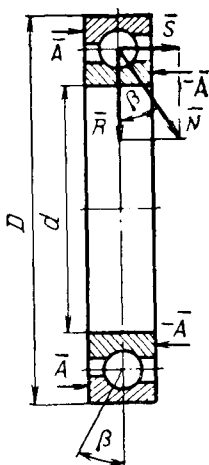


Рис. 31.11.



Рис. 31.12.

Внутренняя сферическая поверхность наружного кольца позволяет валу с насаженным на него кольцом повернуться на определенный угол (рис. 31.14).

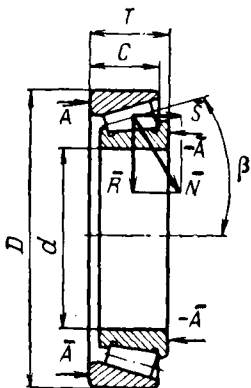


Рис. 31.13.

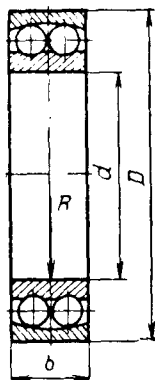


Рис. 31.14.

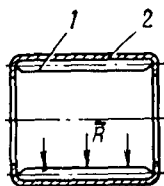


Рис. 31.15.

Игольчатые подшипники применяются при очень стесненных радиальных габаритах. Они обладают высокой радиальной грузоподъемностью, но осевых нагрузок не воспринимают (рис. 31.15). Иглы устанавливаются без сепараторов. Игольчатый подшипник не имеет внутреннего кольца.

Посадка и закрепление колец подшипника на валу могут быть разнообразными. В большинстве случаев внутреннее кольцо подвижно, т. е. вращается вместе с валом. Однако встречаются случаи, когда вращается наружное кольцо. Неподвижность внутреннего кольца относительно вала достигается за счет посадки его с натягом на вал. При установке вала на двух радиальных шарико- и роликоподшипниках необходимо обратить внимание на невозможность изменения длины вала при колебаниях температуры.

Чтобы обеспечить возможность удлинения вала, один из подшипников делается плавающим, т. е. к нему прикрепляется наружное кольцо, свободно перемещающееся в осевом направлении (оно закрепляется в корпусе с двух сторон).

Подшипники качения не рассчитывают, а подбирают по таблицам ГОСТ. Для подбора конструкции, типа и размера подшипника необходимо знать:

- величину и направление действующих на подшипник нагрузок (радиальная, осевая);
- характер нагрузки (постоянная, переменная, ударная);
- диаметр вала;
- число оборотов вала в минуту;
- желательный срок службы подшипника.

Величина и направление нагрузки определяют конструкцию, тип и размер подшипника. Если, например, нагрузка только радиальная, т. е. направлена перпендикулярно оси вала, то выбирается любой тип радиального подшипника. Если вал подвержен осевой нагрузке, то следует ставить упорный подшипник. При наличии радиальной и осевой нагрузок используются радиально-упорные подшипники.

После того как выбран тип подшипника, определяют его размеры. Подшипник и его размеры подбирают по каталогам ГОСТ. Но предварительно определяют коэффициент работоспособности C по формуле

$$C = Q (nh)^{0,3},$$

- где Q — приведенная или условная нагрузка на подшипник, кгс;
 n — число оборотов в минуту;
 h — долговечность или количество часов работы подшипника, обычно $h \geq 5000$ ч.

Приведенная нагрузка Q для радиально-упорных подшипников определяется по формуле

$$Q = (RK_k + mA_0) K_s K_r, \quad (31.5)$$

- где R — фактическая радиальная нагрузка;
 A_0 — осевая нагрузка; $A_0 = A - S$; $S = 1,3 R \operatorname{tg} \beta$;
 m — переводной коэффициент нагрузки A в нагрузку R ;
 K_s — коэффициент, зависящий от характера нагрузки;
 K_k — коэффициент, учитывающий подвижность внутреннего или наружного кольца;

K_T — коэффициент, учитывающий снижение долговечности подшипника во время работы его при высокой температуре.

Для выбора упорного подшипника пользуются уравнением

$$C = A(nh)^{0,3} K_0 K_T.$$

После определения коэффициента работоспособности C его сравнивают с табличным коэффициентом, соблюдая условие

$$C \leq C_{\text{табл.}}$$

Если расчетный коэффициент больше табличного, устанавливают сдвоенные подшипники. Подшипники следует подбирать начиная с легкой серии.

В приборах, особенно в тех, которые работают при больших скоростях вращения, широко применяются шарикоподшипники (например, в гирокомпасах и гировертикалях).

К шарикоподшипникам, используемым в приборах, предъявляется ряд дополнительных требований: они должны обладать минимальным трением, износоустойчивостью, антимагнитностью, коррозионной стойкостью.

Главное при выборе подшипников, применяемых в корабельных приборах, — это минимальная величина момента трения.

Величина момента трения в шарикоподшипнике зависит от ряда факторов, в частности от точности изготовления, качества смазки, температуры. На практике для определения момента трения шарикоподшипников пользуются формулой

$$M_T = M_0 + (1,5A + 1,25R) f \frac{D_0}{d_{\text{ш}}}, \quad (31.6)$$

где M_T — момент трения, кгс·см;

M_0 — момент трения нагруженного подшипника, кгс·см;

A — осевая нагрузка, гс;

R — радиальная нагрузка, гс;

f — коэффициент трения качения, см;

D_0 — диаметр окружности центров шариков;

$d_{\text{ш}}$ — диаметр шариков.

Коэффициент трения качения f колеблется в пределах от 0,0003 до 0,001 см.

В приборах часто применяют так называемые насыпные подшипники с конической опорной цапфой и цилиндрической или сферической чашкой. Насыпные подшипники не имеют сепаратора, внутреннего и внешнего колец, поэтому габариты их меньше. Шариков в таких опорах бывает от 3 до 13.

Коническая опорная цапфа удобна тем, что дает возможность регулировать осевой и радиальный зазоры.

Галтельная цапфа позволяет воспринимать большие нагрузки.

По характеру воспринимаемой нагрузки миниатюрные шарикоподшипники подразделяются на радиальные и радиально-упорные.

Момент трения миниатюрных шарикоподшипников очень мал (до 0,1—0,05 гс·см) и в ряде случаев он в 3—15 раз меньше, чем в агатовых и сапфировых подшипниках. Миниатюрные шарикоподшипники выдерживают значительные нагрузки (от 5,0 до 2000 гс). Наружный диаметр их колеблется от 1,0 до 8,0 мм.

К опорам трения качения относятся опоры на призмах (ножах). Они предназначены для подвижных частей системы, совершающих колебательное движение (рис. 31.16).

Нож выполнен в виде треугольной призмы. Рабочая грань ножа — цилиндрическая поверхность весьма малого радиуса (0,005 мм). Основное преимущество ножевой опоры в том, что она обладает ничтожно малым моментом трения. Материалом для ножей и подушек обычно служат высокоуглеродистые стали. Подушки рекомендуется изготавливать из материала более твердого, чем материал ножа, так как в случае износа легче сменить нож, чем подушку. Ножевые опоры применяются во многих штурманских приборах, в электромагнитных реле и других механизмах.

Опоры с трением упругости применяются при колебательном движении. В упругих опорах почти отсутствует трение скольжения. Перемещение деталей относительно друг друга под действием внешнего момента или силы обеспечивается благодаря упругим деформациям пружины.

Упругая опора представляет собой тонкую пружину круглого или плоского сечения. Один конец пружины закреплен на неподвижной детали, другой — на подвижной части прибора.

Расчет упругих опор сводится к расчету пружин, работающих на изгиб или кручение.

Момент трения в подшипниках уменьшается при использовании воздушных и жидкостных опор. Такие опоры применяются, например, в гироскопических приборах, гирокомпасах и других приборах. В этих опорах момент трения составляет несколько миллиграммсантиметров. В некоторых морских приборах применяются опоры, в которых практически трение отсутствует.

Воздушная опора (рис. 31.17) состоит из двух полусфер. В пространстве между этими полусферами непрерывно под давлением подается воздух, который поддерживает цапфу во взвешенном состоянии. Чтобы не был поврежден подшипник, когда прекращается подача воздуха, автоматическое устройство поднимает шарик, который воспринимает на себя вес подвижной части прибора.

Для создания воздушной подушки необходимо, чтобы суммарная вертикальная составляющая сила от давления воздуха в за-

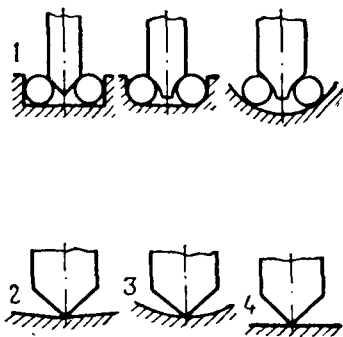


Рис. 31.16.

зоре была равна весу подвижной системы прибора. Исходя из этого условия определяют расход и давление воздуха.

Воздушная опора — саморегулирующаяся. При заданном давлении воздуха, подводимого к чашке в случае подъема цапфы и увеличения зазора, давление в зазоре упадет и цапфа опустится, а при уменьшении зазора давление возрастет и цапфа поднимется.

Так как величина зазора небольшая (сотые доли миллиметра), нагнетаемый воздух необходимо фильтровать.

Применение воздушных опор дает возможность создать устройства, работающие с частотой вращения до 50 000 об/мин.

Коэффициент трения в воздушных опорах равен примерно 10^{-5} .

Наряду с воздушными опорами применяются жидкостные опоры. В качестве жидкости часто используют ртуть. Подвижная часть прибора опирается на каплю ртути, налитую в подпятник или на ртутное кольцо. Трение в жидкостных опорах меньше, чем трение в опорах на кернах.

В последнее время часто применяют магнитные опоры, в которых используется сила магнитного поля. Магнитные опоры бывают с силами притяжения или с силами отталкивания двух магнитов. Магниты изготавливаются из магнитотвердых материалов. В приборах с магнитными опорами нет трения, они не требуют ухода за собой в течение длительного времени. Однако магнитные опоры еще относительно дороги.

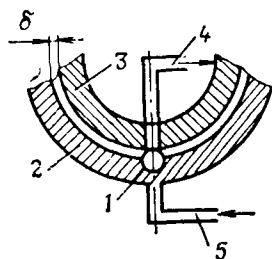


Рис. 31.17.

§ 165. МУФТЫ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В МЕХАНИЗМАХ

Муфты представляют собой устройства, которые служат для соединения валов и передачи вращательного движения, а также для предохранения механизмов от поломок при перегрузках и для регулировки скорости. Кроме того, на муфты возлагается ряд дополнительных функций, например, компенсация несоосности валов, смягчение динамических нагрузок, особенно при пуске и остановке машин и механизмов, и ряд других функций.

В зависимости от назначения все муфты можно разделить на три основные группы:

— постоянные муфты, которые не допускают разобщения валов без разборки муфты;

— сцепные муфты, позволяющие разъединять валы во время работы и при остановке;

— предохранительные муфты, разъединяющие валы при перегрузке механизма и тем самым предохраняющие машину от поломки.

Постоянные муфты подразделяются на простые и компенсирующие. К простым муфтам относятся втулочные, фланцевые и продольно-свертные.

Втулочная муфта (рис. 31.18) состоит из втулки, которая соединяет концы двух валов. Втулку можно соединить с частями вала с помощью шпонок или штифтов. При соединении штифтами они рассчитываются на сдвиг. Условие прочности на сдвиг будет

$$\tau_c = \frac{P}{2F} \leq [\tau_c],$$

где $P = \frac{2M_B}{d}$ — величина сдвигающей силы;

$F = \frac{\pi d_o^2}{4}$ — площадь поперечных сечений штифта;

d и d_o — диаметры вала и штифта соответственно.

Постоянная муфта может быть использована в качестве предохранительной, для этого штифты делают из стали с временным сопротивлением $\sigma_B \geq 70$ кгс/мм².

Продольно-свертная муфта (рис. 31.19) состоит из двух частей, соединенных между собой болтами. При свертывании муфт между поверхностью вала и внутренней поверхностью полумуфт создаются силы трения, которые передают крутящий момент. Может также быть поставлена шпонка.

Достоинством конструкции рассматриваемой муфты является простота ее сборки и разборки.

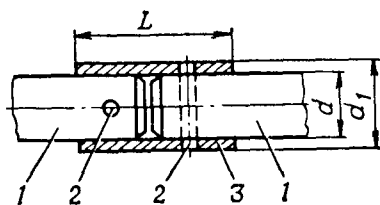


Рис. 31.18.

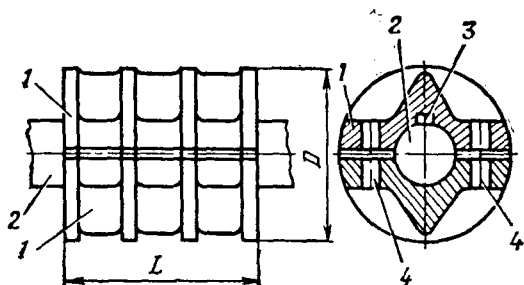


Рис. 31.19.

Размеры муфты для заданного диаметра определяются по таблицам ГОСТ. Расчет производится из условия равенства вращающего момента, приложенного к валу, моменту трения между муфтой и валом, т. е.

$$M_B = M_{тр.}$$

Фланцевая муфта (рис. 31.20) состоит из двух фланцев со ступицами, образующими полумуфты. Обе полумуфты крепятся на концах валов и соединяются между собой болтами. Болты могут быть поставлены с зазором и без зазора (с точной пригонкой). Чтобы избежать проворачивания полумуфт, болты должны быть затянуты так, чтобы сила трения $F_{тр}$, возникающая между дисками, была больше окружной силы P , т. е. $F_{тр} \geq P$.

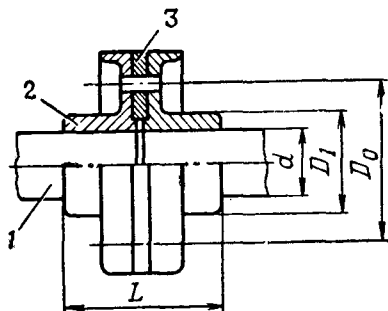


Рис. 31.20.

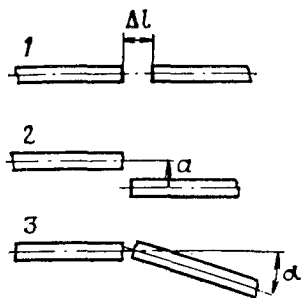


Рис. 31.21.

При сборке и установке машин и механизмов весьма трудно добиться соосности валов. Кроме того, в процессе работы, особенно в корабельных условиях, возможны отклонения от заданного взаимного расположения валов, что может нарушить нормальную работу механизмов и вывести их из строя. Указанные обстоятельства заставляют применять в различных корабельных механизмах и приборах компенсирующие муфты.

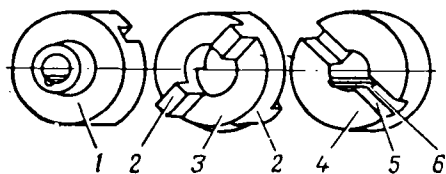


Рис. 31.22.

Компенсирующие муфты предназначены для компенсации радиальных, осевых, угловых или комбинированных смещений валов (рис. 31.21). В основе работы компенсирующих муфт лежит использование упругих свойств элементов муфты и смещение или скольжение одних элементов муфты относительно других.

К компенсирующим муфтам относится крестообразная муфта (рис. 31.22). Она состоит из двух полумуфт, закрепленных на валах. Между полумуфтами помещается вкладыш с крестообразно расположенными выступами, которые входят в пазы полумуфт.

Если геометрические оси валов не совпадают, то при работе муфты вкладыш будет скользить в пазах полумуфт. Если бы не было вкладыша, неточность центрирования передавалась бы с одного вала на другой, а это должно вызвать вибрацию всего механизма. В процессе работы вкладыш как бы плавает в пазах полумуфт и тем самым компенсирует радиальные и частично осевые

отклонения валов. Однако такая муфта чувствительна к перекосам валов. С увеличением диаметра муфты допускаемая угловая скорость уменьшается.

Зубчатая муфта (рис. 31.23) состоит из двух втулок с внешними зубьями и надетых на них обойм с внутренними зубьями. Втулки насаживаются на концы валов. Обоймы соединяются винтами. Зубчатое зацепление выполнено так, что втулки могут иметь радиальное и осевое смещения. Кроме того, в случае перекоса они могут поворачиваться в полумуфтах. Таким образом, эти муфты компенсируют неточность центрирования.

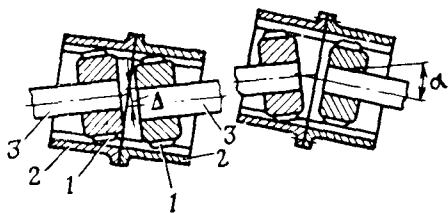


Рис. 31.23.

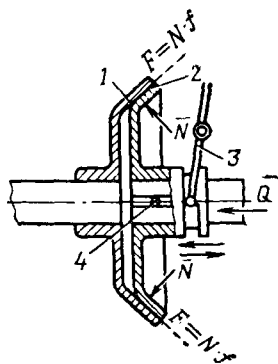


Рис. 31.24.

Муфты с упругими элементами компенсируют неточность, а главное смягчают толчки и удары при работе передачи. В качестве упругих элементов можно использовать металлические (стальные) пружины, а также неметаллические элементы — кожаные и резиновые кольца. Наибольшее распространение получила упругая втулочная пальцевая муфта (МУВП).

Сцепные муфты предназначены для того, чтобы обеспечивать соединение и разъединение двух валов без остановки машины. Эти муфты делятся на фрикционные и кулачковые. В зависимости от формы рабочих поверхностей фрикционные муфты подразделяются на конусные, дисковые и барабанные. На рис. 31.24 представлена конусная фрикционная муфта.

Фрикционные муфты имеют ряд положительных качеств: включение муфты можно применять при любом значении разности угловых скоростей валов; при возникновении перегрузок муфты буксуют до тех пор, пока не уменьшится нагрузка, т. е. фрикционная муфта выполняет функции и предохранительной муфты. Благодаря указанным преимуществам фрикционные муфты широко используются в корабельных механизмах.

При воздействии на дисковую муфту усилием Q между рабочими дисками возникает сила трения $F_{\text{тр}}$:

$$F_{\text{тр}} = fQ,$$

где f — коэффициент трения;
 Q — нажимное усилие.

Момент, создаваемый силой трения, должен быть связан с вращающим моментом, передаваемым валом, условием

$$M_B \leq Qfr_{cp},$$

где r_{cp} — средний радиус диска.

Следовательно, нажимное усилие

$$Q \geq \frac{M_B}{fr_{cp}}.$$

§ 166. СОЕДИНЕНИЯ

Машины и механизмы состоят из отдельных деталей и узлов. Эти детали и узлы, назначением которых является передача движения и усилий от одного элемента к другому, должны быть связаны между собой. Связь осуществляется с помощью различных соединений. Все существующие виды соединений делятся на две группы: подвижные и неподвижные.

Ниже рассматриваются только неподвижные соединения, которые в свою очередь делятся на разъемные и неразъемные.

При разборке разъемных соединений их детали не разрушаются и пригодны для дальнейшего использования.

Детали неразъемных соединений при разборке соединения разрушаются.

К разъемным соединениям относятся: резьбовые, шпоночные, зубчатые и клиновые соединения.

К неразъемным принадлежат заклепочные, сварные, клеевые соединения, а также посадки с натягом.

Резьбовое соединение — самый распространенный вид соединений. Винт с наружной и гайка с внутренней резьбами служат основанием для резьбовых соединений различных видов.

В резьбовых соединениях различают два понятия: шаг и ход винта.

Ходом винта называется расстояние S , на которое перемещается гайка при одном полном обороте. Шагом t винта называется расстояние между двумя соседними витками измеренного вдоль оси винта. В машинах применяются одно-, двух- и трехзаходные резьбы. В двухзаходной резьбе, например, на поверхности винта нарезаны на одинаковом расстоянии друг от друга две нарезки, в трехзаходной — три нарезки и т. д.

Если обозначить число заходов буквой z , получим следующую зависимость:

$$S = z \cdot t.$$

Различают правые и левые резьбы. Резьбы подразделяются на пять видов: треугольная, прямоугольная, трапецеидальная, упорная и круглая (рис. 31.25).

Треугольные резьбы делятся также на метрические и дюймовые. Наиболее распространенной является метрическая резьба, все

элементы которой выражены в миллиметрах, а угол профиля резьбы $2\beta = 60^\circ$. У дюймовой резьбы наружный диаметр выражен в дюймах ($1'' = 25,4$ мм). Шаг резьбы задается количеством ниток на дюйм, а угол $2\beta = 55^\circ$.

По своему назначению резьбы подразделяются на крепежную, трубную и резьбы для передачи движения (грузовые винты).

Треугольные метрические резьбы делятся на основную и мелкие. Основная резьба отличается от мелкой при одинаковых диаметрах нарезки величиной шага и высотой профиля резьбы.

Большая глубина основной резьбы ослабляет детали, особенно полые детали (трубы). Чтобы избежать этого, применяются мелкие резьбы, которые позволяют повысить самоторможение и прочность соединения.

Все резьбы, кроме прямоугольной, стандартизованы, сведения о них приводятся в специальных таблицах и каталогах.

Прямоугольная резьба иногда применяется в грузовых винтах и имеет большой КПД. Трапецеидальную резьбу делают в ходовых винтах.

Упорная резьба применяется в ходовых винтах, если движение одностороннее. Круглая резьба применяется реже, главным образом в механизмах, которые легко загрязняются пылью и песком.

При расчете резьбовых соединений различают две основные группы:

— соединения, обеспечивающие скрепление деталей и узлов машин болтами, винтами, резьбовыми шпильками и другими деталями;

— соединения, передающие движение или усилие с помощью пары — винт и гайка.

Кроме того, соединения первой группы могут быть ненапряженными и напряженными.

Ненапряженным болтовым соединением называется такое соединение, в котором нет напряжений, возникающих от предварительной затяжки в теле болта. В зависимости от характера нагружения различают соединения, нагруженные в основном осевым усилием или поперечной нагрузкой. При затяжке болта последний подвергается деформации кручения.

Расчет резьбовых соединений. Наименьшим сечением болта является внутренний диаметр резьбы. Условием прочности на растяжение будет

$$\sigma_p = \frac{P}{F} \leq [\sigma]_p,$$

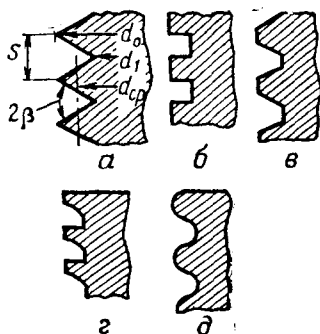


Рис. 31.25.

где $F = \frac{\pi d_1^2}{4}$ — площадь поперечного сечения болта;
 P — осевое усилие, приложенное к болту;
 $[\sigma]_p$ — допускаемое напряжение, для стандартных болтов
 $500 \div 1000$ кгс/см² (49—98 МН/м²).

Из условия прочности следует

$$d_1 = \sqrt{\frac{4P}{\pi [\sigma]_p}}. \quad (31.7)$$

Внешний диаметр подбирается по таблицам и указывается на чертеже. Если сила действует перпендикулярно оси болта, то рас-

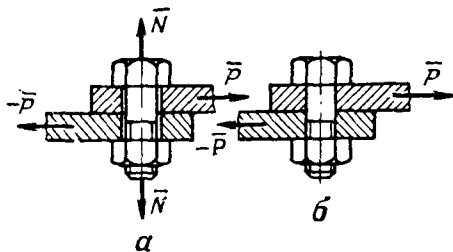


Рис. 31.26.

чет болта проводится по различной методике в зависимости от того, поставлен ли болт с зазором или без зазора (рис. 31.26).

При установке болта с зазором необходимо болт затянуть с силой, которая создала силу трения $F_{тр}$, большую, чем сама сила P , т. е.

$$F_{тр} = f \cdot N \geq P \text{ и } N \geq \frac{P}{f},$$

где f — коэффициент трения ($f \approx 0,2$).

Условие прочности при растяжении будет $\left(F = \frac{\pi d_1^2}{4} \right)$:

$$\sigma_p = \frac{N}{F} \leq [\sigma]_p, \text{ откуда } d_1 \geq \sqrt{\frac{4P}{\pi [\sigma]_p f}}.$$

Учитывая, что болт при затяжке испытывал кручение, за расчетную принимают силу $P_{расч} = kP$, где $k = 1,2 \div 1,3$.

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{4P_{расч}}{\pi [\sigma]_p f}} = \sqrt{\frac{5,2P}{\pi [\sigma]_p f}}. \quad (31.8)$$

При установке болта без зазора болт испытывает сдвиг, растяжение и смятие. При расчете основными считают сдвиг и смятие. Тогда приближенно (l — меньшая толщина детали)

$$\tau_c = \frac{P}{F} = \frac{4P}{\pi d^2} \leq [\tau]_c, \quad \sigma_{см} = \frac{P}{F_1} = \frac{P}{d_2 l} \leq [\sigma]_{см},$$

откуда наружный диаметр тела болта

$$d_2 \geq \sqrt{\frac{4P}{\pi [\tau]_c}}, \quad d_2 \geq \frac{P}{l[\sigma]_{см}}, \quad (31.9)$$

где $[\tau]_c$ — допускаемое напряжение на сдвиг, а $[\sigma]_{см}$ — на смятие.

Для соединения вала и оси с вращающейся деталью применяются шпонки, которые вводятся в пазы вала и детали. Шпонка, введенная в паз, передает вращающий момент от вала к детали или от детали к валу.

Шпонки бывают призматические и клиновые (рис. 31.27). Призматические шпонки (рис. 31.27, б) выполняются в виде бруска прямоугольного сечения. Такая шпонка не позволяет детали вращаться относительно вала, но не удерживает ее от продольного перемещения вдоль вала. Призматические шпонки не создают распирающих усилий и образуют ненапряженное шпоночное соединение.

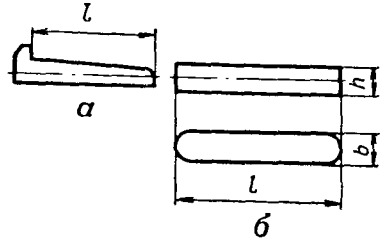


Рис. 31.27.

Клиновые шпонки (рис. 31.27, а) отличаются от призматических тем, что одна из граней шпонки делается с небольшим уклоном по длине (обычно 1/100).

Клиновые шпонки вводятся в паз с определенным усилием, и, следовательно, между валом и деталью возникают распирающие силы. Такие шпонки закрепляют сидящие на валу детали так, что они не могут ни вращаться, ни перемещаться вдоль вала. Клиновые шпонки образуют напряженное соединение (рис. 31.28).

Эти шпонки называются врезными, если выточка для шпонки имеется и на валу, и на втулке. Они работают за счет распирающих усилий, возникающих, когда шпонки забиваются в шпоночное гнездо, и применяются для передачи больших крутящих моментов и там, где не нужно строгое центрирование детали на валу.

Недостатком такой конструкции соединения является то, что вал ослабляется канавкой для шпонки, а деталь, насаживаемая на него, перекашивается.

Наиболее простой конструкцией соединения является шпонка на лыске. В такой конструкции шпоночная канавка остается только во втулке детали, а на валу шпонка опирается на площадку (лыску), расположенную вдоль вала. Ослабление вала здесь незначительное, но клинообразная шпонка создает распирающие усилия и передает небольшие моменты.

Чтобы совершенно избежать ослабления вала, применяют фрикционные шпонки. Это клиновые шпонки, нижняя сторона которых подгоняется под поверхность вала. Передача вращающего момента происходит за счет сил трения $F_{тр}$, возникающих при забивке шпонки. Фрикционные шпонки применяются для предохранения механизмов от поломки в случае перегрузки.

Недостатком такого вида соединения является незначительная величина вращающего момента, который соединение способно передать при работе механизма, а также смещение ступицы относительно вала.

Призматические шпонки всегда делаются врезными и свободно закладываются в пазы вала или втулки.

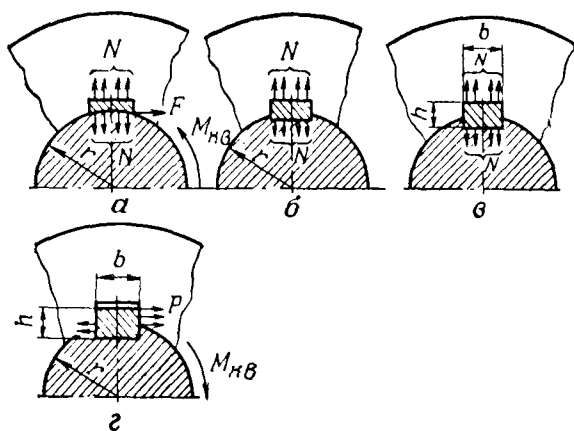


Рис. 31.28.

Иногда соединенная шпонкой деталь должна перемещаться вдоль оси вала. В таких случаях применяют направляющую шпонку. Эта шпонка имеет большую длину и прикрепляется к валу винтами. Преимущество призматических шпонок по сравнению с клиновыми в лучшем центрировании их и в том, что в этих шпонках нет распирающих усилий.

Кроме клинообразных и призматических шпонок применяются также тангенциальные сегментные шпонки.

РАЗДЕЛ V

ГИДРОМЕХАНИКА

§ 167. ВВЕДЕНИЕ

Гидромеханика — раздел механики, изучающий равновесие и движение жидкости, а также взаимодействие между жидкостью и твердыми телами, полностью или частично погруженными в жидкость.

При этом под жидкостью понимается непрерывная среда, обладающая свойством текучести, т. е. способная неограниченно изменять свою форму под действием сколь угодно малых сил, но в отличие от газа весьма мало изменяющая свою плотность при изменении давления.

В гидромеханике принято рассматривать жидкость в виде сплошной деформируемой среды без учета ее молекулярной структуры, т. е. принимать, что она заполняет пространство без образования каких бы то ни было пустот. Сплошность выражается в непрерывности изменения величин, характеризующих распределение массы в среде (плотность) и ее движение (скорость, ускорение и др.) во всей области, заполненной жидкостью, исключая отдельные «особые» точки, линии, поверхности.

Гипотеза о сплошности жидкости значительно упрощает исследования, так как позволяет все параметры, определяющие равновесие и движение жидкости, рассматривать в большинстве случаев как непрерывные и дифференцируемые функции координат точки и времени.

Характерной особенностью жидкости является текучесть, или легкая подвижность. Это обусловлено тем, что вследствие малого сцепления между частицами жидкость практически не оказывает сопротивления ни растяжению, ни медленному изменению формы и может сопротивляться лишь силам, ее сжимающим.

Жидкости принято разделять на капельные и газообразные. Капельными жидкостями называют такие, которые в поле силы тяжести могут иметь граничную поверхность уровня и с практической точки зрения являются несжимаемыми.

Газообразные жидкости в противоположность капельным легко поддаются сжатию и обладают упругостью. В силу отмеченных свойств капельные жидкости часто называют несжимаемыми, а газообразные — упругими.

Если сжимаемостью можно пренебречь при условиях, подробно рассмотренных в гл. 32, то движение жидкостей и газов можно охарактеризовать общими уравнениями, отличающимися только коэффициентами, зависящими от физических свойств жидкости или газа.

В жидкости, и особенно в газе, в отличие от твердого тела относительные расположения молекул непрерывно изменяются. Эти перемещения имеют весьма сложный характер, и определение закономерностей такого движения представляет одну из труднейших задач физики. Так как нас интересует взаимодействие жидкости и тела, то гидромеханика изучением микроструктуры жидкости, связанной с хаотическим тепловым движением молекул, не занимается, а изучает движение жидкости, вызванное только внешними причинами.

Основными задачами гидромеханики являются определение распределения скоростей и давления внутри жидкости и определение силового взаимодействия между жидкостью и твердым телом. Эти задачи решаются как с помощью теоретических исследований (при этом широко используются математический анализ, способы средних величин, аналогий, размерностей, основные законы теоретической механики, термодинамики), так и специально поставленных экспериментов. В основе экспериментального метода лежат прежде всего законы механического подобия и основанные на них правила моделирования, позволяющие обобщить результаты единичного опыта и распространить их на группу явлений, подобных изучаемому.

Гидромеханика делится на гидростатику, кинематику и динамику жидкости.

В гидростатике рассматривается частный случай движения жидкости — равновесие жидкости и равновесие твердых тел, полностью или частично погруженных в жидкость.

Кинематика жидкости существенно отличается от кинематики твердого тела. В твердом теле известно движение любой его точки, если заданы в общем случае движения трех точек тела. В кинематике жидкости такая связь отсутствует; частицы движутся более или менее самостоятельно и их движение будет определено, если будет известно поле скоростей, т. е. скоростей v в любой точке жидкости. Таким образом, в кинематике жидкости рассматриваются кинематические характеристики движения (виды течений, элементы поля скоростей, вращательное движение жидкости и т. д.) без учета сил, вызывающих это движение.

В гидродинамике устанавливается взаимосвязь между действующими силами и движением жидкости, вызываемым этими силами. В свою очередь гидродинамику делят на гидродинамику идеальной (невязкой) жидкости, при движении которой не учитывают силы трения, и гидродинамику вязкой жидкости. В последней главе раздела V рассмотрены некоторые вопросы движения сжимаемой жидкости.

При изучении законов равновесия и движения жидкости необходимо знать основные физико-механические свойства жидкостей.

ГЛАВА 32

ГИДРОСТАТИКА

§ 168. ОСНОВНЫЕ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ

Основными физико-механическими свойствами жидкости являются плотность и удельный вес, сжимаемость и вязкость.

Плотность и удельный вес. Плотностью ρ однородной жидкости называется масса жидкости в единице объема или отношение массы жидкости к ее объему:

$$\rho = \frac{M}{V} \text{ кг/м}^3, \quad (32.1)$$

где M — масса жидкости, заключенной в объеме V .

Удельным весом γ однородной жидкости называется вес жидкости в единице объема или отношение веса жидкости к его объему:

$$\gamma = \frac{G}{V} \text{ Н/м}^3, \quad (32.2)$$

где G — вес жидкости, заключенной в объеме V .

Между плотностью и удельным весом существует зависимость

$$\rho = \frac{\gamma}{g}, \quad (32.3)$$

где g — ускорение силы тяжести.

Так, если принять для пресной воды при $t=4^\circ \text{C}$, $\gamma=9807 \text{ Н/м}^3=1000 \text{ кгс/м}^3$ и $g=9,807 \text{ м/с}^2$, тогда $\rho = \frac{9807}{9,807} = 1000 \text{ Н} \cdot \text{с}^2/\text{м}^4$, или в системе МКГСС при $\gamma=1000 \text{ кгс/см}^3$

$$\rho = \frac{1000}{9,81} = 101,9 \text{ кгс} \cdot \text{с}^2/\text{м}^4.$$

Значения γ и ρ для морской воды и других жидкостей приведены в справочниках. Удельный вес и плотность жидкости зависят от давления и температуры.

Сжимаемость жидкостей. Сжимаемостью называется свойство жидкости изменять свою плотность при изменении давления и (или) температуры. Для капельных жидкостей величина плотности с изменением давления изменяется мало. Например, при увеличении давления от $9,81$ до $9,81 \cdot 10^2 \text{ Н/м}^2$ (от 1 до 100 кгс/см^2) первоначальный объем воды, а следовательно, и плотность ее уменьшаются всего на $0,5\%$.

Плотность капельных жидкостей в зависимости от температуры изменяется в несколько большей степени. Так, плотность чистой воды при атмосферном давлении и изменении температуры от 4 до 100°С уменьшается примерно на 4%.

Что же касается воздуха и других газов, то их плотность с изменением давления и температуры изменяется весьма значительно. Для газов зависимость ρ от давления p и температуры t устанавливается, как известно из физики, уравнением состояния газа

$$\frac{p}{\rho} = RT,$$

где R — удельная газовая постоянная (для воздуха $R = 287$ Дж/(кг·К);
 T — абсолютная температура, К.

При постоянной температуре плотность воздуха возрастает практически прямо пропорционально увеличению давления. С возрастанием температуры при $p = \text{const}$ плотность газов уменьшается. Так, если при неизменном давлении температура увеличится от нуля до 50°С, плотность газов уменьшится примерно на 18%.

Вязкость жидкости. Под вязкостью понимают свойство жидкости оказывать сопротивление относительному движению (сдвигу) частиц жидкости. Вязкость иногда называют внутренним трением. Силы трения обуславливают то, что слой жидкости, движущийся быстрее, увлекает слой жидкости, движущийся медленнее, и наоборот. Согласно гипотезе И. Ньютона и дальнейшему развитию ее Н. П. Петровым касательное напряжение τ , равное силе трения, приходящейся на единицу площади, и возникающее между смежными движущимися слоями, пропорционально величине разности скоростей dv и обратно пропорционально расстоянию dn , т. е.

$$\frac{F_{\text{тр}}}{S} = \tau = \mu \frac{dv}{dn} \text{ Н/м}^2, \quad (32.4)$$

где μ — динамический коэффициент вязкости (Н·с/м²);

$\frac{dv}{dn}$ — градиент скорости по нормали к слою (м/с·м).

В ряде случаев удобно характеризовать вязкость жидкостей так называемым кинематическим коэффициентом вязкости ν , представляющим собой отношение динамического коэффициента вязкости к плотности жидкости:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \text{ м}^2/\text{с}. \quad (32.5)$$

Коэффициент вязкости ν получил название кинематического вследствие своей размерности, в которую входят кинематические характеристики. Вязкость жидкости зависит от ее температуры.

§ 169. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ В ЖИДКОСТИ.
ГИДРОСТАТИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ И ЕГО СВОЙСТВА

В жидкости вследствие большой подвижности частиц могут действовать только непрерывно распределенные силы.

Выясним природу этих сил. Для этого выделим в жидкости некоторый объем V , ограниченный поверхностью S . Силы, действующие на выделенный объем, делят на две группы (см. раздел «Динамика»): объемные или массовые и поверхностные. Напомним, что объемные или массовые силы приложены к каждой материальной частице и пропорциональны ее массе (сила тяжести, силы инерции и др.).

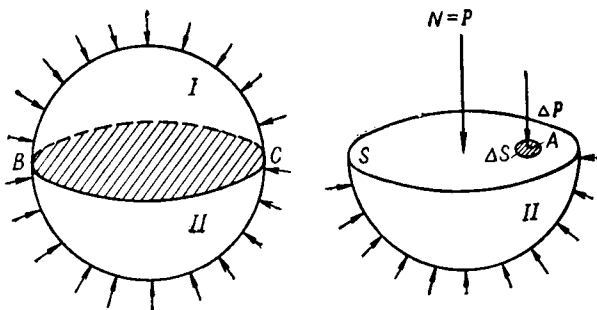


Рис. 32.1.

Объемные или массовые силы, отнесенные к единице массы, будут иметь размерность ускорения. В дальнейшем будем задавать силы, отнесенные к единице массы, через их проекции X, Y, Z на оси неподвижной прямоугольной системы координат. Тогда проекции силы, действующей на элементарный объем ΔV , будут $X\rho\Delta V, Y\rho\Delta V$ и $Z\rho\Delta V$.

Поверхностной силой называют силу, которая приложена к поверхности рассматриваемого объема. Поверхностные силы удобно отнести к единице площади поверхности, и тогда они называются средним напряжением или поверхностными сил.

Проекция напряжения на нормаль называется нормальным напряжением (или давлением) и обозначается p , соответственно проекция на касательную называется касательным напряжением (или напряжением трения) и обозначается τ .

Гидростатическое давление и его свойства. Рассмотрим объем жидкости, находящейся в равновесии. Для определения гидростатического давления воспользуемся методом сечения. Мысленно проведем плоскость BC (рис. 32.1) и отбросим, например, верхнюю часть объема I , заменяя ее действие на нижнюю часть объема II нормальной силой $N=P$. Средним гидростатическим давлением называется отношение

$$p_{\text{ср}} = \frac{P}{S}, \quad (32.6)$$

где S — площадь сечения, а P — величина силы давления.

Пусть ΔS — малая площадка, внутри которой расположена данная точка A , а ΔP — величина силы, приходящейся на эту площадку.

Гидростатическим давлением или давлением в данной точке называется предел отношения ΔP к ΔS при $\Delta S \rightarrow 0$, т. е.

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta S}. \quad (32.7)$$

За единицу давления в системе СИ принят паскаль (Па). Паскаль — давление, создаваемое силой 1 Н, равномерно распределенной по поверхности площадью 1 м². Однако размер этой единицы весьма мал. Она приблизительно в 10⁵ раз меньше технической атмосферы, равной давлению 1 кгс на 1 см². Точно 1 кгс/см² = = 98066,5 Па. В настоящее время измерительные приборы пока градуированы в кгс/см², т. е. в технических атмосферах.

Основные свойства гидростатического давления:

- направление гидростатического давления всегда совпадает с направлением внутренней нормали к рассматриваемой площадке;
- величина гидростатического давления в данной точке не зависит от направления площадки, проходящей через эту точку.

§ 170. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЖИДКОСТИ И ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ГИДРОСТАТИКИ

Выделим в произвольном месте жидкости, находящейся в равновесии (рис. 32.2), элементарный параллелепипед, длины ребер которого dx , dy , dz и которые параллельны осям прямоугольной неподвижной системы координат x , y , z .

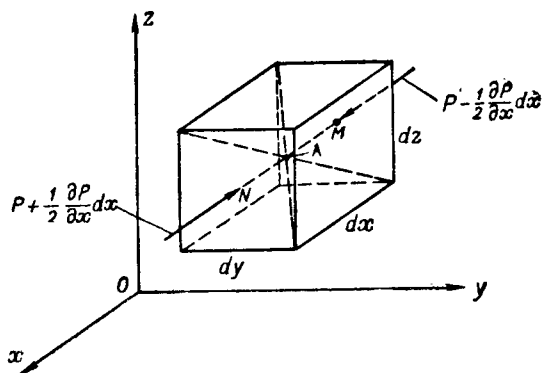


Рис. 32.2.

В жидкости, находящейся в равновесии, силы внутреннего трения отсутствуют ($\tau = 0$). Поэтому по граням параллелепипеда будут действовать лишь нормальные усилия и соответствующие им гидростатические давления. Пусть величина гидростатического давления в точке, расположенной в центре параллелепипеда, рав-

на p , где $p=f(x, y, z)$ есть непрерывная функция координат. Проведем через точку линию MN , параллельную оси x . Тогда в общем случае величина гидростатического давления будет непрерывно изменяться вдоль этой линии. Изменение величины гидростатического давления, приходящейся на длине линии $MN=dx$, может быть представлено частной производной $\frac{\partial p}{\partial x}$, используя которую давление в точках M и N можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} p_M &= p - \frac{1}{2} dx \frac{\partial p}{\partial x}; \\ p_N &= p + \frac{1}{2} dx \frac{\partial p}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (32.8)$$

где второе слагаемое правых частей равенств (32.8) выражает изменение давления p на длине $1/2 dx$.

Запишем условие равновесия элементарного параллелепипеда, объем которого $dV=dx dy dz$ в проекциях на ось x , учитывая, что проекция объемной силы будет $X \rho dV = X \rho dx dy dz$

$$\sum X_i = X \rho dx dy dz + P_M - P_N = X \rho dx dy dz + \left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz.$$

После простейших преобразований получим

$$X \rho dx dy dz - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz = 0 \quad \text{или} \quad X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Аналогично составляются уравнения равновесия в проекциях на оси y и z . Таким образом, дифференциальные уравнения равновесия жидкости будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0; \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0; \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (32.9)$$

Уравнения (32.9), полученные Л. Эйлером (1755 г.), показывают, что при равновесии жидкости объемные силы, действующие на жидкость, уравновешиваются соответствующими поверхностными силами.

С практической точки зрения удобно представить систему уравнений (32.9) в виде одного эквивалентного им уравнения, не содержащего частных производных.

Умножим почленно первое из системы уравнений (32.9) на dx , второе — на dy , третье — на dz и затем сложим все три уравнения; тогда получим

$$Xdx + Ydy + Zdz = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right). \quad (32.10)$$

Выражение в скобках есть полный дифференциал давления. Тогда уравнение (32.10) можно переписать в виде

$$Xdx + Ydy + Zdz - \frac{1}{\rho} dp = 0. \quad (32.11)$$

Рассмотрим случай, когда из объемных сил на жидкость действует только сила тяжести, направленная по оси z вниз. Тогда $X = Y = 0$; $Z = -g$. Уравнение равновесия (32.11) при этом примет вид

$$gdz + \frac{1}{\rho} dp = 0. \quad (32.12)$$

Интегрируя выражение (32.12), находим при $\rho = \text{const}$

$$gz + \frac{p}{\rho} = \text{const}$$

или, учитывая, что $\rho g = \gamma$, получаем основное уравнение гидростатики

$$\frac{p}{\gamma} + z = C = \text{const}. \quad (32.13)$$

Уравнение (32.13) выражает гидростатический закон распределения давления. Слагаемое $\frac{p}{\gamma} = h_{np}$ называется приведенной высотой давления; она имеет размерность длины и равна высоте такого столба жидкости, который при давлении на ее свободной поверхности, равном нулю, создает в основании давление p .

Сумма слагаемых $\frac{p}{\gamma} + z = h_{np} + z = H_S$ называется гидростатическим напором. Гидростатический напор в данной точке равен значению удельной потенциальной энергии в этой точке (e_n)

$$\frac{p}{\gamma} + z = h_{np} + z = H_S = e_n = C = \text{const}. \quad (32.13a)$$

Постоянную интегрирования в (32.13) можно определить из граничных условий. Для этого рассмотрим точку на поверхности жидкости, где $z = 0$ и $p = p_0$.

Из уравнения (32.13) получаем, что $C = p_0$. Окончательно

$$p = p_0 - \gamma z. \quad (32.14)$$

Обозначим через $h = -z$ углубление точки под свободной поверхностью. Тогда

$$p = p_0 + \gamma h. \quad (32.15)$$

По формуле (32.15) определяется гидростатическое давление в точке на глубине h под поверхностью жидкости.

Из формулы (32.15) следует, что гидростатическое давление в данной точке покоящейся жидкости складывается из внешнего давления на поверхности p_0 и избыточного давления, равного γh .

В большинстве практических случаев внешним давлением на поверхности является атмосферное ($p_0 = p_a$) и тогда поверхность называется свободной.

Давление p_0 на свободной поверхности называют начальным гидростатическим давлением.

Давление $p' = \gamma h$, равное весу столба жидкости высотой h и площадью сечения (основания), равной единице, называется избыточным гидростатическим давлением.

Тогда полное (или абсолютное) гидростатическое давление p в точке складывается из начального и избыточного гидростатических давлений:

$$p = p_0 + p'. \quad (32.16)$$

Избыточное давление называют манометрическим, понимая под ним разность между полным давлением (p) и атмосферным (p_a):

$$p_m = p - p_a. \quad (32.17)$$

Манометрическое давление измеряется приборами, называемыми манометрами.

Если полное давление меньше атмосферного, то вводится понятие вакуума. Вакуумом $p_{\text{вак}}$ называется разность

$$\left. \begin{array}{l} p_{\text{вак}} = p_a - p, \\ 0 < p_{\text{вак}} < 1_{\text{ат.}} \end{array} \right\} \quad (32.18)$$

Наличие вакуума показывает, что абсолютное гидростатическое давление меньше 1 ат, или 98066 Н/м². Теоретически предельный вакуум (высота) может достигать 10,33 м вод. ст., однако практически это пока не осуществлено. Приборы, измеряющие давление меньше атмосферного, называются мановакуумметрами.

Из основного уравнения гидростатики (32.15) видно, что если давление p_0 на граничной поверхности изменить на какую-либо величину, то на такую же величину изменится давление во всех точках объема, занимаемого жидкостью (закон Паскаля). Это свойство давлений в покоящейся жидкости широко используется во всех гидростатических, или, как их обычно называют, гидравлических машинах, гидропередачах, пневматических устройствах и т. п.

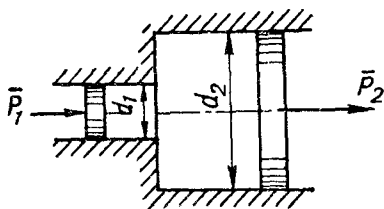


Рис. 32.3.

Пример. Гидравлическая передача торпедного аппарата (рис. 32.3) состоит из двух сообщающихся сосудов и поршней диаметрами $d_1 = 1$ см. $d_2 = 10$ см.

Для того чтобы открыть переднюю крышку торпедного аппарата, необходимо усилие $P = 100$ кгс. Определить величину силы, которую нужно приложить к поршню d_1 .

Решение. Устанавливаем, что давление на оба поршня одинаково (рис. 32.3), т. е.

$$p_1 = p_2.$$

$$\text{где } p_1 = \frac{P_1}{S_1}; p_2 = \frac{P_2}{S_2} \text{ или } \frac{P_1}{S_1} = \frac{P_2}{S_2},$$

$$\text{откуда } P_1 = P_2 \frac{S_1}{S_2} = P_2 \frac{d_1^2}{d_2^2} = 100 \frac{1^2}{10^2} = 1 \text{ кгс.}$$

Гидравлические передачи находят широкое применение в военно-морской технике.

§ 171. СИЛА ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ. СУММАРНОЕ ГИДРОСТАТИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ НА ПЛОСКИЕ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрим давление жидкости на плоскую поверхность площадью S , составляющую с горизонтом угол α (рис. 32.4) и расположенную в плоскости xOz , перпендикулярной плоскости рисунка.

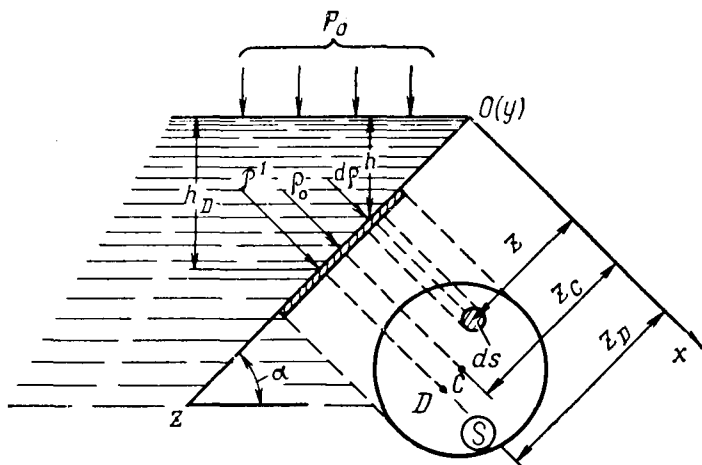


Рис. 32.4.

Выделим бесконечно малую площадку dS , расположенную на некоторой глубине h под свободной поверхностью жидкости. Величина элементарной силы, действующей на dS , будет равна

$$dP = p dS = (p_0 + \gamma h) dS = (p_0 + \gamma z \sin \alpha) dS.$$

Величина силы (суммарное гидростатическое давление), действующей на всю площадь S , будет равна

$$P = \int_S p dS = \int_S (p_0 + \gamma h) dS = \int_S (p_0 + \gamma z \sin \alpha) dS$$

или

$$P = p_0 S + \gamma \sin \alpha \int_S z dS.$$

Обозначим $\int_S z dS = z_c S$ — статический момент площади поверхности относительно оси x . Тогда

$$P = p_0 S + \gamma S z_c \sin \alpha = (p_0 + \gamma h_c) S = p_c S, \quad (32.19)$$

где p_c — гидростатическое давление в центре тяжести плоской поверхности;
 $z_c \sin \alpha = h_c$ — расстояние от свободной поверхности до центра тяжести плоской поверхности.

Таким образом, величина силы давления жидкости на плоскую поверхность (суммарное гидростатическое давление) равна произведению площади этой поверхности на гидростатическое давление в ее центре тяжести.

Обозначим слагаемые, входящие в равенство (32.19):

$$p_0 S = P_0; \quad \gamma S z_c \sin \alpha = \gamma S h_c = P', \quad (32.20)$$

которые называются: P_0 — сила начального, а P' — сила избыточного гидростатических давлений. Тогда полная сила гидростатического давления будет равна

$$P = P_0 + P'.$$

Центр давления. Точка приложения равнодействующей сил гидростатического давления называется центром давления. Точки приложения P_0 , P' и P называют центрами соответственно начальной, избыточной и полной сил гидростатических давлений. Обычно сначала определяют точки приложения P_0 и P' , а затем по правилу сложения параллельных сил и точку приложения P .

Начальная сила давления P_0 , представляющая собой равнодействующую равномерно распределенной по площади нагрузки интенсивностью p_0 , всегда будет приложена в центре тяжести поверхности (рис. 32.5). Для определения положения центра избыточной силы гидростатического давления воспользуемся теоремой Вариньона, согласно которой момент равнодействующей системы сил относительно произвольного

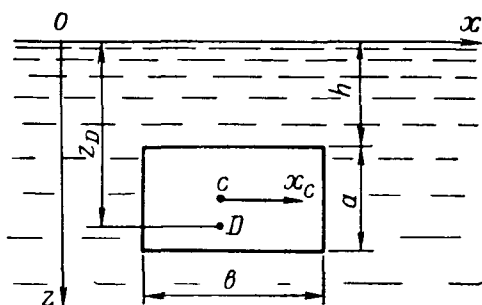


Рис. 32.5.

полюса равен сумме моментов слагаемых сил относительно того же полюса. Тогда для рассматриваемого случая

$$P'z_D = \int_S dP' \cdot z = \int_S z\gamma \sin \alpha dS \cdot z = \gamma \sin \alpha \int_S z^2 dS,$$

где $\int_S z^2 dS = I_x$ — момент инерции площади поверхности относительно оси x .

Из полученного равенства следует, учитывая (32.20):

$$z_D = \frac{\gamma \sin \alpha I_x}{P'} = \frac{I_x}{z_c S}.$$

В соответствии с теоремой Гюйгенса $I_x = I_{x_c} + z_c^2 S$.

Тогда

$$z_D = \frac{I_{x_c} + z_c^2 S}{z_c S} = \frac{I_{x_c}}{z_c S} + z_c$$

или

$$z_D = z_c + \frac{i_{x_c}^2}{z_c}, \quad (32.21)$$

где I_{x_c} — момент инерции площади поверхности относительно центральной оси;

$i_{x_c} = \sqrt{\frac{I_{x_c}}{S}}$ — радиус инерции.

Таким образом, центр избыточного гидростатического давления всегда расположен ниже (глубже) центра тяжести фигуры ($z_D > z_c$) на величину $\frac{I_{x_c}}{z_c S} = \frac{i_{x_c}^2}{z_c}$, которая называется эксцентриситетом давления.

Аналогично можно показать, что другая координата x_D центра избыточного давления, в случае если фигура не имеет оси симметрии, определяется по формуле

$$x_D = \frac{I_{xz}}{z_c S}$$

или

$$x_D = x_c + \frac{I_{x_c z_c}}{z_c S}, \quad (32.22)$$

где I_{xz} — центробежный момент инерции той же площади относительно указанных координатных осей.

Пример. Определить координату центра давления симметричного тела прямоугольного сечения ($b \times a$), находящегося на глубине h под свободной поверхностью (рис. 32.5). Учесть только избыточное давление.

Решение. Проводим оси координат с началом на свободной поверхности; ось x направляем вправо, ось z вниз. Тогда $z_c = h + \frac{a}{2}$. Определяем квадрат радиуса инерции сечения относительно центральной оси, параллельной оси x :

$$i_{x_c}^2 = \frac{I_{x_c}}{S} = \frac{\frac{ba^3}{12}}{ba} = \frac{a^2}{12}.$$

Определяем координату центра давления по формуле (32.21)

$$z_D = z_c + \frac{i_{x_c}^2}{z_c} = h + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{12\left(h + \frac{a}{2}\right)} = h + \frac{a(2a + 3h)}{3(a + 2h)}. \quad (32.23)$$

Сила давления жидкости на цилиндрические поверхности. Элементарная сила гидростатического давления жидкости dP , приходящаяся на элементарную площадку dS , будет направлена по нормали к ней, но не будет параллельна другим нормальям, как это имело место в случае плоской поверхности. Поэтому для определения величины силы давления жидкости на поверхность произвольной формы следует определить проекции всех элементарных сил на соответствующие оси координат:

$$P_x = \sum_{i=1}^n \Delta P_{ix}; \quad P_y = \sum_{i=1}^n \Delta P_{iy}; \quad P_z = \sum_{i=1}^n \Delta P_{iz}$$

и затем определить величину равнодействующей по формуле

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}. \quad (32.24)$$

Частным случаем криволинейных поверхностей являются цилиндрические. Выделим на цилиндрической поверхности AB (рис. 32.6) элементарную площадку dS . Элементарная сила dP гидростатического давления, приходящаяся на выделенную площадку dS , по величине равна

$$dP = (p_0 + \gamma h) dS \quad (32.25)$$

и направлена по нормали к ней. Обозначим угол между нормалью к площадке dS и вертикалью к свободной поверхности через α . Тогда проекции элементарной силы на вертикальную и горизонтальную оси будут:

$$\begin{aligned} dP_B &= dP \cos \alpha = (p_0 + \gamma h) dS \cdot \cos \alpha, \\ dP_r &= dP \cdot \sin \alpha = (p_0 + \gamma h) dS \cdot \sin \alpha, \end{aligned}$$

где $dS \cdot \cos \alpha = dS_B$ и $dS \cdot \sin \alpha = dS_B$ — проекции dS соответственно на горизонтальную и вертикальную плоскости.

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} dP_r &= p_0 dS_B + \gamma h dS_B; \\ dP_B &= p_0 dS_r + \gamma h dS_r. \end{aligned} \right\} \quad (32.26)$$

Равнодействующая горизонтальных составляющих элементарных сил гидростатического давления будет равна (рис. 32.7)

$$P_r = \int_{S_B} p_0 dS_B + \int_{S_B} \gamma h dS_B = p_0 dS_B + \gamma \int h dS_B$$

или

$$P_r = p_0 S_B + \gamma h_c S_B = (p_0 + \gamma h_c) S_B. \quad (32.27)$$

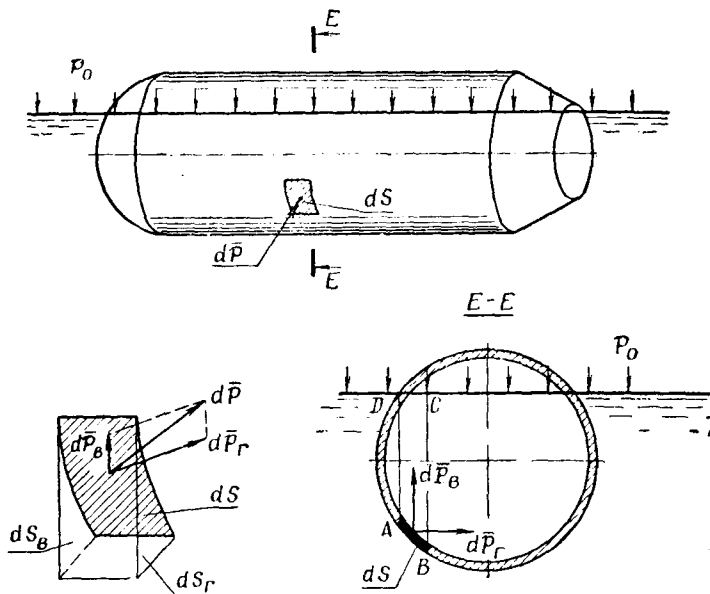


Рис. 32.6.

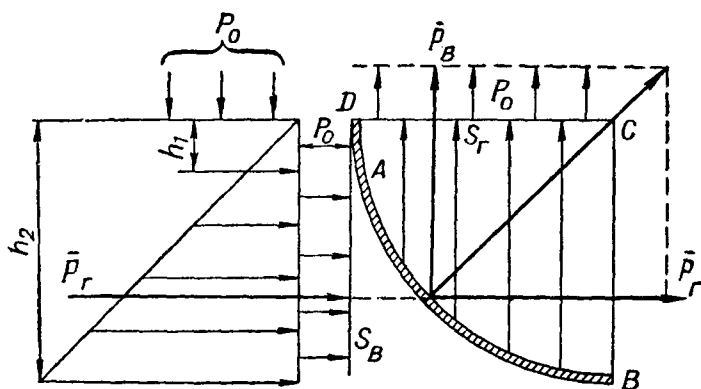


Рис. 32.7.

Таким образом, величина горизонтальной составляющей силы гидростатического давления на цилиндрическую поверхность равна произведению площади вертикальной проекции этой поверхно-

сти на гидростатическое давление в центре тяжести площади вертикальной проекции цилиндрической поверхности.

Равнодействующая вертикальных составляющих элементарных сил гидростатического давления будет равна

$$P_B = \int_{S_r} p_0 dS_r + \int_{S_r} \gamma h dS_r = p_0 S_r + \gamma \int_{S_r} h dS_r$$

или

$$P_B = p_0 S_r + \gamma V_{(ABCD)}. \quad (32.28)$$

Величина вертикальной составляющей силы гидростатического давления на цилиндрическую поверхность равна сумме двух сил — силы внешнего давления на горизонтальную проекцию цилиндрической поверхности $p_0 S_r$ и силы веса жидкости γV в объеме $ABCD$, ограниченном рассматриваемой поверхностью, свободной поверхностью жидкости и вертикальными образующими, проведенными через контур данной цилиндрической поверхности.

Величина силы полного гидростатического давления P , под действием которой будет находиться цилиндрическая поверхность AB , определяется по формуле

$$P = \sqrt{P_r^2 + P_B^2}. \quad (32.29)$$

Плавучесть. Рассмотрим призматическое тело, полностью погруженное в жидкость и находящееся в равновесии (рис. 32.8). Обозначим равнодействующие силы, приложенные к соответствующим плоскостям этого тела, через $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4, \bar{P}_5, \bar{P}_6$. Тело находится в равновесии, поэтому $\bar{P}_3 = -\bar{P}_4; \bar{P}_5 = -\bar{P}_6$, т. е. силы взаимно уравновешены. Величины сил \bar{P}_1 и \bar{P}_2 соответственно равны:

$$P_1 = \gamma h_1 S;$$

$$P_2 = \gamma h_2 S.$$

Обозначим вес тела буквой G и запишем условие его равновесия в проекциях на ось z

$$\sum Z_i = -P_1 + P_2 - G = 0.$$

Разность $P_2 - P_1$ называется Архимедовой или поддерживающей силой и определяется по равенству

$$P = P_2 - P_1 = \gamma S (h_2 - h_1) = \gamma S h = \gamma V = D, \quad (32.30)$$

где V — объем тела (или части его), погруженного в жидкость; D — весовое водоизмещение тела.

Формула (32.30) справедлива для тела любой формы, полностью или частично погруженного в жидкость.

Таким образом, равнодействующая сила давления жидкости на смоченную поверхность неподвижного тела, полностью или частично погруженного в жидкость, равна весу жидкости, вытесненной телом, приложена в центре тяжести объема погруженной части тела и всегда направлена вертикально вверх (закон Архимеда).

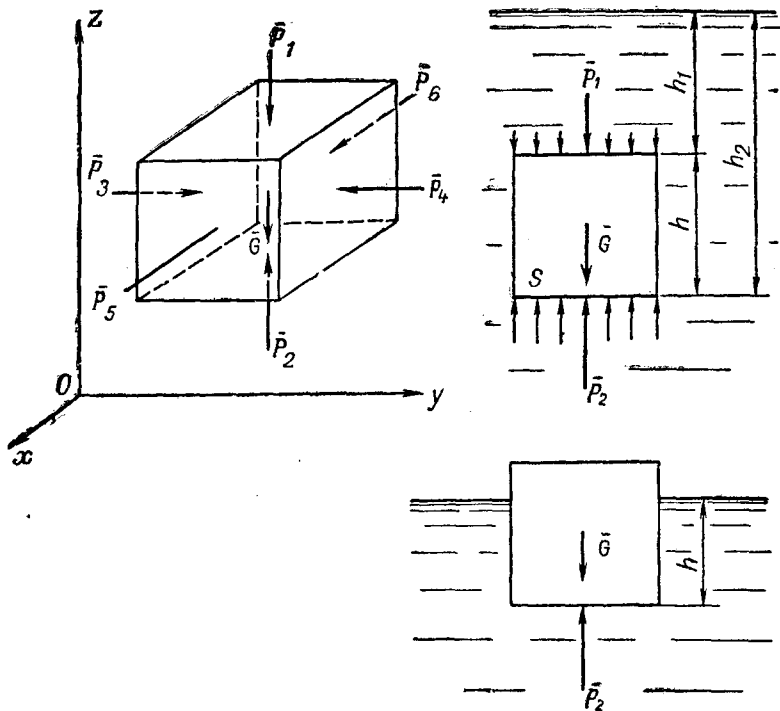


Рис. 32.8.

Плаву́честью тела P называется разность между Архимедовой силой и весом тела:

$$P = D - G. \quad (32.31)$$

Рассмотрим следующие случаи:

1. $D = G$ — тело находится в равновесии, оно плавает в жидкости;
2. $D > G$ — тело всплывает на поверхность воды (имеет положительную плавучесть, так как $D - G > 0$);
3. $D < G$ — тело тонет (имеет отрицательную плавучесть, так как $D - G < 0$).

Пример. Определить величину горизонтальной составляющей силы гидростатического давления воды на головную часть торпеды (ракеты) при открытой передней крышке торпедного аппарата и плавучесть торпеды (ракеты) при сле-

дующих данных: глубина выстрела торпеды (ракеты) $H_1=100$ м; $d=53$ см, ее объем и вес соответственно $V=1,4$ м³; $G=1,3 \cdot 10^4$ Н, удельный вес воды $\gamma=1 \cdot 10^4$ Н/м³. Внешнее давление на поверхности принять равным $p_0=9,8 \cdot 10^4$ Н/м² (≈ 1 кгс/см²).

Решение. Определяем величину горизонтальной составляющей силы гидростатического давления воды по формуле (32.27)

$$P_r = (p_0 + \gamma h_c) S_B,$$

где

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,53^2}{4} = 0,22 \text{ м}^2.$$

Подставляя числовые значения, получаем

$$P_r = (9,8 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^4 \cdot 100) \cdot 0,22 = 24,2 \cdot 10^4 \text{ Н.}$$

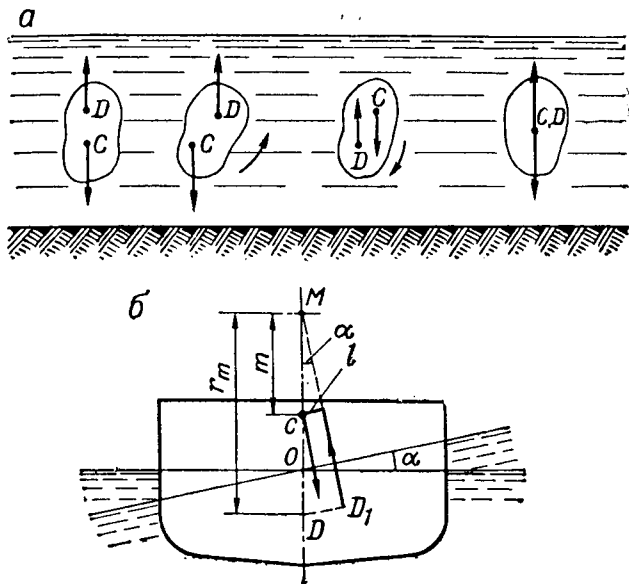


Рис. 32.9.

Определяем плавучесть торпеды (ракеты) по формуле

$$P = \gamma \cdot V - G = 1 \cdot 10^4 \cdot 1,4 - 1,3 \cdot 10^4 = 1 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

Торпеда (ракета) имеет положительную плавучесть, равную $1 \cdot 10^3$ Н (≈ 100 кгс).

Понятие об остойчивости. Для равновесия плавающего тела необходимо, чтобы вес тела был равен поддерживающей силе, т. е. сумма их проекций на вертикальную ось была равна нулю и чтобы главный момент сил, действующих на плавающее тело, был также равен нулю. Второе условие будет соблюдено, когда центр тяжести тела и центр давления (центр тяжести вытесненного объема) лежат на одной вертикали. Пусть какая-либо причина выведет плавающее тело из состояния равновесия. Остойчивостью называется свойство плавающих тел при отклонении в заданных пределах от положения равновесия возвращаться после прекращения действия

сил, вызвавших это отклонение, в начальное положение равновесия или колебаться около него. Для тел, полностью погруженных в жидкость, вопрос об остойчивости решается проще, чем для тел, плавающих на поверхности, так как в последнем случае у тела сложной формы (корабль) при отклонении от положения равновесия изменяется и положение центра давления.

Рассмотрим простейший случай статической (без учета сил инерции) остойчивости тела, полностью погруженного в жидкость (рис. 32.9, *a*). Если точка D расположена выше точки C , тело остойчиво, так как при отклонении тела (крене) появляется пара сил, которая стремится восстановить равновесие. Если точка D расположена ниже точки C , тело нестойчиво, так как пара сил является опрокидывающей и увеличивает крен. При совпадении точек C и D тело обладает нулевой остойчивостью (состояние безразличного равновесия). Случай остойчивости тела, плавающего на поверхности, рассмотрен в главе раздела «Динамика». Если точка D будет выше точки C , остойчивость тела и здесь будет обеспечена.

Рассмотрим случай, когда точка D ниже точки C и тело имеет малый крен ($\alpha \leq 10^\circ \div 15^\circ$). Точку пересечения поддерживающей силы с осью тела обозначим M , которая называется метацентром; соответственно MD называется метацентрическим радиусом и обозначается r_m , а $CM = m$ — метацентрической высотой. Для того чтобы тело было остойчивым, необходимо, чтобы

$$m = DM - CD > 0,$$

т. е. чтобы точка D_1 после крена находилась справа от линии действия сил тяжести G , в противном случае тело нестойчиво, так как метацентр лежит ниже центра тяжести C .

Отметим, что у корабля кроме рассмотренного случая поперечной остойчивости рассматривают и продольную. При продольных наклонениях корабль будет всегда остойчивым, так как продольный метацентр всегда лежит выше центра тяжести.

КИНЕМАТИКА ЖИДКОСТИ

§ 172. МЕТОДЫ ИЗУЧЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Движение жидкости вполне определено тогда, когда положение каждой частицы жидкости в пространстве задано в функции времени. При исследовании движения жидкости можно пользоваться двумя методами: Лагранжа и Эйлера.

Метод Лагранжа или метод «фиксированных частиц» состоит в том, что исследование движения жидкости сводится к наблюдению движения фиксированных частиц жидкости, т. е. к определению их траектории. Пусть при $t=t_0$ координаты рассматриваемой частицы жидкости будут a, b, c . Тогда в любой момент времени уравнения движения частицы жидкости в проекциях на оси прямоугольной неподвижной системы координат будут иметь вид:

$$\begin{aligned}x &= f_1(a, b, c, t); \\y &= f_2(a, b, c, t); \\z &= f_3(a, b, c, t).\end{aligned}\tag{33.1}$$

Скорость и ускорение частицы определяются по формулам кинематики точки. Так, $v_x = \frac{dx}{dt}$; $\omega_x = \frac{dv_x}{dt}$ и т. д.

Методом Лагранжа при решении задач пользуются редко, ибо установить функциональную зависимость между положением частицы в начальный момент и в момент времени t весьма сложно. Кроме того, если жидкость однородна (все частицы одинаковы), то с практической точки зрения более важно знать кинематические характеристики в каждой точке пространства. Вот почему большее распространение получил другой метод — метод Эйлера. Движение всей жидкости по методу Эйлера изучается путем исследования движения в отдельных точках неподвижного пространства, занятого движущейся жидкостью. По этому методу изучаются не параметры движения фиксированных частиц, а кинематические характеристики движения в фиксированных точках пространства.

Пусть для изучения движения жидкости выделены наблюдатели. По методу Лагранжа каждый наблюдатель, двигаясь с опре-

деленной частицей жидкости, следит за ее движением. Собирая одновременно данные от всех наблюдателей, получаем представление о движении всей жидкости.

По методу Эйлера наблюдатели размещены в определенных точках пространства, занятого движущейся жидкостью. Они следят и информируют о скорости, ускорении и других параметрах (давление, плотность и т. д.) жидкости, протекающей через то место пространства, где находится наблюдатель (рис. 33.1).

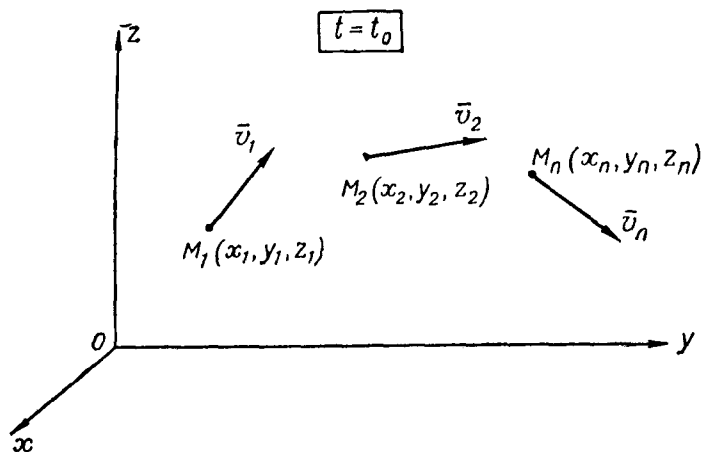


Рис. 33.1.

Проекции скорости частицы жидкости, имеющей координаты $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, на оси неподвижной прямоугольной системы координат будут, по методу Эйлера, функциями координат и времени:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \varphi_1(x, y, z, t); \\ v_y &= \varphi_2(x, y, z, t); \\ v_z &= \varphi_3(x, y, z, t). \end{aligned} \right\} \quad (33.2)$$

где x , y , z , t — независимые переменные, а v_x , v_y и v_z будем считать непрерывными дифференцируемыми функциями координат и времени.

Величина и направление скорости определяются из равенств:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}; \quad (33.3)$$

$$\cos(\hat{i}, \hat{v}) = \frac{v_x}{v}; \quad \cos(\hat{j}, \hat{v}) = \frac{v_y}{v}; \quad \cos(\hat{k}, \hat{v}) = \frac{v_z}{v}. \quad (33.4)$$

Ускорение движущейся частицы жидкости. Проекция ускорения на оси неподвижной системы прямоугольных координат определяются из (33.2). Так, например,

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt},$$

где

$$\frac{dx}{dt} = v_x; \quad \frac{dy}{dt} = v_y; \quad \frac{dz}{dt} = v_z.$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} w_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}; \\ w_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}; \\ w_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (33.5)$$

От уравнений Эйлера можно перейти к уравнениям Лагранжа путем интегрирования равенств:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt},$$

откуда и получим равенства (33.1), в которых a , b , c будут начальными координатами, определяемыми из начальных условий. Отметим, что параметры потока $\rho(x, y, z, t)$, $\rho(x, y, z, t)$, $T(x, y, z, t)$ заданы в такой же форме, как и проекции скорости, т. е. в форме Эйлера, а поэтому их производные по времени имеют такой же вид, как и производные от проекций скорости. Так, например,

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} v_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} v_z. \quad (33.6)$$

Установившееся движение жидкости. Скорость частицы жидкости в общем случае движения зависит от четырех переменных: от ее координат x , y , z и от времени t . В частном случае скорость движения жидкости может быть функцией только координат и явно не зависеть от времени — случай установившегося движения. Установившимся называется движение жидкости, при котором ее скорость в любой точке занятого жидкостью пространства не изменяется во времени. Следовательно, при установившемся движении:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$$

и

$$v_x = \varphi_1(x, y, z); \quad v_y = \varphi_2(x, y, z); \quad v_z = \varphi_3(x, y, z). \quad (33.7)$$

Скорость при установившемся движении изменяется лишь при переходе от одной точки пространства к другой.

§ 173. ЭЛЕМЕНТЫ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ

Геометрический образ движущейся жидкости в виде совокупности векторов, проведенных в каждой точке пространства и изображающих скорость жидкости в этих точках, позволяет составить

наглядное представление о характере ее движения. Однако представление о движении жидкости как о векторном поле все же является довольно сложным для восприятия, поэтому мы введем понятие о линии тока.

Пусть в данный момент времени $t=t_0$ скорость частицы жидкости, находящейся в точке M_1 пространства, будет \bar{v}_1 , в точке M_2 , расположенной на векторе v_1 вблизи M_1 , скорость будет соответственно \bar{v}_2 , точке M_3 — \bar{v}_3 (рис. 33.2) и т. д. Если отрезки M_1M_2 , M_2M_3 , M_3M_4 , ..., $M_{n-1}M_n$ считать бесконечно малыми, то ломаная $M_1M_2...M_n$

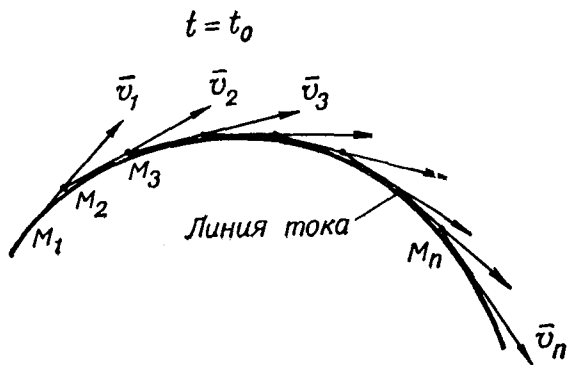


Рис. 33.2.

в пределе перейдет в кривую, которая является огибающей по отношению к рассматриваемой совокупности векторов. Эта кривая называется линией тока.

Таким образом, линия тока представляет собой линию, в каждой точке которой в данный момент времени скорость жидкости совпадает с касательной к этой линии.

Линия тока обладает тем замечательным свойством, что каждая частица жидкости, находящаяся на ней в данный момент времени, имеет скорость, совпадающую по направлению с касательной к этой линии.

В соответствии с этим свойством

$$\bar{v} \times d\bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0,$$

т. е.

$$(v_y dz - v_z dy) \cdot \bar{i} + (v_z dx - v_x dz) \cdot \bar{j} + (v_x dy - v_y dx) \cdot \bar{k} = 0.$$

Из последнего равенства следует, что

$$v_y dz - v_z dy = 0; \quad v_z dx - v_x dz = 0; \quad v_x dy - v_y dx = 0$$

или

$$\frac{dz}{v_z} = \frac{dy}{v_y}; \quad \frac{dz}{v_z} = \frac{dx}{v_x}; \quad \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}.$$

Вместо полученной системы уравнений можно записать

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}. \quad (33.8)$$

Равенство (33.8) является уравнением линии тока в дифференциальной форме.

Условимся траекторией частицы жидкости называть совокупность точек, характеризующих положение рассматриваемой частицы в течение заданного промежутка времени, т. е. в различные моменты времени. Учитывая, что $v_x = \frac{dx}{dt}$; $v_y = \frac{dy}{dt}$; $v_z = \frac{dz}{dt}$, имеем $dt = \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$. Следовательно, уравнение траектории в дифференциальной форме имеет вид

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = dt. \quad (33.9)$$

Уравнения (33.8) и (33.9) существенно различны. Уравнение (33.8) характеризует распределение скоростей в потоке жидкости в данный момент времени, а уравнение (33.9) — перемещение частиц за определенный промежуток времени. Только при установившемся движении жидкости линия тока и траектория частиц жидкости, на ней расположенных, совпадают.

Отметим, что линии тока не могут между собой пересекаться. Действительно, допустим, что две линии тока пересекаются в какой-либо точке. На основании свойства линии тока скорость частицы жидкости, находящейся в точке пересечения, должна быть одновременно направлена по касательным к этим линиям. Но геометрическая сумма двух скоростей уже не будет касательной ни к той, ни к другой линии, а поэтому они не являются линиями тока.

Понятие о линиях тока является исходным для представления о «струйчатой» модели движения жидкости, положенной в основу гидромеханики с самого начала ее возникновения и не утратившей своего значения и до сих пор.

Трубка тока. Выделим мысленно внутри потока жидкости произвольный замкнутый контур abc . Через каждую точку этого контура можно провести линию тока, соответствующую данному моменту времени (рис. 33.3). Поверхность, образуемая линиями тока, проходящими через точки этого контура, называется трубкой

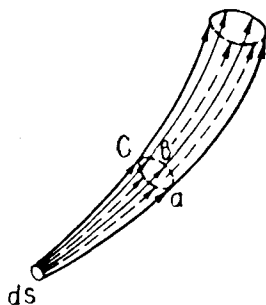


Рис. 33.3.

тока. Скорость на поверхности трубки тока будет всегда направлена по касательной к поверхности. Следовательно, жидкость не может втекать в трубку тока или вытекать из нее через ее боковую поверхность, что является характерной особенностью трубки тока.

Таким образом, трубка тока представляет как бы канал, по которому в продолжение бесконечно малого промежутка времени будет течь наполняющая его жидкость. Жидкость, наполняющая трубку тока, называется струйкой. Таким образом, струйкой называется часть движущейся жидкости, ограниченная поверхностью, образованной линиями тока, проведенными в данный момент времени через все точки бесконечно малого замкнутого контура, находящегося в области, занятой жидкостью.

§ 174. РАСХОД ЖИДКОСТИ И УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ

Проведем в элементарной струйке поперечное сечение, перпендикулярное скорости, площадью (S), которое называется живым сечением. Расходом жидкости называется ее количество, протекающее в единицу времени через живое сечение. В зависимости от того, в каких единицах измеряется жидкость, протекающая через живое сечение, применяются термины: «объемный расход» ($\text{м}^3/\text{с}$), «массовый расход» ($\text{кг}/\text{с}$), «весовой расход» ($\text{кгс}/\text{с}$). Обозначим объемный расход буквой Q .

Тогда

$$dQ = v dS.$$

Элементарная струйка жидкости является основным элементом, из которого складывается понятие о потоке жидкости. Под потоком жидкости будем понимать движение массы жидкости, ограниченное твердыми поверхностями либо в общем случае поверхностями соприкосновения жидких или газообразных сред.

Поток жидкости будем представлять как совокупность элементарных струек, движущихся с различными скоростями. В простейшем случае поток можно представить состоящим лишь из одной струйки. Для потока можем записать, что

$$Q = \int_{(S)} dQ = \int_{(S)} v dS, \quad (33.10)$$

где (S) — площадь живого сечения струйки;

Q — объемный расход жидкости.

Разделив расход Q на площадь живого сечения (S), получим

$$\frac{Q}{(S)} = v_{\text{ср}}, \quad (33.11)$$

т. е. величину, которая имеет размерность скорости и называется средней скоростью потока в данном сечении.

Уравнение неразрывности (сплошности). Уравнение неразрывности выражает закон сохранения массы, впервые открытый М. В. Ломоносовым. При рассмотрении движения жидкости будем считать, что жидкость сплошь (без пустот) заполняет занимаемое ею пространство.

Уравнение неразрывности для струйки жидкости. Выделим в установившемся потоке жидкости элементарную струйку (рис. 33.4). В каждой точке сечения такой струйки ввиду его малости скорость можно считать одинаковой как по величине, так и по направлению. Через боковую поверхность струйки жидкость не проходит. Следовательно, масса жидкости, вытекающая через сечение $II-II$, должна быть равна массе жидкости, втекающей через сечение $I-I$, т. е.

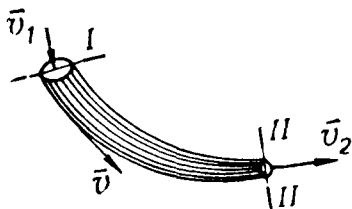


Рис. 33.4.

$$\rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2. \quad (33.12)$$

Учитывая, что $Q_1 = v_1 S_1$ и $Q_2 = v_2 S_2$, равенство (33.12) можно записать в виде

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2, \quad (33.13)$$

где $\rho v S$ является массовым секундным расходом жидкости и обозначается m_c .

Сечения $I-I$ и $II-II$ были выбраны произвольно. Следовательно,

$$\rho v S = \text{const} \quad (33.14)$$

по всей длине струйки. Уравнение (33.14) называется уравнением неразрывности или постоянства расхода.

Если жидкость несжимаемая, то плотность ρ одинакова во всех точках и уравнение (33.14) можно переписать в виде

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 = \text{const} \quad (33.15)$$

или

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1}. \quad (33.16)$$

Таким образом, в струйке несжимаемой жидкости скорости обратно пропорциональны площадям поперечных сечений. Уравнение (33.14) называется уравнением постоянства расхода или уравнением неразрывности в интегральной (гидравлической) форме.

Уравнение неразрывности в дифференциальной форме. Выделим мысленно в потоке жидкости элементарный объем в форме параллелепипеда с гранями dx , dy , dz , параллельными соответствующим осям неподвижной системы координат $Oxyz$ (рис. 33.5). Составим применительно к этому объему выражение закона сохра-

нения массы. Для этого определим массу жидкости, втекающей внутрь параллелепипеда и вытекающей из него за элементарный промежуток времени dt .

Пусть в центре $A(x, y, z)$ параллелепипеда скорость и плотность частицы жидкости соответственно равны \bar{v} и ρ . Проекция скорости на оси неподвижной системы координат $Oxyz$ обозначим v_x, v_y, v_z .

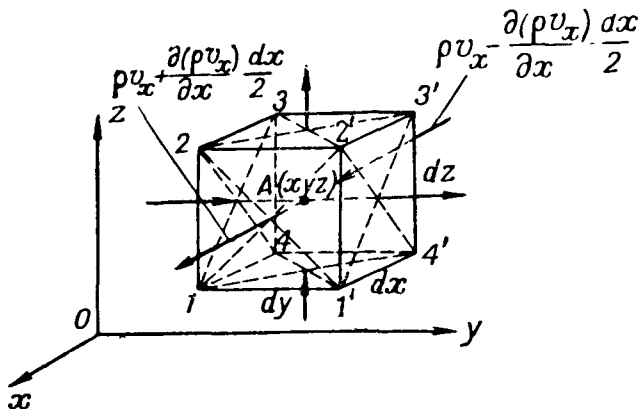


Рис. 33.5.

Элементарная масса жидкости, втекающей через грань $433'4'$ за время dt , равна

$$dm_x = \left[\rho v_x - \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right] dy dz dt. \quad (33.17)$$

Соответственно за время dt через грань $122'1'$ вытекает

$$dm'_x = \left[\rho v_x + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right] dy dz dt. \quad (33.18)$$

Пусть $dm'_x > dm_x$. Тогда изменение (уменьшение) массы жидкости в рассматриваемом элементарном объеме за счет истечения в направлении оси Ox за время dt будет

$$dm'_x - dm_x = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx dy dz dt.$$

Аналогичные выражения могут быть написаны и для изменения массы за счет истечения жидкости через другие грани параллелепипеда:

$$dm'_y - dm_y = \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} dx dy dz dt;$$

$$dm'_z - dm_z = \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} dx dy dz dt.$$

Полное изменение массы в объеме параллелепипеда за время dt равно

$$\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] dx dy dz dt. \quad (33.19)$$

Изменение массы жидкости в фиксированном элементарном объеме $dV = dx dy dz$ может происходить только за счет изменения с течением времени плотности и соответственно массы жидкости. Это изменение в рассматриваемом случае уменьшения массы будет равно

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\rho dx dy dz) dt = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt. \quad (33.20)$$

Споставляя между собой выражения (33.19) и (33.20), после сокращения на $dx dy dz dt$ получим

$$\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (33.21)$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} v_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} v_z + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0.$$

В соответствии с (33.6)

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} v_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} v_z.$$

Тогда равенство (33.21) можно переписать в виде

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0. \quad (33.22)$$

Полученное уравнение (33.22) является уравнением неразрывности в дифференциальной форме для сжимаемой жидкости. Оно устанавливает связь между скоростью изменения плотности $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)$ и скоростью изменения объема. Для несжимаемой жидкости при $\rho = \text{const}$ $\frac{d\rho}{dt} = 0$. Тогда уравнение неразрывности в дифференциальной форме будет

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (33.22a)$$

или

$$\text{div } \mathbf{v} = 0,$$

где $\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$ — дивергенция скорости.

Физический смысл уравнения (33.22a) заключается в том, что объемы жидкости, одновременно вытекающей в данный фиксированный объем пространства и вытекающей из него, равны.

В отличие от абсолютно твердой частица жидкости с течением времени может изменить не только положение, но и свою форму. Рассмотрим грань $144'1'$ с ребрами dx и dy элементарного параллелепипеда $dx dy dz$ (рис. 33.6). Пусть в точке 4 (x, y) проекции скорости будут v_x и v_y .

Проекции скорости в других угловых точках будут иметь разные значения вследствие того, что $v = f(x, y)$. Рассматриваемая грань будет не только перемещаться в пространстве, но и изменять свою первоначальную форму. Элементарное смещение рассматриваемой грани можно свести к следующим составляющим (рис. 33.7):

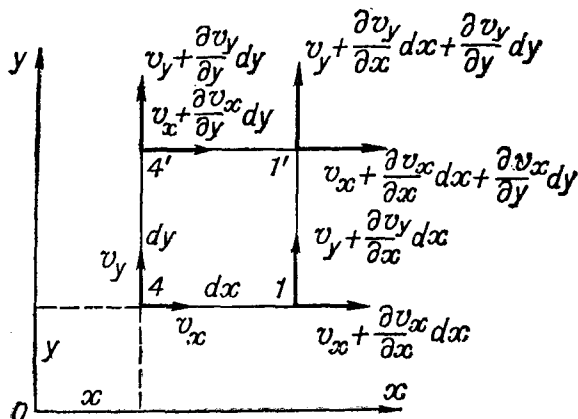


Рис. 33.6.

— поступательное движение грани как твердого тела (рис. 33.7, а);

— вращательное движение грани (рис. 33.7, б);

— линейная и угловая деформации грани (рис. 33.7, в, г).

Таким образом, в случае движения элементарного объема жидкости (который представляет собой деформируемое, а не твердое тело), желая определить скорость какой-либо частицы этого объема, необходимо учитывать дополнительно составляющую скорости, обусловленную деформацией рассматриваемого объема.

В соответствии с этим в основе кинематики жидкости лежит следующая теорема: в любой момент времени движение элементарного объема жидкости можно рассматривать как результат сложения движения полюса, вращения вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс, и деформационного движения.

Проекция вектора мгновенной угловой скорости ω на оси неподвижной прямоугольной системы координат и его величина будут равны:

Введем понятие о вихре. Термин «вихрь» употребляется в

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right); \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right); \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (33.23)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} \quad (33.24)$$

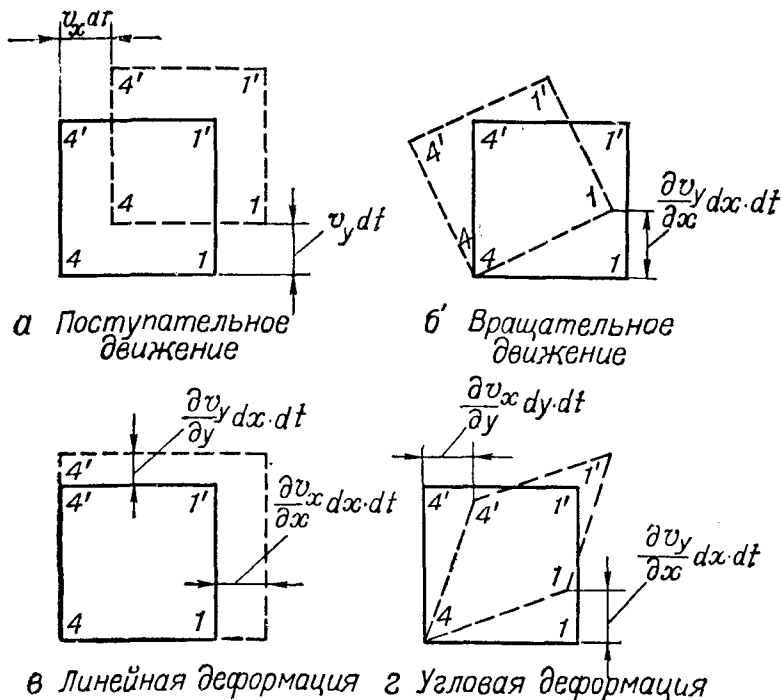


Рис. 33.7.

гидромеханике в двух значениях. Условимся называть вихрь в первом значении расчетным и во втором — физическим.

Расчетным вихрем будем называть вектор $\bar{\omega}$ мгновенной угловой скорости вращения частиц жидкости, определяемый формулами (33.23).

Физическим вихрем будем называть группу частиц жидкости, вращающихся как твердое тело вокруг некоторой мгновенной оси. Мгновенная ось вращения может быть неподвижной или перемещающейся в пространстве. Такие вихри наблюдаются, например, в кормовой части плохо обтекаемого тела. Примером вихря является также смерч.

Движение жидкости, во всех точках которой вектор $\bar{\omega}$ вихря скорости отличен от нуля $\bar{\omega} \neq 0$, называется вихревым движением. При невихревом движении $\bar{\omega} = 0$ и $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$.

Потенциал скорости. Для невихревого движения жидкости справедливы следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = 0; \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = 0; \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = 0; \end{aligned} \right\} \text{или} \left. \begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial y} &= \frac{\partial v_y}{\partial z}; \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} &= \frac{\partial v_z}{\partial x}; \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} &= \frac{\partial v_x}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (33.25)$$

Равенства (33.25) выражают необходимое и достаточное условие того, чтобы v_x , v_y , v_z являлись частными производными по координатам от некоторой функции $\varphi(x, y, z)$, называемой потенциалом скорости:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (33.26)$$

Всякому невихревому движению соответствует свой потенциал скорости. Справедливо и обратное утверждение. Если существует потенциал скорости, то движение жидкости происходит без вращения частиц и невихревое движение обычно называют потенциальным.

При существовании потенциала скорости решение задач значительно упрощается. Вместо отыскания трех функций v_x , v_y , v_z достаточно найти всего одну потенциальную функцию $\varphi(x, y, z)$, а затем проекции скорости вычислить, пользуясь равенствами (33.26).

Функция тока. Для плоскопараллельного движения жидкости, при котором ее частицы движутся параллельно некоторой неподвижной плоскости со скоростями, не зависящими от расстояния частиц до этой плоскости, решение многих задач значительно проще, чем для пространственного движения. Во многих практических случаях с достаточной для практики степенью точности можно приближенно считать действительное движение жидкости плоскопараллельным. При изучении плоскопараллельного движения жидкости большое значение имеет функция тока. Функцией тока называется функция $\psi(x, y, t)$, частные производные от которой равны:

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} = v_y; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x. \quad (33.27)$$

Уравнение линий тока в случае плоскопараллельного движения имеет вид

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \quad \text{или} \quad v_x dy - v_y dx = 0. \quad (33.28)$$

Подставляя в (33.28) величины проекций скоростей через функцию тока ψ , получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0. \quad (33.29)$$

При установившемся движении левая часть этого выражения представляет собой полный дифференциал функции тока

$$d\psi = 0. \quad (33.30)$$

Отсюда следует, что $\psi(x, y) = \text{const}$. Таким образом, функция тока на линии тока сохраняет постоянное значение.

Если функция тока найдена (а она является интегралом уравнения неразрывности), то для получения уравнения линии тока достаточно приравнять ее некоторой постоянной, соответствующей определенной линии тока.

Циркуляция скорости. Для определения понятия циркуляция скорости в пространстве, занятом движущейся жидкостью, возьмем замкнутый контур k длиной l (рис. 33.8). В различных точках контура, расположенных на расстоянии Δl_i одна

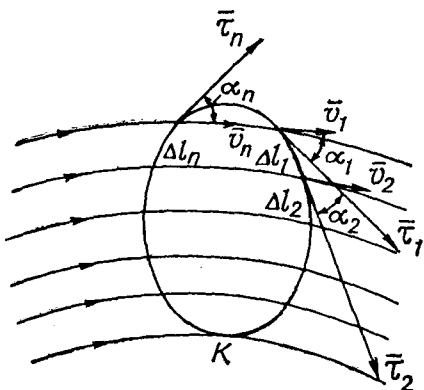


Рис. 33.8.

от другой, проведем векторы скоростей \vec{v}_i частиц жидкости, находящихся в данный момент в этих точках, и касательные $\vec{\tau}_i$ к контуру, направленные в сторону обхода (на рис. 33.8 по ходу часовой стрелки). Составим сумму

$$\sum_{i=1}^{i=n} v_i \cos \alpha_i \Delta l_i, \quad (33.31)$$

где α_i — угол между векторами скорости и соответствующими касательными. Предел этой суммы, равный интегралу по замкнутому контуру k , проведенному внутри движущейся жидкости от проекции вектора скорости на касательную к контуру, умноженной на длину элемента dl линии контура, называется циркуляцией скорости и обозначается через Γ .

$$\Gamma = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta l_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n v_i \cos \alpha_i \Delta l_i = \int_{(k)} v \cos(\vec{v}, \vec{\tau}) dl. \quad (33.32)$$

Знак циркуляции зависит от принятого направления обхода и направления течения. Формула (33.32) может быть записана в другом виде, учитывая, что $d\vec{r} = dl \cdot \vec{\tau}$:

$$\Gamma = \int_{(r)} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{(k)} v_x dx + v_y dy + v_z dz. \quad (33.33)$$

ГИДРОДИНАМИКА НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Жидкость, условно лишенная одного из ее основных свойств — вязкости, называется идеальной или невязкой жидкостью. При движении идеальной жидкости силы трения между слоями при относительном скольжении отсутствуют ($\mu=0$). В невязкой жидкости действует только гидродинамическое давление, обладающее всеми свойствами гидростатического.

Изучение гидродинамики начинается с исследования более простой модели жидкости — изучения динамики невязкой жидкости.

§ 177. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ФОРМЕ Эйлера

Пусть на частицу идеальной жидкости, движущуюся с ускорением $\bar{\omega}$, действуют объемная и поверхностная силы, проекции которых соответственно определяются левой частью равенств (32.9). Тогда уравнения движения частицы единичной массы ($m=1$) в проекциях на оси неподвижной прямоугольной системы координат будут:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{dv_y}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \\ \frac{dv_z}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (34.1)$$

Если ускорение $\bar{\omega}=0$, то система (34.1) приводится к уравнениям равновесия (32.9). Система (34.1) является дифференциальными уравнениями движения жидкости в форме Эйлера.

В случае сжимаемой жидкости $\rho=f(x, y, z, t)$ система является незамкнутой, так как неизвестных пять v_x, v_y, v_z, ρ и p , а уравнений всего три. Недостающими уравнениями являются:

Уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0. \quad (34.2)$$

Уравнение состояния $\rho = f(p, T)$. Так, для адиабатического изменения состояния, как известно из физики, при показателе адиабаты k :

$$p\rho^{-k} = \text{const.} \quad (34.3)$$

Для несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$; $\frac{d\rho}{dt} = 0$ и неизвестных будет четыре, которые определяются из системы уравнений (34.2) и (34.1).

§ 178. УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ, ЭЙЛЕРА И ЛАГРАНЖА

Уравнения Эйлера могут быть проинтегрированы лишь для некоторых частных случаев.

Будем полагать, что движение жидкости установившееся, а действующие объемные силы имеют потенциал. Перепишем систему (34.1) в виде:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{dv_x}{dt} &= 0; \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{dv_y}{dt} &= 0; \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{dv_z}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (34.4)$$

Каждое из уравнений системы (34.4) умножим соответственно на dx , dy , dz — проекции элементарного перемещения частицы вдоль линии тока на оси неподвижной системы координат, затем, складывая почленно, получим

$$\begin{aligned} (X dx + Y dy + Z dz) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) - \\ - \left(\frac{dv_x}{dt} dx + \frac{dv_y}{dt} dy + \frac{dv_z}{dt} dz \right) = 0. \end{aligned} \quad (34.5)$$

В уравнении (34.5) с учетом того, что движение установившееся, а силы имеют потенциал, имеем:

$$X dx + Y dy + Z dz = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = dU; \quad (34.6)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = dp; \quad (34.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} dx + \frac{dv_y}{dt} dy + \frac{dv_z}{dt} dz = v_x dv_x + \\ + v_y dv_y + v_z dv_z = d\left(\frac{v^2}{2}\right), \end{aligned} \quad (34.8)$$

где U — потенциал объемных сил, а $v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z =$
 $= \frac{d}{dt} \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2}$.

Тогда после подстановки из (34.6), (34.7), (34.8) в формулу (34.5) получим

$$-dU + \frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0. \quad (34.9)$$

Для сжимаемой жидкости $p = f(\rho)$. Обозначим $\int \frac{dp}{\rho} = P$. Тогда уравнение (34.9) можно записать в виде

$$d\left(-U + P + \frac{v^2}{2}\right) = 0,$$

откуда получаем так называемый интеграл Бернулли

$$-U + P + \frac{v^2}{2} = \text{const}, \quad (34.10)$$

где для каждой линии тока или струйки постоянная интегрирования своя. Для струйки параметры потока предполагаем усредненными по сечению.

Для несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$ и, следовательно,

$$P = \frac{p}{\rho}. \quad (34.11)$$

Тогда выражение (34.10) примет вид

$$-U + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{const}. \quad (34.12)$$

Принимаем, что на частицу жидкости действует только одна объемная сила — сила тяжести, потенциал которой

$$U = -gz, \quad (34.13)$$

тогда уравнение (34.12) будет иметь вид

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{const}. \quad (34.14)$$

Разделив на g и учитывая, что $\rho g = \gamma$, где γ — удельный вес, получим другой вид уравнения Бернулли

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = C_1. \quad (34.15)$$

Выражение (34.15) представляет собой уравнение Бернулли для несжимаемой невязкой жидкости, находящейся под воздействием объемных и поверхностных сил.

Таким образом, при установившемся движении несжимаемой вязкой жидкости вдоль линии тока сумма трех величин

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}$$

сохраняет постоянное значение во всех точках на данной линии тока.

Для двух точек на одной и той же линии тока

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}. \quad (34.16)$$

Уравнение Бернулли является основным уравнением гидромеханики. Оно устанавливает связь между скоростью, гидродинамическим давлением и положением движущейся частицы жидкости. В дальнейшем это уравнение будет дополнено членами, учитывающими вязкость жидкости, и распространено на поток конечных размеров.

Если движение жидкости установившееся и невихревое, то при интегрировании уравнений движения жидкости получаем уравнение Эйлера

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = C_0 = \text{const}. \quad (34.17)$$

Оно по форме одинаково с уравнением Бернулли. Отличие от последнего заключается в том, что постоянная интегрирования в уравнении Бернулли является постоянной лишь для частиц одной и той же линии тока и принимает различные значения для различных линий тока. В уравнении же Эйлера постоянная интегрирования сохраняет одно и то же значение для всех частиц движущейся жидкости.

Для случая невихревого, но неустановившегося движения жидкости получено уравнение Лагранжа, которое имеет вид

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (34.18)$$

где φ — потенциал скорости.

§ 179. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЧЛЕНОВ УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ

Ввиду исключительной важности для гидромеханики уравнения Бернулли разберем более подробно физический смысл каждого из членов уравнения (34.15).

Все члены уравнения Бернулли в виде (34.15) имеют линейную размерность, поэтому их называют высотами.

Первое слагаемое z — высота рассматриваемой частицы жидкости над некоторой горизонтальной плоскостью (плоскостью сравнения). Это слагаемое называется геометрической высотой. Второе слагаемое $\frac{p}{\gamma}$ — высота, которую должен бы иметь покоящийся столб жидкости, чтобы получить давление p у

его основания. Это слагаемое называется пьезометрической высотой. Третье слагаемое $\frac{v^2}{2g}$ — высота, на которую могла бы подняться в пустоте материальная точка, брошенная вертикально вверх с начальной скоростью v . Это слагаемое называется скоростной высотой или скоростным напором.

Энергетический смысл членов уравнения Бернулли в виде уравнения (34.15). Сумма слагаемых $z + \frac{p}{\gamma}$ характеризует удельную, отнесенную к единице веса, потенциальную энергию, а слагаемое $\frac{v^2}{2g}$ — удельную кинетическую энергию движущейся частицы жидкости. Из уравнения Бернулли следует, что при установившемся движении невязкой жидкости удельная механическая энергия, равная сумме удельной кинетической и удельной потенциальной энергии, вдоль одной и той же струйки (траектории или линии тока) не изменяется — закон сохранения энергии для движущихся жидкостей.

Если при переходе от одного сечения струйки невязкой жидкости к другому скорость, например, увеличивается, то связанное с этим возрастание удельной кинетической энергии $\frac{v^2}{2g}$ произойдет за счет уменьшения на ту же величину удельной потенциальной энергии $z + \frac{p}{\gamma}$, и наоборот. За счет преобразования одного вида энергии в другой мы наблюдаем при возрастании скорости уменьшение давления, а при уменьшении скорости — возрастание давления.

При постоянной величине z (движение жидкости происходит в горизонтальной плоскости) уравнение Бернулли принимает вид

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = C_1 = \text{const} \quad (34.19)$$

или

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = \gamma C_1 = C_2.$$

Запишем это уравнение для двух точек линии тока

$$p_i + \frac{\rho v_i^2}{2} = p_\infty + \frac{\rho v_\infty^2}{2}, \quad (34.20)$$

где p_i , v_i — давление и скорость в произвольной точке;
 p_∞ , v_∞ — давление и скорость в бесконечности.

С помощью уравнения (34.20) может быть объяснено возникновение гидродинамического поля кораблей.

Гидродинамическим полем корабля называется область водного пространства, прилегающего к кораблю, в пределах которого наблюдается изменение давления, обусловленное движением корабля.

Движение корабля приводит к перемещению частиц воды (рис. 34.1). В соответствии с уравнением (34.20), чем больше ско-

рость, тем меньше давление. Таким образом, вблизи движущегося корабля создается область пониженного гидродинамического давления, приближенная эпюра изменения которого представлена в нижней части рис. 34.1.

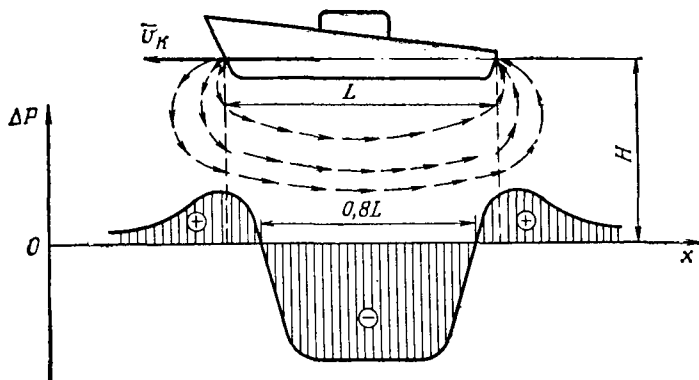


Рис. 34.1.

§ 180. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

При движении корабля, ракеты, торпеды, мины окружающий их поток жидкости можно условно разделить на три области (рис. 34.2). Первая область непосредственно соприкасается с по-

III Внешний потенциальный поток

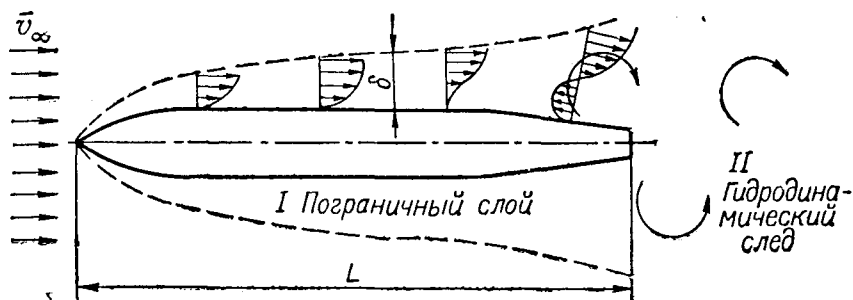


Рис. 34.2.

верхностью тела, имеет вид тонкого слоя толщиной δ (пограничного слоя), в котором градиент скорости по нормали к поверхности имеет большое значение и велики значения силы вязкости. Скорость в пограничном слое изменяется по толщине от $v=0$ до $v=v_{\max}$. Границей пограничного слоя принимают условно кривую или поверхность, где $v_{\max}=0,98 v_{\infty}$. Заторможенные частицы пограничного слоя уносятся набегающим потоком

вдоль тела и образуют за телом вторую область — область гидро- (аэро) динамического следа или спутной струи. Исследования показывают, что эта область заполнена вихрями, образующимися при обтекании твердого тела. Внутри пограничного слоя и гидро- (аэро) динамического следа пренебрегать силой трения нельзя.

Третья область находится за пределами пограничного слоя и называется областью внешнего потенциального потока. В третьей области силы вязкости незначительны, и поэтому к ней можно применять законы гидромеханики идеальной невязкой жидкости, движение которой является потенциальным.

Напомним, что потенциальным или невихревым называется движение жидкости, во всех точках которой вектор вихря скорости равен нулю. Для такого движения жидкости существует потенциальная функция $\varphi(x, y, z, t)$, частные производные от которой равны:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (34.21)$$

Изучение потенциального движения жидкости имеет большое значение при решении задач обтекания тела потоком жидкости. Чтобы определить движение жидкости в пограничном слое, надо сначала решить задачу обтекания тела потенциальным потоком жидкости. Составляющие скоростей в потенциальном потоке должны удовлетворять, с одной стороны, условиям, определяемым функцией потенциала скоростей, с другой стороны — условиям неразрывности движения. Подставляя значения (34.21) в уравнение неразрывности (34.2), получаем

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = 0.$$

При $\rho = \text{const}$ получаем равенство, которое называется уравнением Лапласа:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \\ \Delta \varphi = 0, \end{aligned} \right\} \quad (34.22)$$

или

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

Связь между скоростью потока и давлением для установившегося потенциального движения потока несжимаемой жидкости определяется уравнением Эйлера, которое при $z = \text{const}$ имеет вид:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const}. \quad (34.23)$$

Для определения скорости и давления в потенциальном потоке имеем два уравнения: (34.22) и (34.23). Непосредственное совместное решение их чрезвычайно трудно, так как одно из них — урав-

нение Лапласа — является дифференциальным. В уравнение Эйлера входят две неизвестные величины, в то время как в уравнение Лапласа входит лишь одна — функция потенциала скорости. Поэтому сначала из уравнения Лапласа (34.22) нужно определить потенциал скорости φ и по формулам (34.21) вычислить проекции, а затем и величину скорости.

Подставляя затем значение скорости в уравнение Эйлера, находим искомое давление. Таким образом, решение задачи о потенциальном движении жидкости в основном сводится к определению потенциала скорости φ , для чего необходимо проинтегрировать уравнение Лапласа. Методы интегрирования уравнения Лапласа могут быть объединены в три группы: аналитические, графические и экспериментальные (аналоговые).

§ 181. ПОНЯТИЕ О КАВИТАЦИИ

Пусть из резервуара достаточно большого объема и поперечного сечения жидкость поступает в трубопровод, имеющий в каком-либо месте сужение. Обозначим давление в резервуаре в месте, расположенном против входа в трубопровод, где скорость практически равна нулю, через p_0 (поддерживается постоянным), а давление и скорость в сужении через p и v .

Применяя уравнение Бернулли (34.20), для двух рассматриваемых сечений можно записать

$$p_0 = p + \frac{\rho v^2}{2}.$$

По мере уменьшения сечения трубопровода скорость v будет увеличиваться, а давление p уменьшаться. Так как жидкость практически не способна сопротивляться растягивающим усилиям, то давление p не может быть отрицательным. Следовательно, существует критическая предельная скорость движения жидкости $v_{\text{пр}}$, при которой $p=0$. Величина этой скорости будет равна

$$v_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{2(p_a + \gamma h)}{\gamma}} g.$$

Так, если принять давление в трубе $p_0 = 3 \text{ ат} = 3 \cdot 10^4 \text{ кгс/м}^2$; $\gamma = 1020 \text{ кгс/м}^3$; $g = 9,81 \text{ м/с}^2$, тогда

$$v_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3 \cdot 10^4}{1020}} 9,81 \approx 54 \text{ м/с}.$$

Опыты показывают, что при скоростях, близких к $v_{\text{пр}}$ в области пониженного давления, из жидкости выделяются мельчайшие пузырьки растворенного в ней воздуха (жидкость закипает). По мере повышения скорости количество пузырьков увеличивается, в жидкости образуются полости, заполненные паром или газом.

Явление образования в потоке жидкости полостей, заполненных газом и паровоздушной смесью, называется кавитацией.

Таким образом, при понижении давления в потоке жидкости до определенной величины, близкой к соответствующей давлению насыщенных паров $p_{\text{нп}}$, в нем образуются полости в виде пузырьков, заполненных паром или газом. Как только эти пузырьки при дальнейшем движении жидкости попадают в область давлений, больших $p_{\text{нп}}$, происходит быстрое смыкание полостей (захлопывание), сопровождаемое резким шумом. С возникновением кавитации нарушается сплошность потока. Количественное изменение скорости приводит к качественному изменению потока, к которому уже нельзя применять уравнение Бернулли. Явление кавитации может наблюдаться не только при движении жидкости по трубопроводам, но и при работе гидравлических насосов, водяных турбин, а также на корпусе торпед, ракет, мин, подводных лодок, на винтах кораблей.

Вследствие кавитации изменяется силовое воздействие жидкости на тело. Уменьшается скорость движения, увеличивается шумность, разрушаются гребные винты, снижается КПД гидравлических насосов, водяных турбин.

Вопросы увеличения скорости и снижения шумности морского оружия и его носителей являются весьма актуальными для ВМФ. Склонность потока к кавитации характеризуется безразмерным коэффициентом σ_k , называемым числом кавитации и определяемым выражением

$$\sigma_k = \frac{p_0 - p_{\text{нп}}}{\frac{\rho v^2}{2}}.$$

Число кавитации σ_k представляет собой запас давления в потоке над уровнем начала кавитации, выраженной в долях скоростного напора. Значение σ_k , соответствующее началу кавитации, обозначается $\sigma_{\text{кр}}$ и называется критическим числом кавитации, которое определяется опытным путем. Начало кавитации зависит от температуры жидкости, которая влияет на давление насыщенных паров. Так, например, для воды при $t=0^\circ\text{C}$ $p_{\text{нп}}=62$ кгс/м²; при $t=30^\circ\text{C}$ $p_{\text{нп}}=433$ кгс/м² и т. д.

Скорость движения твердого тела, соответствующая началу кавитации, называется критической скоростью и определяется по формуле

$$v_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{2(p_a + \gamma h - p_{\text{нп}})}{\rho \sigma_{\text{кр}}}}. \quad (34.24)$$

Из выражения (34.24) следует, что величина критической скорости возрастает с увеличением глубины погружения тела h и уменьшением критического числа кавитации $\sigma_{\text{кр}}$. $v_{\text{кр}}$ может быть увеличена путем применения более плавных обводов головной

части тела. Опыты показывают, что для удлиненных тел вращения на глубине погружения $5 \div 10$ м $v_{кр} = 30 \div 35$ м/с. Так, для торпеды при $\sigma_{кр} = 0,40$ $h = 10$ м; температура воды 10° С ($\rho_{нп} = 1224$ Н/м²) $p_a = 1,01 \cdot 10^5$ Н/м²; $\gamma = 1 \cdot 10^4$ Н/м³; $\rho = 1020$ кг/м³.

$$v_{кр} = \sqrt{\frac{2(1,01 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4 \cdot 10 - 1224)}{1020 \cdot 0,4}} \approx 31,2 \text{ м/с.}$$

§ 182. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ТЕЛО ПРИ ЕГО УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ В НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ. ТЕОРЕМА Н. Е. ЖУКОВСКОГО О ПОДЪЕМНОЙ СИЛЕ

Рассмотрим движение бесконечно длинного круглого цилиндра в плоскопараллельном потенциальном потоке невязкой жидкости (рис. 34.3, а).

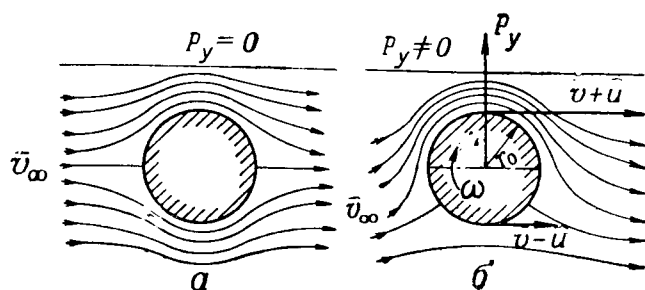


Рис. 34.3.

В гидромеханике используется метод обратимости движения, который состоит в том, что вместо движения тела в неподвижной жидкости рассматривают движение жидкости относительно неподвижного тела. При этом относительное движение не изменяется, а следовательно, не изменяются и гидродинамические силы. Тогда при симметричном обтекании неподвижного цилиндра силы гидродинамического давления будут взаимно уравновешиваться, цилиндр будет испытывать со стороны потока лишь симметричное сжатие и сопротивление его движению равняется нулю. В этом заключается так называемый парадокс Даламбера. Такой результат является следствием принятых предположений об отсутствии в потоке идеальной жидкости сил вязкости и вихреобразования. При движении цилиндра в вязкой жидкости сопротивление его не равно нулю.

Рассмотрим движение бесконечно длинного круглого цилиндра, вокруг которого существует циркуляционный поток (рис. 34.3, б).

В реальных условиях циркуляцию вокруг цилиндра можно создать путем вращения цилиндра. Вращающийся цилиндр благодаря трению увлекает за собой во вращение и прилегающие к нему слои жидкости. Если к этому добавить еще поступательный поток, то получается картина, очень близкая к той, которая показана на

рис. 34.3, б. Скорости набегающего потока и точек на поверхности цилиндра над цилиндром имеют одинаковое направление и складываются, а под цилиндром — разное и вычитаются. Суммарная скорость будет над цилиндром больше, а давление в соответствии с уравнением Бернулли меньше, чем под цилиндром. В результате возникает подъемная сила, направленная в сторону повышенных скоростей.

Обратим внимание на то обстоятельство, что создание рассмотренного выше циркуляционного обтекания цилиндра формально равносильно замене цилиндра одиночным вихрем. Отсюда возникает формальная возможность замены любого тела, обтекаемого циркуляционным потоком, соответствующей системой вихрей. На возможность такой замены впервые указал Н. Е. Жуковский в 1905 г. Им же доказана теорема о подъемной силе, которая определяет силовое воздействие плоскопараллельного потенциального потока на обтекаемое им тело любой формы. Величина подъемной силы на единицу длины определяется из равенства

$$P_y = v_\infty \Gamma \rho l, \quad (34.25)$$

где v_∞ — скорость набегающего потока, Γ — циркуляция, ρ — плотность жидкости.

Таким образом, подъемная сила, приходящаяся на единицу длины бесконечного тела, например крыла, в плоскопараллельном потоке невязкой жидкости по величине равняется произведению скорости набегающего потока на циркуляцию и на плотность жидкости, а по направлению совпадает с перпендикуляром к вектору скорости, восстановленным в сторону, где циркуляционное течение совпадает с набегающим потоком.

Так как циркуляция скорости в реальных условиях возникает за счет вихревого обтекания тела, то теорема Жуковского имеет физический смысл и практическое значение только для вязкой жидкости. Правило для определения циркуляции скорости установлено Н. Е. Жуковским и С. А. Чаплыгиным.

Индуктивное сопротивление. Установлено, что характер обтекания тела, например крыла, конечной и бесконечной длины различен. Вследствие разности давлений под крылом и над крылом жидкость будет перетекать снизу вверх. Этот эффект приводит к выравниванию давлений, падению подъемной силы и образованию свободных вихрей, сходящих с концов крыла по потоку (рис. 34.4, а). Свободные вихри, сбегаящие с концов крыла, вызывают (индуктируют) дополнительные скорости v_i , направленные вниз, которые называются скоростями скоса потока (рис. 34.4, б).

Из-за скоса течения крыло конечного размаха встречает поток не под углом атаки α , а под углом (истинным) $\alpha_{ист}$. Сила воздействия идеальной жидкости на крыло $P_{уист}$ должна быть направлена перпендикулярно истинному направлению скорости. Разлагая эту силу по направлениям (перпендикулярному скорости не-

возмущенного потока v_∞ и параллельному ей), получим подъемную силу крыла P_y и так называемое индуктивное сопротивление R_i крыла:

$$R_i = P_y \operatorname{tg}(\Delta\alpha)$$

или, принимая во внимание малое значение угла схода потока $\Delta\alpha$:

$$R_i = P_y \Delta\alpha. \quad (34.26)$$

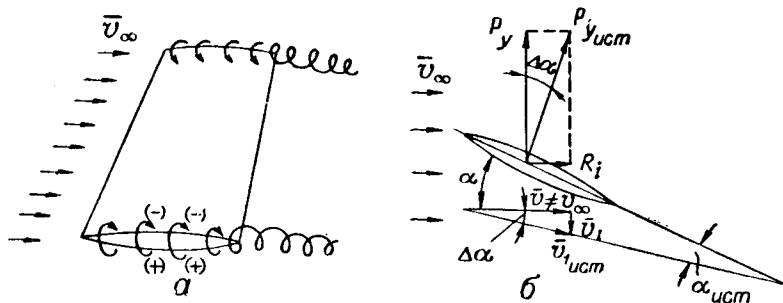


Рис. 34.4.

§ 183. ПРИСОЕДИНЕННЫЕ МАССЫ, МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПРИСОЕДИНЕННЫХ МАСС И МЕТОДЫ ИХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ТОРПЕД, МИН, РАКЕТ

При неустановившемся движении твердого тела, в частности подводного снаряда, возникает сопротивление за счет преодоления сил инерции окружающей жидкости. Так, для приведения в движение подводного снаряда необходимо преодолеть не только инерцию самого тела, но и инерцию частиц окружающей его жидкости, которые движутся с разными скоростями и ускорениями.

Для учета инерционности частиц жидкости необходимо определить их суммарную кинетическую энергию, что является весьма сложной задачей.

Как показали проведенные исследования, кинетическая энергия частиц жидкости, обусловленная поступательным движением твердого тела, может быть представлена в виде кинетической энергии некоторой массы жидкости, все частицы которой движутся с одинаковой скоростью, равной скорости тела. Иными словами, при вычислении кинетической энергии можно представить себе движение частиц жидкости, которое происходит с разными скоростями для разных частиц и распространяется на всю среду замененным движением некоторой фиктивной массы жидкости, все частицы которой движутся с той же скоростью, что и тело. Эта масса жидкости называется **присоединенной массой**.

Не следует физически представлять себе присоединенную массу в виде некоторой массы жидкости, движущейся вместе со снарядом. Это такая, по существу, условная масса, которая по своему

инерционному воздействию эквивалентна кажущемуся увеличению массы снаряда при его неравномерном движении. Таким образом, пользуясь понятием присоединенной массы, при исследовании неравномерного движения, например подводного снаряда, в идеальной жидкости можно рассматривать поступательное движение снаряда как происходящее в пустоте, увеличив предварительно его массу на величину присоединенной массы. Величина присоединенной массы целиком определяется формой и размерами тела, направлением его движения и плотностью жидкости.

Аналогично понятию присоединенной массы вводится понятие присоединенного момента инерции. Присоединенный момент инерции можно рассматривать как кажущееся увеличение момента инерции твердого тела при его вращательном движении в жидкости. Таким образом, кинетическая энергия жидкости, приведенной в движение твердым телом, в частности подводным снарядом, может быть представлена в виде

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \sum_{k=1}^6 v_i v_k m_{ik}, \quad (34.27)$$

где m_{ik} — функция, выражающая либо присоединенную массу, либо присоединенный момент инерции;

v_1, v_2, v_3 — проекции скорости v начала подвижной, связанной с телом системы координат на неподвижные оси прямоугольной системы координат x, y, z соответственно;

v_4, v_5, v_6 — проекции угловой скорости вращения на те же оси.

Всего будет 36 выражений для присоединенных масс и присоединенных моментов инерции (осевых, центробежных). Двойной индекс m_{ik} следует понимать следующим образом. Первая цифра указывает, на какую ось проектируется вектор скорости v . При этом оси x соответствуют цифры 1 и 4, оси y — цифры 2 и 5, оси z — цифры 3 и 6.

Вторая цифра обозначает, от какого движения произошла та или иная проекция. При этом цифры 1, 2, 3 соответствуют поступательному движению вдоль осей x, y, z , а цифры 4, 5, 6 — вращательному движению вокруг тех же осей.

Большая часть тел, например подводные и надводные плавающие тела, снаряды и т. п., имеют симметричную форму, следовательно, для них центробежные моменты инерции равны нулю и число m_{ik} уменьшается. В частном случае поступательного движения симметричного твердого тела

$$T = \frac{1}{2} (m_{11} v_x^2 + m_{22} v_y^2 + m_{33} v_z^2), \quad (34.28)$$

где m_{11}, m_{22}, m_{33} — присоединенные массы;

v_x, v_y, v_z — соответствующие проекции скорости на оси неподвижной системы координат.

При вращательном движении вокруг оси, проходящей через центр тяжести:

$$T = \frac{1}{2} (m_{44}\omega_x^2 + m_{55}\omega_y^2 + m_{66}\omega_z^2), \quad (34.29)$$

где m_{44} , m_{55} , m_{66} — присоединенные моменты инерции; $\omega_x = v_4$, $\omega_y = v_5$, $\omega_z = v_6$ — соответствующие проекции угловой скорости на неподвижные оси координат.

Величину присоединенной массы и присоединенного момента инерции можно характеризовать коэффициентом μ , который не за-

висит от массы и размеров тела и одинаков для всех геометрически подобных тел при безотрывном их обтекании. Однако значения коэффициентов μ в настоящее время достаточно точно определены лишь для тел простой формы (сфера, диск, эллипсоид). Для приближенного определения присоединенных масс и моментов инерции присоединенных масс тел сложной формы можно воспользоваться методами плоских сечений и эквивалентного эллипсоида. При использовании второго метода подводные снаряды заменяются эквивалентными им эллипсоидами вращения.

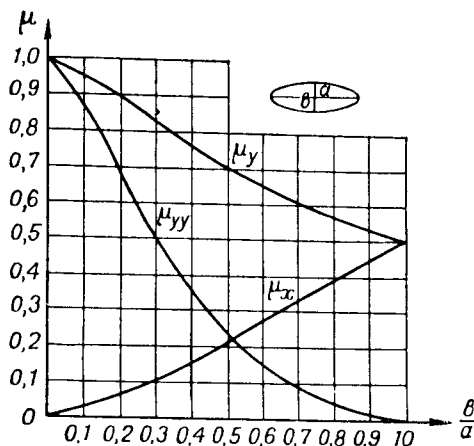


Рис. 34.5.

Эквивалентным будем считать такой эллипсоид, у которого площадь миделевого сечения и объем соответственно равны площади миделевого сечения и объему тела, например подводного снаряда. Значения коэффициента μ_x , μ_y , μ_{yy} определяются по графику (рис. 34.5), где $k = \frac{b}{a} = \frac{\pi d^3}{6V}$; a , b — полуоси миделевого сечения эллипсоида вращения; d , V — диаметр и объем подводного снаряда.

После определения коэффициентов присоединенные массы и момент инерции присоединенных масс вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} m_{11} &= \mu_x V \rho; \\ m_{22} &= \mu_y V \rho; \\ m_{55} &= \mu_{yy} \frac{V \rho}{5} d^2 \left(1 + \frac{1}{k^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (34.30)$$

Пример. Определить величину присоединенных масс m_{11} и m_{22} для ракеты при следующих исходных данных: калибр ракеты 0,53 м, объем 1,30 м³, плотность воды 1020 кг/м³.

Решение. 1. Рассчитываем коэффициент k по формуле

$$k = \frac{\pi \cdot d^3}{6V} = \frac{\pi \cdot (0,53)^3}{6 \cdot 1,3} = 0,06.$$

2. По графику на рис. 34.5 определяем μ_x и μ_y , которые будут равны:

$$\mu_x = 0,02; \quad \mu_y = 0,98.$$

3. Определяем величины m_{11} и m_{22} :

$$m_{11} = \mu_x V \rho = 0,02 \cdot 1,30 \cdot 1020 = 26,5 \text{ кг};$$

$$m_{22} = \mu_y V \rho = 0,98 \cdot 1,30 \cdot 1020 = 1300 \text{ кг}.$$

ГИДРОДИНАМИКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

§ 184. ВЯЗКАЯ ЖИДКОСТЬ. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Вязкой называется такая жидкость, в которой при движении возникают как нормальные, так и касательные напряжения.

Давление в вязкой жидкости обладает важным свойством: сумма давлений на три взаимно перпендикулярные площадки не зависит от выбора их направлений.

Давление в вязкой жидкости называется гидромеханическим давлением, принимаемым равным средней арифметической из значений нормальных напряжений, приложенных к трем взаимно перпендикулярным площадкам, проходящим через данную точку жидкости:

$$p = \frac{1}{3} (p_x + p_y + p_z). \quad (35.1)$$

Касательное напряжение характеризует силу внутреннего трения, т. е. силу, проявляющуюся при перемещении слоев жидкости друг по другу и обладающую следующими основными свойствами:

— сила внутреннего трения прямо пропорциональна относительной скорости перемещения слоев жидкости и величине поверхности соприкасания этих слоев;

— сила внутреннего трения зависит от физических свойств жидкости и не зависит от давления (нормального напряжения).

Таким образом, величина силы внутреннего трения $F_{тр}$, как следует из (32.4), может быть определена по формуле

$$F_{тр} = \mu S \frac{dv}{dn}, \quad (35.2)$$

откуда напряжение трения будет равно

$$\tau = \frac{F_{тр}}{S} = \mu \frac{dv}{dn}, \quad (35.3)$$

где S — площадь поверхности соприкасания.

Эпюры распределения скоростей частиц невязкой и вязкой жидкостей, обтекающих пластинку, показаны соответственно на рис. 35.1, а, б.

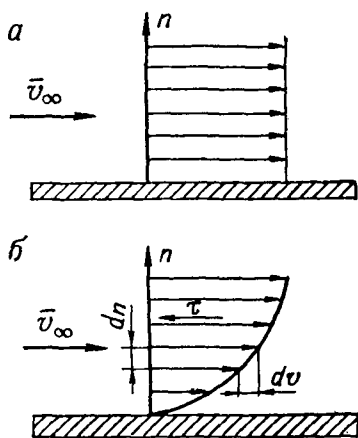


Рис. 35.1.

Уравнения движения вязкой сжимаемой жидкости можно получить путем добавления к общим уравнениям движения идеальной жидкости (34.1) составляющих сил вязкости, отнесенных к единице массы, которые обозначим:

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \nu \Delta v_x + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} v; \\ Y_v &= \nu \Delta v_y + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} v; \\ Z_v &= \nu \Delta v_z + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} v, \end{aligned} \right\} \quad (35.4)$$

где Δ — оператор Лапласа, а $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ — кинематический коэффициент вязкости.

Уравнения (34.1) с учетом (35.4) запишем в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v_x + \frac{\nu}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} v; \\ \frac{dv_y}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v_y + \frac{\nu}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} v; \\ \frac{dv_z}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z + \frac{\nu}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} v. \end{aligned} \right\} \quad (35.5)$$

Уравнения движения вязкой жидкости (35.5) известны под названием дифференциальных уравнений Навье-Стокса.

В случае движения несжимаемой жидкости $\operatorname{div} v = 0$, и тогда

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v_x; \\ \frac{dv_y}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v_y; \\ \frac{dv_z}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z. \end{aligned} \right\} \quad (35.5a)$$

При заданных объемных силах X , Y , Z , плотности ρ и динамическом коэффициенте вязкости μ получаем замкнутую систему дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости, которая является фундаментальной в гидромеханике. Решая систему, получаем значения давления и трех проекций скорости движения. Соответственно интеграл Бернулли по линии тока для вязкой несжимаемой жидкости имеет вид

$$-U + P + \frac{v^2}{2} + R_{\text{тр}} = \text{const}, \quad (35.6)$$

где $R_{\text{тр}}$ — удельная работа сил трения.

Полагая, что из объемных сил на жидкость действует только сила тяжести, что движение является установившимся и жидкость несжимаемая, уравнение (35.6) запишем в виде

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + \frac{R_{\text{тр}}}{g} = \text{const}, \quad (35.7)$$

т. е. удельная энергия жидкости во всех точках на данной линии тока постоянна.

Для любых двух точек, взятых на одной линии тока, можем написать

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{R_{\text{тр}1}}{g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{R_{\text{тр}2}}{g}. \quad (35.8)$$

Обозначая $\frac{R_{\text{тр}2} - R_{\text{тр}1}}{g} = h_{1-2}$ и учитывая, что h_{1-2} всегда положительная величина, получим

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{1-2}. \quad (35.9)$$

В таком виде уравнение (35.9) обычно называют уравнением Бернулли для вязкой жидкости. Физический смысл членов z , $\frac{p}{\gamma}$, $\frac{v^2}{2g}$ в этом уравнении тот же, что и в уравнении Бернулли для невязкой жидкости; h_{1-2} выражает работу сил трения, отнесенных к единице веса жидкости при перемещении частицы жидкости по своей траектории от точки 1 до точки 2. Этот член имеет размерность

длины и называется потеряннм напором на линии тока (траектории) или потерянной удельной энергией на траектории.

Пример. По трубопроводу переменного сечения перекачивается топливо. Определить скорость и давление в сужении, если

$Q = 10 \text{ л/с} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}$; $d_1 = 0,1 \text{ м}$; $d_2 = 0,025 \text{ м}$; $p_1 = 48 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2$; $z_1 = 10 \text{ м}$; $z_2 = 7 \text{ м}$; $h_{1-2} = 2,2 \text{ м}$; $\gamma_T = 7,8 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^3$.

Решение. Составляем уравнение Бернулли для двух сечений

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma_T} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma_T} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{1-2}$$

откуда

$$p_2 = \left(z_1 - z_2 + \frac{p_1}{\gamma_T} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} - h_{1-2} \right) \gamma_T$$

Среднюю скорость определяем по формуле

$$v = \frac{Q}{S}$$

Тогда

$$v_1 = \frac{4Q}{\pi d_1^2} = \frac{4 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,1^2} = 1,27 \text{ м/с}; \quad v_2 = \frac{4Q}{\pi d_2^2} = \frac{4 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,025^2} = 20,3 \text{ м/с}$$

Определяем давление в сужении

$$p_2 = \left[10 - 7 + \frac{48 \cdot 10^4}{7,8 \cdot 10^3} + \frac{1,27^2 - 20,3^2}{2 \cdot 9,81} - 2,2 \right] \cdot 7,8 \cdot 10^3 = 32,3 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2$$

§ 185. РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ. КРИТЕРИЙ РЕЙНОЛЬДСА

Установлено, что потери энергии при движении жидкости существенным образом зависят от режима движения, который может быть ламинарным или турбулентным.

При ламинарном режиме жидкость движется параллельными слоями без перемешивания частиц и пульсации скоростей. При турбулентном режиме жидкость движется с пульсацией скоростей, приводящей к перемешиванию ее частиц. При этом под пульсацией скорости понимается явление быстрых изменений мгновенной скорости во времени по ее величине и (или) направлению. Рейнольдс установил (1883 г.), что режим движения жидкости определяется величиной безразмерного выражения (числом Рейнольдса), равного

$$Re = \frac{vl}{\nu}, \quad (35.10)$$

где v — средняя скорость движения жидкости;

l — характерный линейный размер тела;

ν — кинематический коэффициент вязкости.

По мере увеличения числа Re поток из ламинарного переходит

в турбулентный режим движения. Критическое число Рейнольдса $Re_{кр}$ характеризует момент перехода от ламинарного к турбулентному движению. Если $Re < Re_{кр}$, режим движения ламинарный; если $Re > Re_{кр}$, режим движения турбулентный. Подробные исследования показали, что существуют два значения критического значения числа Рейнольдса: нижнее $Re_{кр}^н$ и верхнее $Re_{кр}^в$. При $Re_{кр}^н \leq Re \leq Re_{кр}^в$ режим может быть либо ламинарным, либо турбулентным в зависимости от местных условий движения (состояние обтекаемых стенок, их форма, условия входа и т. д.). Обычно в технических расчетах учитывают некоторое среднее значение $Re_{кр}$. Так, для круглых труб за характерный размер принимают внутренний диаметр и тогда Re будет

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu}. \quad (35.11)$$

В технических расчетах обычно принимают для труб $Re_{кр} = 2300$.

Для тел, имеющих удлиненную (сигарообразную) форму, как, например, подводная лодка, корпус снаряда и т. п., в качестве характерного размера принимают его длину L и тогда

$$Re = \frac{v \cdot L}{\nu}. \quad (35.12)$$

Критическое число $Re_{кр}$ для подобных тел принимают равным $3 \cdot 10^5$.

Значения $Re_{кр}$ для тел различных форм (пластинка, шар и т. п.) можно найти в справочниках.

Пример. Определить режим движения воды в трубе круглого сечения диаметром $d = 0,02$ м, если средняя скорость $v = 0,1$ м/с; $\nu = 1,30 \cdot 10^{-6}$ м²/с.

Решение. Определяем по формуле (35.11) число Рейнольдса

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{0,1 \cdot 0,02}{1,3 \cdot 10^{-6}} = 1540.$$

Так как $1540 < 2300$, следовательно, режим движения воды ламинарный.

Необходимо отметить, что при турбулентном режиме движения жидкости в любой точке потока не только изменения скорости, но и изменения нормального и касательного напряжений носят пульсирующий характер. Наличие этих пульсаций весьма осложняет исследование турбулентного движения.

Однако для практических целей нет надобности знать величину мгновенной скорости и мгновенного давления. В расчетах обычно пользуются средними (по времени) величинами скоростей, давлений и касательных напряжений, которые в дальнейшем будем называть средними.

Изучение неустановившегося движения, таким образом, сводится к изучению движения установившегося, и это значительно упрощает исследование.

Часто обозначают осредненные по времени значения величины теми же буквами, что и фактические их значения, но с чертой наверху:

$$\tilde{v} = \frac{1}{T} \int_0^{t+T} v dt; \quad \tilde{p} = \frac{1}{T} \int_0^{t+T} p dt; \quad \tilde{\tau} = \frac{1}{T} \int_0^{t+T} \tau dt.$$

§ 186. МЕХАНИЧЕСКОЕ ПОДОБИЕ ПОТОКОВ ЖИДКОСТИ. КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ

Многие задачи гидромеханики не поддаются теоретическому анализу и решаются опытным путем. В этом случае прибегают к исследованию процессов на моделях — моделированию явлений. Сущность моделирования состоит в том, что интересующее явление изучается в лаборатории, будучи воспроизведено в определенном масштабе. Лабораторно-модельный метод исследования обладает рядом преимуществ перед методом наблюдения в природе, позволяя устанавливать влияние тех или иных факторов в сложной совокупности их, обуславливающей явление в целом, а также вскрывать и изучать явления, неуловимые простыми наблюдениями в природе. Отметим, что натурные испытания образцов военно-морской техники обычно дорогостоящи и сложны, а провести их часто вообще чрезвычайно трудно. При исследовании явлений на моделях, т. е. при моделировании, представляется возможным получить оптимальные характеристики того или иного образца оружия, который еще только проектируется, проверить теоретические и технические предпосылки, положенные в основу его проектирования.

В основе моделирования лежат общие законы механического подобия. Для полного механического подобия необходимо соблюдать геометрическое, кинематическое и динамическое подобие.

Обозначим величины, относящиеся к натуре, индексом «н», а к модели — индексом «м».

Геометрическое подобие предполагает подобие формы и постоянство отношений двух сходственных размеров модели и природы. Коэффициент геометрического подобия

$$K_l = \frac{l_m}{l_n}. \quad (35.13)$$

Кинематическое подобие предполагает наряду с геометрическим подобием также постоянство отношений проекций векторов скоростей в любых двух сходственных точках тела или потока. Коэффициент кинематического подобия

$$K_v = \frac{v_m}{v_n}. \quad (35.14)$$

Динамическое подобие. Если выполнены два первых вида подобия и, кроме того, силы, действующие на сходственные элементы, пропорциональны в обоих явлениях, то такие явления

называются динамически подобными. Коэффициент динамического подобия

$$K_F = \frac{P_M}{P_H}. \quad (35.15)$$

Так как в жидкости действуют различные категории сил (силы давления, трения, тяжести, инерции и т. д.), то условий или критериев динамического подобия будет несколько. Основными из них являются следующие:

$$\frac{v_H t_H}{l_H} = \frac{v_M t_M}{l_M}; \quad \frac{vt}{l} = H \text{ — число гомохронности;}$$

$$\frac{v_H^2}{g_H l_H} = \frac{v_M^2}{g_M l_M}; \quad \frac{v^2}{gl} = F_r \text{ — обобщенное число Фруда;}$$

$$\frac{P_H}{\rho_H v_H^2} = \frac{P_M}{\rho_M v_M^2}; \quad \frac{P}{\rho v^2} = E \text{ — число Эйлера;}$$

$$\frac{v_H l_H}{\nu_H} = \frac{v_M l_M}{\nu_M}; \quad \frac{vl}{\nu} = Re \text{ — число Рейнольдса.}$$

Справедлива следующая теорема: геометрически подобные модельный и натурный потоки вязкой несжимаемой жидкости, касательные напряжения в которых подчиняются закону Ньютона, подобны также и механически, если равны значения чисел гомохронности, Фруда, Эйлера и Рейнольдса в сходственных точках потока. Необходимо отметить, что в большинстве практических экспериментальных исследований одновременно выполнить перечисленные критерии подобия либо невозможно (например, Re и F_r), либо представляет значительные трудности и нередко при постановке экспериментов приходится моделировать только по одному из них, который является определяющим.

Например, если в исследуемых потоках силы вязкости малы и ими можно пренебречь, то из критериев подобия исключается критерий Рейнольдса. В случаях когда мало влияние силы тяжести, исключается критерий Фруда. Наконец, если давление в исследуемых потоках не меняется с координатами, то из критериев подобия исключается критерий Эйлера.

§ 187. ПОНЯТИЕ О ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Пограничным слоем, как было отмечено в главе 35, называется прилегающий к поверхности твердого тела слой жидкости, в котором сосредоточено основное воздействие сил вязкости на тело. Схематически он представлен на рис. 35.2.

Образование пограничного слоя обусловлено затормаживающим действием поверхности твердого тела. При этом скорость жидкости в пограничном слое изменяется от нуля на поверхности тела до скорости набегающего потока за границей слоя. Напомним, что условно границей пограничного слоя принимают кривую

или поверхность, где $v_{\max} = 0,99v_{\infty}$, т. е. для которой скорость отличается от скорости набегающего потока на 1%. Толщину пограничного слоя обозначают δ . Как показывают расчеты, ориентировочно можно оценивать толщину пограничного слоя по формуле

$$\frac{\delta}{L} \approx \frac{1}{\sqrt{Re}}, \quad (35.16)$$

где L — характерная длина тела.

Отметим основные особенности пограничного слоя:

— толщина пограничного слоя δ растет по потоку, оставаясь все время много меньше длины обтекаемого тела, т. е. $\frac{\delta}{L} \ll 1$;

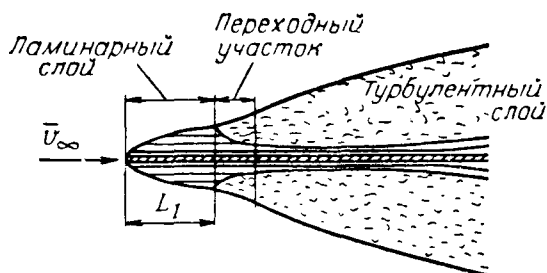


Рис. 35.2.

— скорость жидкости по нормали к поверхности, т. е. по толщине пограничного слоя, изменяется весьма резко, т. е. $\frac{dv}{dn}$ велико; на самой поверхности тела относительная скорость частиц жидкости равна нулю в силу их прилипания к поверхности обтекаемого тела;

— силы вязкости в пределах пограничного слоя имеют тот же порядок величины, что и силы инерции жидкости, поэтому ни теми, ни другими пренебрегать нельзя;

— давление по толщине пограничного слоя практически не изменяется;

— режим движения жидкости в пограничном слое может быть либо ламинарным по всей длине, либо смешанным; во втором случае ламинарный режим на определенном расстоянии от головной части тела переходит в турбулентный (рис. 35.2); длина тела, на которой существует ламинарный режим, определяется исходя из (35.12) по формуле

$$L_1 = \frac{3 \cdot 10^5 \nu}{v}. \quad (35.17)$$

Пограничный слой может либо плавно стекать с поверхности тела, либо отрываться от него в виде вихрей. Отрыв вихрей, образовавшихся в пограничном слое, сопровождается дополнительной потерей энергии.

§ 188. ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР И ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ
ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ТЕЛО

Одной из основных задач гидромеханики является определение силового взаимодействия твердого тела с жидкостью, в которой оно перемещается.

Воздействие жидкости на тело сводится к силам, непрерывно распределенным по поверхности тела. Поверхностные гидродинамические силы могут быть охарактеризованы величинами нормального p и касательного τ напряжений в каждой точке поверхности. Равнодействующая гидродинамических сил \vec{R} приложена в точке, которую называют центром давления (обозначена D на рис. 35.3). Обычно центр давления не совпадает с центром массы

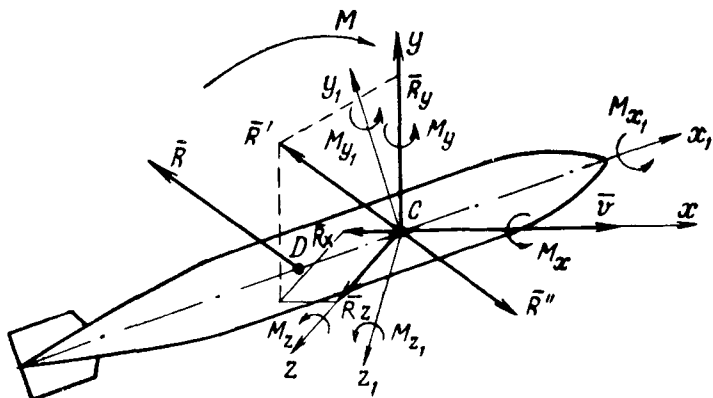


Рис. 35.3.

тела, например подводного снаряда, ракеты и т. д. При приведении равнодействующей гидродинамических сил к центру массы тела, который не лежит на линии действия \vec{R} , получим присоединенную пару, момент которой будет M . Силу $\vec{R}' = \vec{R}$, приложенную в центре массы подводного снаряда, называют главным вектором гидродинамических сил, а момент \vec{M} — главным моментом гидродинамических сил. Главный вектор \vec{R}' в общем случае направлен под некоторым углом к скорости. Составляющая главного вектора гидродинамических сил, направленная по нормали к скорости, называется подъемной силой \vec{R}_y . Составляющая, направленная в сторону, противоположную скорости \vec{v} , называется силой сопротивления \vec{R}_x .

При вычислениях и экспериментах обычно приходится иметь дело не с векторами \vec{R}' и \vec{M} , а с их составляющими в той или иной системе координат. Наиболее часто в гидромеханике используются кроме условно неподвижной следующие две системы координат: скоростная и связанная. В скоростной системе координат с началом в центре масс ось sx направлена по скорости

движения центра масс, ось cy направлена перпендикулярно вверх и лежит в плоскости симметрии тела, ось cz направлена так, чтобы система $cx_1y_1z_1$ была правой прямоугольной системой координат.

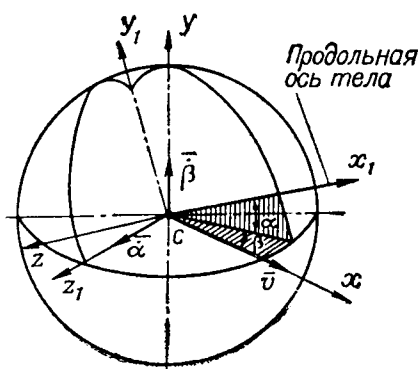


Рис. 35.4.

углом дрейфа β (рис. 35.4). Угол атаки — это угол между проекцией \bar{v} на плоскость симметрии и осью sx_1 , а угол дрейфа — угол между \bar{v} и ее проекцией на плоскость симметрии x_1cy_1 тела.

§ 189. СОСТАВЛЯЮЩИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ В СКОРОСТНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Представим себе тело (подводный снаряд), движущееся равномерно в вязкой жидкости со скоростью \bar{v} (рис. 35.5). Выделим

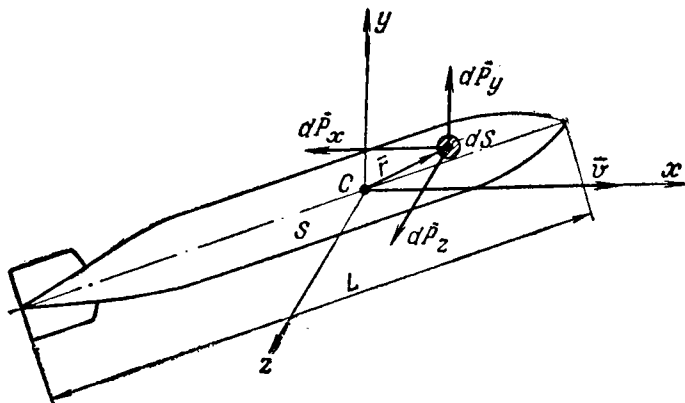


Рис. 35.5.

на его поверхности S элементарную площадку dS . На площадку dS со стороны жидкости действуют элементарные силы: касательная сила (сила трения) $d\bar{P}_\tau$ и нормальная сила (сила давления) $d\bar{P}_n$:

$$d\bar{P} = d\bar{P}_\tau + d\bar{P}_n \quad (35.18)$$

где

$d\bar{P}_\tau = dP_\tau \bar{\tau}$; $d\bar{P}_n = dP_n \bar{n}$; \bar{n} и $\bar{\tau}$ — орты, а $dP_\tau = \tau dS$ и $dP_n = p dS$ — соответственно элементарные силы трения и давления.

Проектируя эти силы на оси скоростной системы координат и затем интегрируя полученные проекции по всей смоченной поверхности тела S , найдем проекции главного вектора гидродинамических сил на оси скоростной системы координат:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \int_S \int \left[p \cos(\bar{i}, \hat{\bar{n}}) + \tau \cos(\bar{i}, \hat{\bar{\tau}}) \right] dS; \\ R_y &= \int_S \int \left[p \cos(\bar{j}, \hat{\bar{n}}) + \tau \cos(\bar{j}, \hat{\bar{\tau}}) \right] dS; \\ R_z &= \int_S \int \left[p \cos(\bar{k}, \hat{\bar{n}}) + \tau \cos(\bar{k}, \hat{\bar{\tau}}) \right] dS. \end{aligned} \right\} \quad (35.19)$$

Составляющие главного вектора гидродинамических сил \bar{R} называются:

R_x — сила лобового сопротивления;

R_y — подъемная сила;

R_z — боковая сила.

Обычно формулу (35.19) приводят к безразмерному виду. Для этого подынтегральные выражения умножают и делят на постоянную, равную $\frac{\rho v^2}{2} S$. Тогда, например, величина силы лобового сопротивления будет

$$R_x = \frac{\rho v^2}{2} S \int_S \int \left[\frac{p}{\rho v^2} \cos(\bar{i}, \hat{\bar{n}}) + \frac{\tau}{\rho v^2} \cos(\bar{i}, \hat{\bar{\tau}}) \right] \frac{dS}{S}. \quad (35.20)$$

Обозначим интеграл в правой части уравнения (35.20) через C_x . Тогда

$$R_x = C_x \frac{\rho v^2}{2} S.$$

Аналогично могут быть получены и другие составляющие. Запишем выражения для R_x , R_y , R_z :

$$\left. \begin{aligned} R_x &= C_x \frac{\rho v^2}{2} S; \\ R_y &= C_y \frac{\rho v^2}{2} S; \\ R_z &= C_z \frac{\rho v^2}{2} S. \end{aligned} \right\} \quad (35.21)$$

Безразмерные величины C_x , C_y , C_z называются соответственно коэффициентами лобового сопротивления, подъемной и боковой сил, ρ — плотность жидкости, S — характерная площадь тела.

Главный вектор гидродинамических сил по величине равен

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (35.22)$$

или

$$R = C_R \frac{\rho v^2}{2} S, \quad (35.23)$$

где

$$C_R = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2}. \quad (35.24)$$

Таким образом, величина главного вектора гидродинамических сил пропорциональна квадрату скорости, массовой плотности жидкости, квадрату линейных размеров тела и некоторому безразмерному коэффициенту C_R , зависящему от формы тела и условий его обтекания.

Элементарная сила $d\bar{R}$ создает момент относительно начала координат, равный

$$d\bar{M}_c = \bar{r} \times d\bar{P} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ dP_x & dP_y & dP_z \end{vmatrix}. \quad (35.25)$$

Опуская вывод, запишем проекции главного момента гидродинамических сил на скоростные оси координат в виде:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= m_x \frac{\rho v^2}{2} SL; \\ M_y &= m_y \frac{\rho v^2}{2} SL; \\ M_z &= m_z \frac{\rho v^2}{2} SL, \end{aligned} \right\} \quad (35.26)$$

где M_x — момент крена;
 M_y — момент рыскания;
 M_z — продольный момент (момент тангажа);
 m_x, m_y, m_z — безразмерные коэффициенты.

Величина главного момента гидродинамических сил будет

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \quad (35.27)$$

или

$$M = m \frac{\rho v^2}{2} SL, \quad (35.28)$$

где

$$m = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} \quad (35.29)$$

и L — характерная длина тела. Таким образом, гидродинамический момент пропорционален квадрату скорости v , массовой плотности жидкости ρ , кубу линейных размеров тела SL и зависит от некоторого безразмерного коэффициента момента m , характерного для формы данного тела и условий его обтекания.

Из рассмотренного следует, что задача об определении силового воздействия жидкости на тело (подводный снаряд) сводится к нахождению шести коэффициентов C_x ; C_y ; C_z ; m_x ; m_y ; m_z , которые определяются экспериментальным путем по результатам испытаний моделей в аэродинамических трубах и опытовых бассейнах при обязательном соблюдении условий подобия. Отдельные коэффициенты могут быть определены расчетным путем.

Пример. Определить силу сопротивления воды движению торпеды, если площадь ее поверхности $S_n=11,1$ м², скорость поступательного движения $v=20$ м/с и коэффициент $C_x=0,002$.

Решение. Сила сопротивления воды движению торпеды определяется по формуле $R_x = C_x \frac{\rho v^2}{2} S$.

Подставляя числовые значения, получаем

$$R_x = 0,002 \frac{1020 \cdot 400 \cdot 11,1}{2} = 4540 \text{ Н } (\sim 460 \text{ кгс}),$$

где $\rho=1020$ кг/м³.

§ 190. СИЛА СОПРОТИВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ ДВИЖЕНИЮ ТЕЛА И ЕЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ

Силой сопротивления называется проекция главного вектора нормальных и касательных сил, действующих на поверхность тела, на направление скорости.

Она всегда направлена в сторону, противоположную скорости движения тела. Величина силы сопротивления равна

$$R_x = R \cos(\bar{R}, \hat{\bar{v}}). \quad (35.30)$$

В соответствии с формулой (35.19) величина силы сопротивления жидкости может быть записана в виде

$$R_x = \int_S [\tau \cos(\bar{i}, \hat{\bar{\tau}}) + p \cos(\bar{i}, \hat{\bar{n}})] dS. \quad (35.31)$$

Следовательно, величину силы сопротивления можно представить в виде суммы двух составляющих

$$R_x = R_f + R_p,$$

где

$$R_f = \int_S \tau \cos(\bar{i}, \hat{\bar{\tau}}) dS; \quad R_p = \int_S p \cos(\bar{i}, \hat{\bar{n}}) dS. \quad (35.32)$$

Составляющая R_f называется сопротивлением трения, а R_p — сопротивлением давления.

Сопротивление трения зависит главным образом от режима движения жидкости в пограничном слое, а также от состояния поверхности тела и в свою очередь может быть представлено в виде следующих составляющих:

$$R_f = R_r + R_{\text{ош}} + R_{\text{мш}}, \quad (35.33)$$

где R_f — сила сопротивления трения технически гладкой поверхности;

$R_{\text{ош}}$ — сила сопротивления от общей шероховатости;

$R_{\text{мш}}$ — сила сопротивления от местной шероховатости.

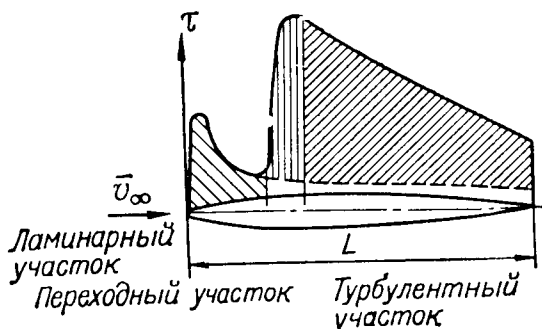


Рис. 35.6.

Отношение коэффициентов трения при различных режимах обтекания плоской пластины (что справедливо и для подводных снарядов) равно

$$\frac{C_{f \text{ турб}}}{C_{f \text{ лам}}} = 0,054 Re_L^{0,3}. \quad (35.34)$$

Из этой формулы видно, что при $Re_L = 1 \cdot 10^6$ сопротивление трения при турбулентном режиме в пограничном слое превышает сопротивление трения при ламинарном режиме в $0,054 \cdot (10^6)^{0,3} = 3,26$ раза, а при $Re_L = 1 \cdot 10^7$ — в 6,55 раза.

Примерное распределение касательных напряжений по длине тонкого симметрично обтекаемого тела приведено на рис. 35.6.

Аналогично сопротивление давления

$$R_p = R_f + R_i + R_v + R_{\text{и}}, \quad (35.35)$$

где R_f — сила сопротивления формы или вихревое сопротивление;

R_i — сила индуктивного сопротивления;

R_v — сила волнового сопротивления;

$R_{\text{и}}$ — составляющая силы инерционного сопротивления.

Сила вихревого сопротивления возникает вследствие перераспределения давления вдоль поверхности твердого тела из-за наличия пограничного слоя. Величина этой силы зависит от характера течения в пограничном слое. Если наблюдается отрыв пограничного слоя, то эта сила резко возрастает. Поэтому различают вихревое сопротивление при безотрывном обтекании и вихревое сопротивление при отрывном обтекании.

Сила индуктивного сопротивления возникает вследствие конечного размаха тела и является проекцией силы Жуковского на направление скорости.

Сила волнового сопротивления возникает при движении твердого тела по свободной поверхности жидкости или вблизи нее. Образование этой силы связано с затратой энергии на образование волн на свободной поверхности, которые возникают при движении твердого тела в вязкой жидкости.

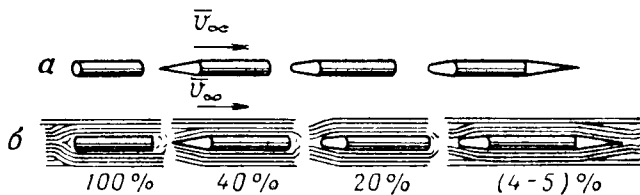


Рис. 35.7.

Сила инерционного сопротивления возникает при неравномерном движении тела, учитывается введением в рассмотрение присоединенных масс и моментов инерции присоединенных масс (§ 183).

Сопротивление давления в значительной степени зависит от формы тела и обусловлено главным образом вихреобразованием в кормовой части движущегося тела, а также перепадом давлений по длине пограничного слоя. Поэтому его нередко называют также сопротивлением формы или вихревым сопротивлением. Влияние формы тела на величину силы сопротивления для тел одного диаметра и при одинаковых скоростях обтекания показано на рис. 35.7.

Коэффициент сопротивления C_x состоит из двух частей — коэффициента трения и коэффициента сопротивления давления (формы)

$$C_x = C_f + C_p. \quad (35.36)$$

Коэффициент трения C_f определяется по приближенной формуле Прандтля — Шлихтинга

$$C_f = \frac{0,455}{(\lg Re_L)^{2,58}}. \quad (35.37)$$

Формула (35.37) получена для плоских идеально гладких пластин и справедлива при числах $Re_L = 5 \cdot 10^7$ и выше. Обтекание торпед, ракет, мин из-за кривизны поверхности корпуса не соответствует обтеканию пластин, однако это различие незначительно и поэтому на практике формулой (35.37) пользуются для определения C_f для торпед.

Для приближенного определения величины коэффициента сопротивления формы C_p пользуются формулой Пампеля, которая получена опытным путем:

$$C_p = 0,09 \frac{S_M}{S_H} \sqrt{\bar{l}}, \quad (35.38)$$

где S_m , S_n — площади миделевого сечения и смоченной поверхности неоперенного корпуса подводного снаряда;
 \bar{l} — коэффициент кормового заострения, определяемый по формуле $\bar{l} = \frac{\sqrt{S_m}}{2l}$, где l — длина конической части подводного снаряда.

§ 191. МЕТОДЫ УМЕНЬШЕНИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ ДВИЖЕНИЮ ТОРПЕД, МИН, РАКЕТ

Задача гидромеханики заключается не только в том, чтобы установить причины возникновения и величину сил сопротивления подводного снаряда в жидкости, но также и в том, чтобы разработать методы, позволяющие уменьшить величину силы сопротивления. Ведь чем меньше будет сопротивление движению снаряда в жидкости, тем меньше потребуется затратить энергии для движения снаряда с заданной скоростью, т. е. при заданном запасе топлива получить большую дальность стрельбы или увеличить скорость.

Чтобы уменьшить суммарную силу сопротивления движению снаряда в вязкой жидкости, надо уменьшить составляющие этой силы. Но каждая из составляющих силы сопротивления зависит от различных факторов. Поэтому и методы уменьшения составляющих силы сопротивления должны быть различными. Так как эти методы могут быть взаимно исключающими, то в практических задачах применяются такие из них, которые позволяют снизить величину наибольшей составляющей силы сопротивления.

Существующие методы уменьшения сопротивления воды движению торпед, мин, ракет основаны на направленном воздействии на движение жидкости в пограничном слое.

Можно указать две основные задачи управления пограничным слоем. Одна из этих задач состоит в предотвращении или по возможности в затягивании отрыва пограничного слоя. Другая из этих задач состоит в предотвращении или в возможном перемещении к корме снаряда точки перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный.

Управление пограничным слоем можно осуществить следующими методами:

- щелевой отсос жидкости из пограничного слоя;
- газонасыщение пограничного слоя;
- применение демпфирующих покрытий и вибрирующих оболочек.

Подробные сведения по этим методам можно найти в специальной литературе и в специальных курсах.

**ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ТРУБОПРОВОДАХ
И ИСТЕЧЕНИЕ ЕЕ ЧЕРЕЗ ОТВЕРСТИЯ**

§ 192. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ПОТОКА

Уравнение Бернулли для линии тока (струйки жидкости) может быть распространено на поток реальной жидкости только в том случае, если движение жидкости в потоке будет плавноизменяющимся. Плавноизменяющимся движением называется такое неравномерное движение жидкости, при котором:

- средняя скорость потока по длине изменяется незначительно и кривизна линий тока мала; это позволяет пренебречь ускорениями частиц и не учитывать инерционные силы;
- угол расхождения между линиями тока мал и поперечные составляющие скорости отсутствуют;
- для всех точек данного живого сечения удельная потенциальная энергия одинакова, т. е. давление в данном сечении изменяется по гидростатическому закону:

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{const.} \quad (36.1)$$

Для струйки жидкости скорость принималась постоянной по сечению. Для реального потока вязкой жидкости скорость по сечению изменяется. Средней скоростью потока называется скорость, с которой должны двигаться частицы жидкости через данное живое сечение, чтобы сохранился расход, соответствующий действительному распределению скоростей в рассматриваемом сечении. В соответствии с определением

$$Q = v \cdot (S) = \int_{(S)} v dS,$$

откуда

$$v = \frac{Q}{(S)} = \frac{\int_{(S)} v dS}{(S)}, \quad (36.2)$$

где (S) — площадь живого сечения;
 Q — объемный расход.

Однако действительная удельная кинетическая энергия в данном сечении потока оказывается большей, чем определенная по средней скорости. Это расхождение учитывается с помощью поправочного коэффициента кинетической энергии или коэффициента Кориолиса α , равного отношению действительной кинетической энергии T в данном сечении к кинетической энергии $T_{\text{ср}}$, вычисленной по средней скорости в этом же сечении:

$$\alpha = \frac{T}{T_{\text{ср}}} . \quad (36.3)$$

Значение α определяется теоретически или экспериментально и изменяется в пределах 1,03—2,0. Большие значения относятся к ламинарным потокам и потокам с ярко выраженной неравномерностью скорости.

Уравнение Бернулли для двух сечений плавноизменяющегося потока реальной жидкости может быть записано так:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma_1} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma_2} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{\Sigma 1-2}, \quad (36.4)$$

где z_1 и z_2 — расстояния от плоскости сравнения до соответствующих точек, взятых в сечениях 1—1 и 2—2;

p_1 и p_2 — давления в тех же точках, для которых определяются z_1 и z_2 ;

v_1 и v_2 — средние скорости в рассматриваемых живых сечениях;

$h_{\Sigma 1-2}$ — потерянная удельная энергия потока на участке 1—2.

Величина, равная сумме $z_1 + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g}$, является удельной механической энергией потока в живом сечении его. Для осредненного установившегося турбулентного потока при плавноизменяющемся движении уравнение Бернулли имеет вид

$$z_1 + \frac{\tilde{p}_1}{\gamma} + \frac{\tilde{\alpha}_1 \tilde{v}_1^2}{2g} = z_2 + \frac{\tilde{p}_2}{\gamma} + \frac{\tilde{\alpha}_2 \tilde{v}_2^2}{2g} + \bar{h}_{\Sigma 1-2}, \quad (36.4a)$$

где \tilde{p} и \tilde{v} — осредненные значения скорости и давления (стр. 588).

§ 193. ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ ПОТОКА НА ТРЕНИЕ И МЕСТНЫЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Задача определения потерь энергии потока является достаточно сложной. Проведенные исследования показали, что потерянную удельную механическую энергию, входящую в уравнение Бернулли, целесообразно разделить на две части:

- потерянную на сопротивление (трение) по длине h_f ;
- потерянную на преодоление местных сопротивлений h_j .

$$h_{\Sigma 1-2} = h_f + h_j. \quad (36.5)$$

Движение жидкости по трубам относится к разделу гидромеханики, называемому гидравликой.

Гидравлические потери выражают в долях кинетической энергии потока, при этом общая формула потерь записывается в виде

$$h = \zeta \frac{v^2}{2g}, \quad (36.6)$$

где ζ — безразмерный коэффициент сопротивления.

Сопротивлением по длине (на трение) называется сопротивление движению потока, вызываемое вязкостью и турбулентностью жидкости на участке рассматриваемой длины, без учета влияния местных сопротивлений.

Для круглых цилиндрических труб коэффициент

$$\zeta = \lambda \frac{l}{d}, \quad (36.7)$$

где λ — безразмерный коэффициент трения, который зависит от режима движения жидкости (числа Re) и относительной шероховатости; значения λ выбираются из таблиц;

l , d — длина и соответственно диаметр трубопровода.

Тогда формула для потерь на сопротивление по длине (трение) будет

$$h_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}. \quad (36.8)$$

Местным сопротивлением называется сопротивление движению потока, вызываемое каким-либо местным препятствием (сужением или расширением живого сечения задвижкой, клапаном, сеткой, коленом и т. п.). Потерянная энергия на преодоление местных сопротивлений выражается формулой

$$h_j = \zeta \frac{v^2}{2g}, \quad (36.9)$$

где ζ — безразмерный коэффициент местного сопротивления, который определяется из таблиц.

Часто при определении потерь энергии потока на местные сопротивления оказывается удобным ввести так называемую эквивалентную длину детали трубопровода. Эквивалентной длиной данного местного сопротивления называют такую длину прямого отрезка трубы, которая создает сопротивление, равное (эквивалентное) местному сопротивлению детали трубопровода:

$$h_j = \lambda \frac{l_3}{d} \frac{v^2}{2g} = \zeta \frac{v^2}{2g}. \quad (36.10)$$

Из условия эквивалентности получаем

$$\zeta = \lambda \frac{l_3}{d},$$

откуда

$$l_s = \frac{\zeta}{\lambda} d. \quad (36.11)$$

Таким образом, эквивалентная длина местного сопротивления выражается через диаметр трубы.

Пусть требуется определить потерю энергии (напора) в трубопроводе, состоящем из прямых отрезков труб, соединенных между собой с помощью всевозможных фасонных частей, с включением различного рода задвижек, вентилях, клапанов и тому подобных устройств. Эту задачу можно решать, определяя по формулам и таблицам коэффициенты местных сопротивлений $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ или вычислив предварительно эквивалентные длины местных сопротивлений. В первом случае суммарная потеря напора может быть определена по формуле

$$h_{\Sigma(1-2)} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \frac{v^2}{2g} \sum_{i=1}^n \zeta_i, \quad (36.12)$$

а во втором случае по формуле

$$h_{\Sigma(1-2)} = \lambda \frac{l + \sum_{i=1}^n l_{s,i}}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}, \quad (36.13)$$

где n — число местных сопротивлений.

§ 194. ПОНЯТИЕ О ГИДРАВЛИЧЕСКОМ РАСЧЕТЕ СИСТЕМ ТРУБОПРОВОДОВ

При проведении гидравлического расчета все системы трубопроводов могут быть сведены к двум типам: длинным и коротким. При этом длинными системами трубопроводов называются такие, местные потери напора в которых составляют не более 5—10% от общих потерь напора. Поэтому при расчете их местными потерями напора либо вовсе пренебрегают, либо учитывают их в виде соответствующей добавки к потерям напора на сопротивление по длине. Короткими системами называют такие, в которых местные потери напора и потери напора на трение по своей величине имеют одинаковый порядок.

При расчете трубопроводов для установившегося движения жидкости используются следующие равенства:

— уравнение Бернулли для потока

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{\Sigma(1-2)}; \quad (36.14)$$

— формулы, определяющие потери напора на трение и местные сопротивления:

$$h_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}; \quad (36.15)$$

$$h_j = \zeta \frac{v^2}{2g}; \quad (36.16)$$

— формулы или таблицы коэффициентов трения (λ) и местных сопротивлений (ζ);

— уравнения баланса расхода в системе трубопроводов или равенства расходов в отдельных частях системы;

— формула, определяющая величину средней скорости через объемный расход жидкости Q м³/с:

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2}, \quad (36.17)$$

где d — внутренний диаметр трубопровода.

При расчете длинных систем трубопроводов формулу (36.15) удобнее представить в другом виде, используя выражение (36.17):

$$h_f = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{Q^2}{\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)^2 2g} = \frac{\lambda \cdot 8}{\pi^2 d^5} \cdot \frac{Q^2}{g}. \quad (36.18)$$

Обозначая $k = \frac{\pi C}{8} d^{5/2}$, где $C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}$ — коэффициент сопротивления, получим

$$h_f = \frac{Q^2 l}{k^2}. \quad (36.19)$$

В формуле (36.19) k называют модулем расхода. Отметим, что равенство, определяющее потерю напора в формуле (36.19), удобно тем, что позволяет заранее для стандартных диаметров труб составить специальные таблицы для k и тем самым существенно облегчить технику расчета по указанной формуле. Рассмотрим пример расчета трубопровода, схема которого приведена на рис. 36.1, на котором изображены два бака, соединенные одной трубой длиной l и диаметром d . Уровень воды в первом баке располагается выше уровня воды во втором баке. С течением времени уровни жидкости не изменяются. Давление на поверхности воды в баках одинаково и равно атмосферному. Движение воды происходит по трубе диаметром d и длиной l из бака I в бак II. Для гидравлического расчета такого трубопровода составим прежде всего уравнение Бернулли для сечений потока 1—1 и 2—2, которые можно считать совпадающими со свободными поверхностями воды в баках и значительно большими по площади по сравнению с площадью сечения трубы.

Поэтому скоростные напоры в выбранных сечениях будут малы, ими можно пренебречь. Плоскость сравнения располагается

на свободной поверхности воды в баке II. Тогда получаем следующие значения членов, входящих в уравнение Бернулли (36.14):

$$z_1 = H; z_2 = 0; p_1 = p_2 = p_a; \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} \approx \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} = 0. \quad (36.20)$$

С учетом (36.20) уравнение Бернулли для потока примет вид

$$H = h_f.$$

Подставляя сюда значение h_f из формулы (36.19), получаем

$$H = \frac{Q^2 l}{k^2}. \quad (36.21)$$

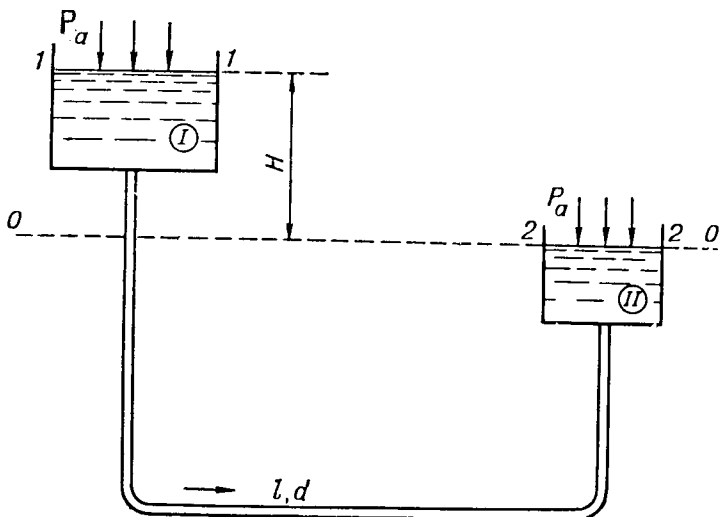


Рис. 36.1.

Это уравнение связывает между собой все параметры, определяющие движение жидкости в трубопроводе. Величина H в этой формуле называется напором простого трубопровода и измеряется в метрах.

Для трубопровода, состоящего из последовательно соединенных участков труб различных длин и диаметров:

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i^2 l_i}{k_i^2}. \quad (36.22)$$

Для короткого трубопровода постоянного диаметра, в котором следует учесть и местные сопротивления:

$$H = \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum_{i=1}^n \zeta_i \right) \frac{v^2}{2g}. \quad (36.23)$$

Обозначим

$$\lambda \frac{l}{d} + \sum_{i=1}^n \zeta_i = \zeta_c, \quad (36.24)$$

где ζ_c называют коэффициентом сопротивления системы. Тогда

$$H = \zeta_c \frac{v^2}{2g}. \quad (36.25)$$

Из равенства (36.25) может быть определена средняя скорость потока в трубе

$$v = \frac{1}{\sqrt{\zeta_c}} \sqrt{2gH}.$$

Объемный расход жидкости в любом сечении рассматриваемой трубы будет

$$Q = vF, \quad (36.26)$$

где F — площадь поперечного сечения трубы ($F = \frac{\pi d_1^2}{4}$, d_1 — внутренний диаметр трубы).

§ 195. ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ОТВЕРСТИЯ И НАСАДКИ

В практической деятельности часто приходится сталкиваться с многообразными случаями истечения жидкости из отверстий и через короткие патрубки, называемые насадками.

При протекании жидкости через малое отверстие в тонкой стенке (рис. 36.2) наблюдается сжатие струи, которое характеризуется коэффициентом сжатия ϵ :

$$\epsilon = \frac{S_c}{S}, \quad (36.27)$$

где S — площадь отверстия, а S_c — площадь сжатого сечения струи, которая будет на расстоянии $(0,5-0,7)d$ от плоскости стенки. Применим уравнение Бернулли для двух сечений $0-0$ и $C-C$ (рис. 36.2):

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{\alpha v_0^2}{2g} = z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{\alpha v_c^2}{2g} + h_{\Sigma 1-2}.$$

Учитывая, что $S_0 \gg S_c$; $p_0 = p_c = p_a$; $z_0 = H$; $z_c = 0$; $h_{\Sigma 1-2} = \zeta \frac{v_c^2}{2g}$; $v_0 = 0$, получим

$$H = \frac{v_c^2}{2g} (\alpha + \zeta),$$

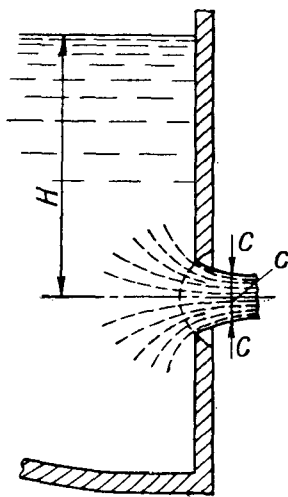


Рис. 36.2.

откуда

$$v_c = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \zeta}} \sqrt{2gH}.$$

Обозначим коэффициент

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha + \zeta}} = \varphi,$$

который называется коэффициентом скорости. Тогда

$$v_c = \varphi \sqrt{2gH}. \quad (36.28)$$

Расход жидкости, протекающей через отверстие в тонкой стенке, может быть выражен так:

$$Q = S_c v_c = \varepsilon S \varphi \sqrt{2gH} \quad (36.29)$$

или

$$Q = \mu S \sqrt{2gH}, \quad (36.30)$$

где $\mu = \varepsilon \varphi$ — коэффициент расхода, который определяется обычно опытным путем.

Для малых круглых и квадратных отверстий в тонкой стенке коэффициент расхода отверстия при совершенном сжатии $\mu = 0,62$.

Для этого же случая $\zeta = 0,05 \div 0,06$; $\varphi = 0,97 \div 0,98$; $\varepsilon = 0,64$.

Насадком называется короткая труба, присоединенная к отверстию. Насадки имеют широкое применение потому, что при известных условиях они без увеличения напора позволяют существенно увеличить расход жидко-

сти по сравнению с расходом через отверстие, форма и площадь которого совершенно такие же, как и выходного сечения насадка.

Наиболее распространенные виды насадков приведены на рис. 36.3, которые называются:

- a* — внешний цилиндрический;
- б* — внутренний цилиндрический;
- в* — конический сходящийся;
- г* — конический расходящийся;
- д* — коноидальный.

Широкое распространение имеет внешний цилиндрический насадок благодаря простоте его изготовления и довольно большой пропускной способности (при выполнении условий для нормальной работы такого насадка). Рассмотрим истечение жидкости через такой насадок, учитывая, что приводимые при этом рассуждения в общем справедливы и для других видов насадков.

При истечении жидкости через внешний цилиндрический насадок (рис. 36.4), так же как и в случае истечения через отверстие,

струя в самом насадке в сечении $C—C$ претерпевает сжатие, однако в отличие от истечения жидкости через отверстие после сжатия наблюдается при достаточной длине насадка расширение струи. Очертания струи имеют характер, показанный на рис. 36.4, и с течением времени при установившемся режиме не изменяются. Сжатие при выходе струи из насадка не наблюдается, так как она направлена к стенкам насадка. Рассматривая движение жидкости в сжатом сечении $C—C$ струи и в сечении ее $b—b$ и исходя из условия неразрывности движения жидкости, получаем, что средняя по сечению $C—C$ скорость движения не больше средней скорости по сечению $b—b$. Из уравнения Бернулли тогда следует, что давление в сечении $C—C$ меньше, чем в сечении $b—b$. Но в рассматриваемом случае в сечении $b—b$ имеет место атмосферное давление. Следовательно, в сжатом сечении струи давления меньше атмосферного, т. е. в нем имеет место разрежение (вакуум).

Ввиду наличия разрежения на участке, где струя сжата, происходит подсасывание жидкости из резервуара и скорость притекания жидкости к отверстию возрастает. Это вызывает увеличение расхода жидкости через насадок.

Скорость v и расход Q при протекании жидкости через насадки определяются по тем же формулам, что и для отверстий в тонкой стенке, но с другими величинами коэффициентов скорости и расхода.

Для внешнего цилиндрического насадка рассмотренные коэффициенты имеют следующие средние значения:

$$\epsilon = 1,0; \quad \varphi = 0,82; \quad \mu = 0,82; \quad \zeta = 0,5.$$

Пример. Определить расход воды из круглого отверстия диаметром $d = 0,1$ м и установить, как он изменится, если к этому отверстию присоединить цилиндрический насадок. Напор в центре отверстия $H = 3$ м.

Решение. Определяем расход воды, вытекающей из отверстия, по формуле (36.30), т. е.

$$Q = \mu S \sqrt{2gH} = 0,62 \cdot \frac{\pi \cdot 0,1^2}{4} \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 3} = 0,0373 \text{ м}^3/\text{с} = 37,3 \text{ л/с}.$$

Расход через цилиндрический насадок определяется также по формуле (36.30). Тогда при $\mu = 0,82$

$$Q = 0,82 \cdot \frac{\pi \cdot 0,1^2}{4} \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 3} = 0,0494 \text{ м}^3/\text{с} = 49,4 \text{ л/с},$$

т. е. увеличивается на $\approx 32\%$.

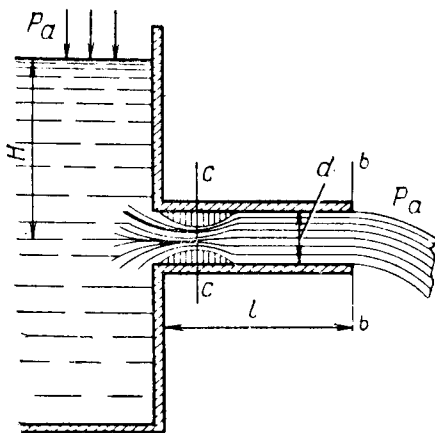


Рис. 36.4.

ГЛАВА 37

ОСНОВЫ ГАЗОДИНАМИКИ

§ 196. СКОРОСТЬ ЗВУКА

Газовая динамика — раздел механики, в котором рассматривается движение сжимаемой среды. Установлено, что сжимаемость движущейся среды зависит от отношения величины скорости v потока к скорости распространения звука a . Напомним, что если в какой-либо точке сжимаемой среды произвести возмущение, то оно будет передаваться с некоторой скоростью, называемой скоростью звука, равной

$$a^2 = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta \rho} = \frac{dp}{d\rho}. \quad (37.1)$$

Из равенства (37.1) следует, что скорость звука показывает, насколько следует увеличить давление, чтобы плотность увеличилась на единицу измерения, т. е. a является характеристикой сжимаемости покоящейся среды.

Для движущейся жидкости характеристика сжимаемости будет

$$M = \frac{v}{a}, \quad (37.2)$$

где v и a — скорость потока и соответственно скорость звука в данной точке потока. $\frac{v}{a}$ — называется числом «эм». Установлено, что при $M \leq 0,4 \div 0,5$ достаточной для практики степенью точности сжимаемостью среды можно пренебречь.

В газовой динамике рассматривается движение при $M \geq 0,5$. Из физики известно, что уравнение состояния газа имеет вид

$$\frac{p}{\rho} = RT, \quad (37.3)$$

где T — абсолютная температура;
 R — газовая постоянная (для воздуха $R = 287,04$ дж/кг·град, для водорода $R = 4150$ дж/кг·град, для кислорода $R = 260$ дж/кг·град и т. д.).

Адиабатическим процессом изменения состояния называется такой, который характеризуется отсутствием теплообмена с окружающей средой и выражается уравнением

$$\frac{p}{\rho^k} = C = \text{const} \text{ или } p = C\rho^k, \quad (37.4)$$

где $k = \frac{C_p}{C_v}$ — показатель адиабаты.

Тогда из (37.1) следует, что

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{d}{d\rho} (C\rho^k) = Ck\rho^{k-1} = k \frac{p}{\rho}$$

или с учетом (37.3)

$$a^2 = kRT. \quad (37.5)$$

Таким образом, скорость звука зависит от температуры среды ($T^\circ \text{K}$) и состава газа (k и R).

§ 197. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Уравнение Бернулли в дифференциальной форме, пригодное как для сжимаемой, так и для несжимаемой жидкости, полученное в (34.9), имело вид

$$-du + \frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0. \quad (37.6)$$

Для его решения требуется определить интеграл

$$P = \int \frac{dp}{\rho}, \quad (37.7)$$

который зависит от характера процесса изменения состояния газа.

При адиабатическом изменении состояния $dp = Cd(\rho^k)$ и, следовательно,

$$P = \int \frac{1}{\rho} d(C\rho^k) = Ck \int \rho^{k-2} d\rho = C \frac{k}{k-1} \rho^{k-1} \quad (37.8)$$

или с учетом (37.4)

$$P = \frac{p}{\rho^k} \frac{k}{k-1} \rho^{k-1} = \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho}. \quad (37.9)$$

Уравнение Бернулли в интегральной форме для сжимаемой среды при установившемся движении с учетом (37.9) будет иметь вид

$$z + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2g} = \text{const} \quad (37.10)$$

или

$$zg + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = i_0 = \text{const} \quad (37.10a)$$

во всех точках на данной линии тока, где i_0 — полная удельная энергия.

Для двух любых точек, взятых на одной и той же линии тока, уравнение Бернулли будет

$$z_1 + \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_1}{\gamma_1} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\gamma_2} + \frac{v_2^2}{2g}. \quad (37.11)$$

Уравнение (37.11) после простейших преобразований можно записать в виде

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma_1} + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{1}{k-1} \frac{p_1}{\gamma_1} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma_2} + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{1}{k-1} \frac{p_2}{\gamma_2} \quad (37.12)$$

или

$$e_1 + \frac{1}{k-1} \frac{p_1}{\gamma_1} = e_2 + \frac{1}{k-1} \frac{p_2}{\gamma_2}, \quad (37.13)$$

где e — удельная механическая энергия частицы газа.

Из уравнения (37.13) следует, что при адиабатическом процессе удельная механическая энергия в различных точках данной линии тока неодинакова. Следовательно, при движении сжимаемой среды в условиях отсутствия теплообмена с окружающей средой удельная механическая энергия частицы изменяется, т. е. при ее движении происходит превращение части механической энергии в тепловую или, наоборот, превращение части тепловой энергии в механическую.

Уравнению Бернулли для сжимаемой жидкости можно придать различные формы, если использовать уравнение состояния (37.3), понятие «скорость звука» (37.5) и принять, что $z_1 = z_2$ в равенстве (37.11), т. е. пренебречь весом газа. Так, равенство (37.10а) можно записать в следующем виде:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = \frac{v^2}{2} + \frac{k}{k-1} RT = \frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = i_0 = \text{const.} \quad (37.14)$$

Используя понятие числа M (37.2), уравнению Бернулли (37.14) можно придать и такие формы:

$$\left. \begin{aligned} i_0 &= \frac{v^2}{2} \left(1 + \frac{2}{k-1} \frac{a^2}{v^2} \right) = \frac{v^2}{2} \left(1 + \frac{2}{k-1} \frac{1}{M^2} \right) = \text{const} \\ \text{или} \\ i_0 &= \frac{a^2}{k-1} \left(\frac{k-1}{2} \frac{v^2}{a^2} + 1 \right) = \frac{a^2}{k-1} \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) = \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (37.15)$$

Если в потоке скорость какой-либо точки равна нулю, то такая точка называется точкой торможения. Обозначим p_0 , ρ_0 , T_0 параметры заторможенного потока газа в этой точке. Тогда из (37.14) следует

$$i_0 = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{k}{k-1} RT_0 = \frac{a_0^2}{k-1} = \text{const.} \quad (37.16)$$

Если в струйке скорость равна местной скорости звука, то такой режим течения называется критическим. Тогда из уравнения Бернулли (37.14) следует

$$i_0 = \frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{a_{\text{кр}}^2}{2} + \frac{a_{\text{кр}}^2}{k-1} = \frac{k+1}{k-1} \frac{a_{\text{кр}}^2}{2}, \quad (37.17)$$

где $v = a_{\text{кр}}$ — критическая скорость.

Допустим, что при истечении из трубки тока газ попадает в вакуум ($p=0$), тогда скорость достигает максимальной величины, а вся потенциальная энергия переходит в кинетическую

$$i_0 = \frac{v_{\text{max}}^2}{2}. \quad (37.18)$$

Сопоставляя равенства (37.16) и (37.17) и (37.18), видим, что

$$i_0 = \frac{a_0^2}{k-1} = \frac{k+1}{k-1} \cdot \frac{a_{\text{кр}}^2}{2} = \frac{v_{\text{max}}^2}{2}. \quad (37.19)$$

При изотермическом процессе уравнение Бернулли имеет вид

$$z + RT \ln p + \frac{v^2}{2g} = \text{const} \quad (37.20)$$

во всех точках на данной линии тока.

После преобразований с целью выяснения энергетического смысла уравнения (37.20) получим

$$z_1 + RT \ln p_1 + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + RT \ln p_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

или

$$e_1 = e_2 + RT \ln \frac{p_2}{p_1}. \quad (37.21)$$

Это значит, что и при изотермическом процессе удельная механическая энергия у частиц газа, которые расположены на одной и той же линии тока, неодинакова. Такое изменение удельной механической энергии обусловлено тем, что во время движения в условиях изотермического процесса происходит непрерывный теплообмен с внешней средой и частица газа по пути движения либо непрерывно отдает часть своего тепла во внешнюю среду, либо, наоборот, получает из внешней среды тепло.

§ 198. ИСТЕЧЕНИЕ ГАЗА ЧЕРЕЗ ОТВЕРСТИЯ И СОПЛА

Рассмотрим установившееся течение сжимаемой среды (газа) в струе переменного поперечного сечения ($F = var$), уравнение неразрывности для которого будет $\rho v F = \text{const}$. Логарифмируя, а затем дифференцируя уравнение неразрывности, получим

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dF}{F} = 0,$$

откуда

$$\frac{dF}{F} = -\frac{d\rho}{\rho} - \frac{dv}{v} = -\frac{dv}{v} \left(1 + \frac{\frac{d\rho}{\rho}}{\frac{dv}{v}} \right). \quad (37.22)$$

Из уравнения Бернулли (37.6) при $du=0$ следует, что

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{d(v^2)}{2}.$$

Последнее равенство можно записать в виде

$$\frac{d\rho}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -v dv = -v^2 \frac{dv}{v},$$

откуда с учетом (37.1)

$$-\frac{\frac{d\rho}{\rho}}{\frac{dv}{v}} = \frac{v^2}{\frac{d\rho}{d\rho}} = \frac{v^2}{a^2} = M^2. \quad (37.23)$$

Подставляя в (37.22), получим

$$\frac{dF}{F} = -\frac{dv}{v} (1 - M^2). \quad (37.24)$$

Рассмотрим три основных движения сжимаемой среды в струе переменного сечения, пользуясь уравнением (37.24).

1) $v < a (M < 1)$, тогда $\frac{dF}{F}$ и $\frac{dv}{v}$ имеют разные знаки, т. е. относительное приращение величины скорости $\frac{dv}{v}$ имеет знак, обратный относительному приращению площади поперечного сечения $\frac{dF}{F}$. Таким образом, при дозвуковых скоростях увеличение площади поперечного сечения струи приводит к уменьшению скорости и повышению давления. Следовательно, для увеличения скорости дозвукового течения необходимо уменьшать поперечное сечение. Наименьшему поперечному сечению соответствует наибольшая дозвуковая скорость и наименьшее давление, т. е. сжимаемая среда в этом случае ведет себя так же, как несжимаемая.

2) $v = a (M = 1)$, тогда $(1 - M^2) = 0$ и, следовательно, $\frac{dF}{F} = 0$, что может быть, если $F = \text{const}$ или F имеет экстремальное значение. Так как при дозвуковых скоростях по мере уменьшения площади поперечного сечения струи скорость увеличивается, то скорость течения может достигнуть скорости звука только в месте наименьшего поперечного сечения.

3) $v > a (M > 1)$, тогда $(1 - M^2)$ отрицательна. Относительная скорость $\frac{dv}{v}$ и относительная площадь $\frac{dF}{F}$ поперечного сечения

имеют одинаковые знаки. Таким образом, при сверхзвуковом течении скорость увеличивается лишь при увеличении площади поперечного сечения. При этом газ расширяется так, что скорость течения возрастает при одновременном уменьшении плотности. Уменьшение площади поперечного сечения приводит к уменьшению скорости течения и повышению давления и плотности.

Из этого следует, что в дозвуковом и сверхзвуковом потоках зависимость величины скорости течения от формы струи принципиально различна. Следовательно, для получения сверхзвуковой

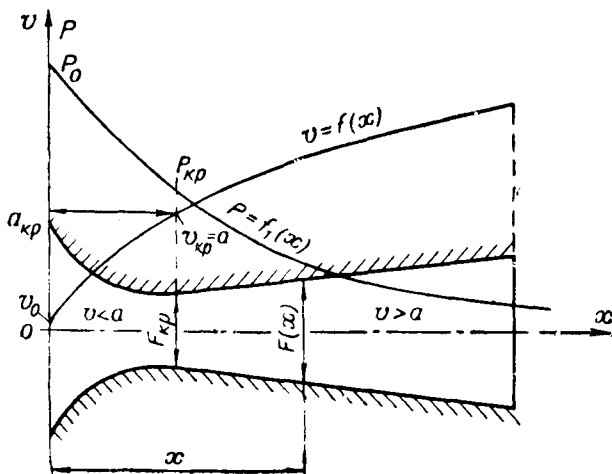


Рис. 37.1.

скорости течения необходимо, чтобы струя газа вначале сужалась до достижения $v = a$, затем расширялась до получения требуемой сверхзвуковой скорости. Для получения сверхзвуковых скоростей газа в трубах применяются специальные насадки, которые носят название сверхзвуковых сопел. Впервые форма сверхзвукового сопла была предложена инженером Лавалем и носит его имя. Вид сопла Лавалья показан на рис. 37.1.

§ 199. ПОНЯТИЕ ОБ УДАРНОЙ ВОЛНЕ

При обтекании твердых тел сверхзвуковым потоком или при движении твердого тела со сверхзвуковой скоростью в неподвижной сжимаемой среде возникают области, в которых параметры газа (плотность, давление, температура) резко (скачкообразно) изменяются. В таких областях параметры газа не являются непрерывной функцией координат точек пространства, заполненного сжимаемой средой. Места резкого изменения ρ , p , T называются скачками уплотнения или ударными волнами.

Пусть источником возмущения в неподвижной среде является материальная точка A (рис. 37.2, a). Тогда возмущение в виде, например, волны повышенного давления распространяется в виде концентрических кругов во все стороны со скоростью, равной скорости звука a . Рассмотрим три случая, когда среда, совершая плоскопараллельное движение, набегаем на материальную точку A со скоростью v_{∞} .

1) $v < a$ — дозвуковой поток. Тогда абсолютная скорость распространения возмущения будет $\overline{a+v}$ и спектр возмущений будет иметь вид, представленный на рис. 37.2, б.

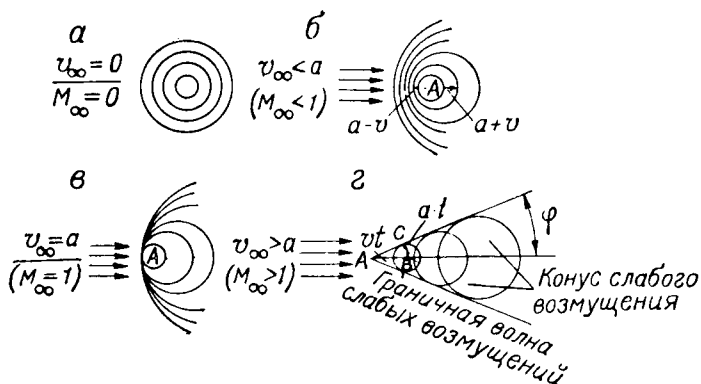


Рис. 37.2.

2) $v = a$ — звуковой поток. Спектр возмущений представлен на рис. 37.2, в. При этом образуются фронты волн, которые не могут отделиться от источника.

3) $v > a$ — сверхзвуковой поток. В этом случае волны возмущений распространяются только в одну сторону — назад и заполняют сзади источника некоторую часть пространства, имеющую форму конуса с образующей (граничной) волной слабых возмущений. За время t точка потока пройдет расстояние vt и будет в точке B , а возмущение, возникающее в точке A , — расстояние at . Опишем из точки B как центра окружность радиусом at . Тогда образующая конуса будет касательной, проведенной из A к окружностям с центрами в точках B_1, B_2 и т. д. Образующая конуса называется линией Маха и составляет угол φ с осью. При этом

$$\sin \varphi = \frac{at}{vt} = \frac{a}{v} = \frac{1}{M}, \quad (37.25)$$

тогда

$$\varphi = \arcsin \frac{1}{M}. \quad (37.26)$$

Из формулы (37.26) следует, что при увеличении числа M угол возмущений уменьшается, при уменьшении M — увеличивается.

При $M=1$ $\varphi=\frac{\pi}{2}$ — конус развертывается в плоскость. Напомним, что на линии слабых возмущений все параметры газа изменяются на бесконечно малые величины, поэтому линия слабых возмущений не является скачком уплотнения. Скачки уплотнения образуются при движении со сверхзвуковой скоростью тела, поверхность которого можно считать состоящей из бесконечно большого количества материальных точек, каждая из которых является источником слабых возмущений. Поэтому в отдельных областях пространства около тела происходит многократное суммирование бесконечно большого количества слабых возмущений. Параметры газа в этих областях теперь уже изменяются не на бесконечно малые величины, а на конечные. Эти области и являются скачками уплотнения, зонами резкого (скачкообразного) увеличения плотности, давления и температуры газа. Изменение параметров потока в скачке уплотнения показано на рис. 37.3.

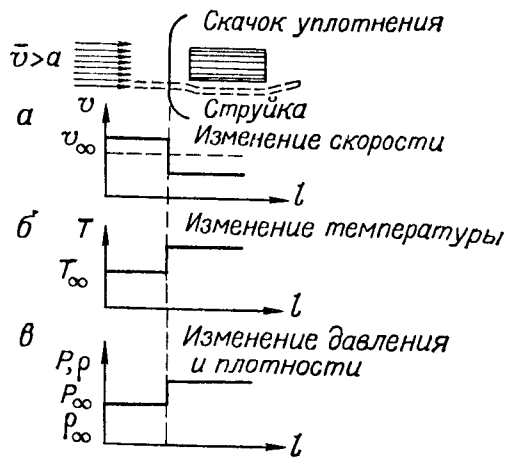


Рис. 37.3.

Скачки уплотнения могут быть прямыми и косыми. Прямым скачком уплотнения называют поверхность, отделяющую невозмущенный поток от области возмущений, расположенную под прямым углом к направлению набегающего потока (рис. 37.4, а).

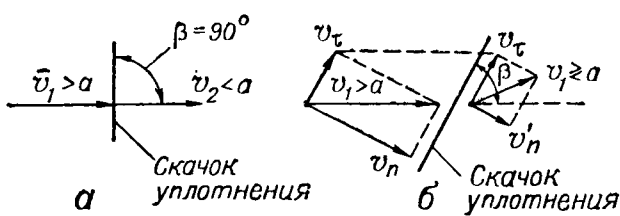


Рис. 37.4.

За прямым скачком происходит наибольшее увеличение плотности воздуха, поэтому сверхзвуковая скорость потока при прохождении им прямого скачка обязательно становится дозвуковой. Прямой скачок создает наибольшее по величине волновое сопротивление.

Косым скачком уплотнения называют поверхность, отделяющую невозмущенный поток от области возмущений, наклоненную под острым углом к направлению набегающего потока (рис. 37.4, б).

Косой скачок вызывает менее резкое, чем прямой скачок, изменение параметров потока.

По расположению относительно тела различают:

— присоединенный скачок, когда скачок уплотнения касается тела или заканчивается внутри пограничного слоя на границе раздела областей сверхзвуковых и дозвуковых скоростей;

— отсоединенный скачок, когда скачок уплотнения находится вне пограничного слоя; на рис. 37.5 показан характер изменения скачка уплотнения при обтекании сверхзвуковым потоком затуп-

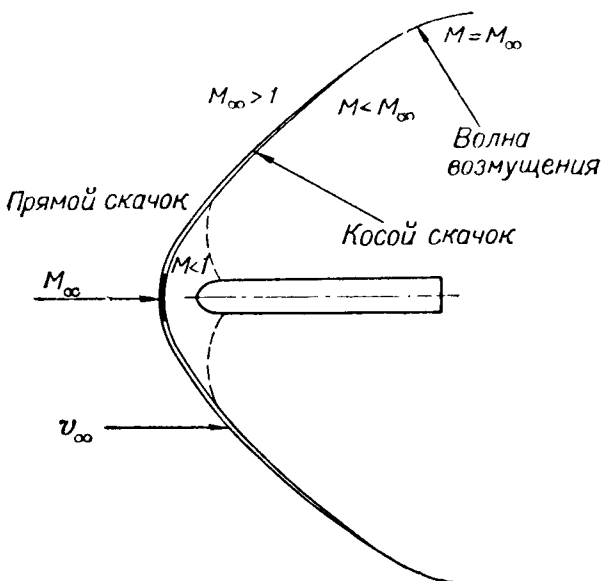


Рис. 37.5.

ленных тел; по мере удаления от тела прямой скачок становится косым скачком и затем вырождается в волну возмущения, которая представляет собой слабый скачок.

Подобно тому как необратимые потери механической энергии на тепло в пограничном слое являются источником сопротивления трения, так и необратимые потери механической энергии тела, переходящие в тепло на скачке уплотнения, являются источником особого рода сопротивления, свойственного только сверхзвуковым потокам волнового сопротивления R_v . Величина волнового сопротивления при данном значении числа M зависит от формы скачка уплотнения, а последняя зависит от формы и скорости тела. Таким образом, при $v > a$

$$R_x = R_f + R_p + R_v. \quad (37.27)$$

Более подробные сведения о скачках уплотнения можно найти в специальной литературе.

ЛИСТ ИСПРАВЛЕНИЙ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
49	1 снизу	(рис. 4.3)	(рис. 4.5)
54	17 сверху	$-\frac{Q}{2}$	$\frac{Q}{2}$
100	5 сверху	формула (8.5) выражает	формулы (8.4) и (8.5) выражают
	15 сверху	$F_2 = 5 \text{ см}^2$	$F_2 = 5,8 \text{ см}^2$
	12 снизу	$5 \cdot 10^{-4}$	$5,8 \cdot 10^{-4}$
166	2 сверху	$-\frac{70}{3EI_2} \text{ кН} \cdot \text{м}^2 = -\frac{7}{3EI_2} \text{ тс} \cdot \text{м}^2$	$-\frac{70 \text{ кН} \cdot \text{м}^2}{3EI_2} = -\frac{7 \text{ тс} \cdot \text{м}^2}{3EI_2}$
	8 сверху	$-\frac{100 \text{ кН} \cdot \text{м}^2}{3EI_2} \approx -\frac{10 \text{ тс} \cdot \text{м}^2}{3EI_2}$	$-\frac{100 \text{ кН} \cdot \text{м}^3}{3EI_2} \approx -\frac{10 \text{ тс} \cdot \text{м}^3}{3EI_2}$
	11 сверху	$-\frac{70 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} =$ $= -0,33 \cdot 10^{-3} \text{ рад} (\approx 0,58^\circ);$	$-\frac{70 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} =$ $= -0,33 \cdot 10^{-2} \text{ рад} (\approx -0,19^\circ);$
	12 сверху	$-\frac{100 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 3460 \cdot 10^{-8}}$	$-\frac{100 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 3460 \cdot 10^{-8}}$
171	7 сверху	связь	угловую связь
173	рис. 11.21 в	⊖	⊕
177	3 сверху	$J_y; J_z$	$I_y; I_z$
	1 снизу	$J_y; J_z$	$I_y; I_z$
178	6 сверху	$\frac{P_z I^3}{3EI_z} \frac{P_y I^3}{3EI_y}$	$\frac{P_z I^3}{3EI_y} \frac{P_y I^3}{3EI_z}$
214	8 снизу	$y = 4t^4$	$y = 4t^2$
277	14 сверху	(18.4)	(18.5)
317	14 снизу	(19.7)	(19.6)
333	3 снизу	$\sum_{k=1}^n \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} m_k$	$\sum_{k=1}^n \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} m_k$
351	9 снизу	движется прямолинейно	движется прямолинейно и вертикально вверх
419	14 сверху	(25.9)	(25.8)

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
426	22 сверху	$\delta (y_1 \cdot y_2) = \delta y_1 \cdot \delta y_2 + y_1 \cdot \delta y_2$	$\delta (y_1 \cdot y_2) = \delta y_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot \delta y_2$
449	21 сверху	на стр. 398	на стр. 423
466	12 снизу	кгс·м	кгс·см
479	12 снизу	—	(29.4)
	13 снизу	(29.3) и (29.4)	(29.2) и (29.3)
480	6 сверху	(29.3) и (29.4)	(29.2) и (29.3)
489	5 снизу	$D_{e_1} = d_1 + 2h$	$D_{e_1} = d_1 + 2h'$
	4 снизу	$D_{e_2} = d_2 + 2h$	$D_{e_2} = d_2 + 2h''$
494	ф. 30.9	$m \geq \sqrt[3]{\frac{2M\gamma}{y\psi_m z [\sigma]_H}}$	$m \geq \sqrt[3]{\frac{2M_1}{y\psi_m z [\sigma]_H}}$
499	7 сверху	$D_{e_1} = d_1 + 2m_s (z_1 + 2)$	$D_{e_1} = m_s (z_1 + 2)$
	ф. 30.15	$D_{e_2} = d_2 + 2m_s (z_2 + 2)$	$D_{e_2} = m_s (z_2 + 2)$
547	4 снизу	рис. 32.5	рис. 32.4
555	16 снизу	$v_x = \frac{\partial x}{\partial t}; w_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$	$v_x = \frac{dx}{dt}; w_x = \frac{d^2 x}{dt^2}$
556	1 снизу	$\frac{\partial v_x}{\partial t}$	$\frac{\partial v_x}{\partial t}$
557	5 сверху	$\frac{dv_y}{\partial t}$	$\frac{\partial v_y}{\partial t}$
573	2 снизу	$v_{\max} = 0,98 v_{\infty}$	$v_{\max} = 0,99 v_{\infty}$

3000000

04

37023

